数学のユニヴァースから集合論的多世界宇宙を眺望する*

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

September 12, 2026

1　数学としての集合論と数学の統一理論としての集合論

筆者にとって，2025(令和 7) 年 はちょっと特別な年でした．2024 年前半くらいまで続けていた，covid の感染を避けるための引き籠もり生活のパターンを改めて，研究集会や共同研究でさまざまな場所へ旅行しましたが，ヴィーンで，ほとんど 20 年ぶりに，シェラハ (Saharon Shelah) 先生にお目にかかり数学の話ができたことと，こちらはもう少し最近にもお目にかかっていたとはいえ，東京で，ゥウディン (Hugh Woodin) 先生にお目にかかり，私がずっと彼に聞きたかった数学／数学の哲学上の問題について話せたことは，私にとって特筆に値することでした．

シェラハ先生にお目にかかったのは，ヴィーン工科大学で開催された，先生の誕生日記念学会の折りで，これはこの年 2 回目の私のヴィーン滞在でした．ゥウディン先生にお目にかかったのは，東京大学で，これは，ゥウディン先生が高木レクチャーの招待講演者として講演をされた折りでした[1]．

シェラハとゥウディンは，現代の集合論研究の最先端での，以下で述べることになるような意味での 2 つの潮流を代表する方たちです — すでに数学史の中の主要

---

*本稿は数学セミナー 2026 年 9 月号掲載の記事の拡張版です．この作文の最新版は，

https://fuchino.ddo.jp/misc/multiverse-seen-from-our-universe-Susemi2026-x.pdf

として，download できます．ファイルに鍵がかかっている場合には，本稿の数学セミナーでの掲載の最後のページのページ数が keyword です．雑誌掲載版には含めることのできなかった，いくつかの説明がこのファイルに含まれています．特に，雑誌掲載版では，紙数の制限から，文献表を省かざるを得なかったのですが，これについての参照がここでできます．文献は，ネット上で downloadable なリンクのあるものについては，本稿 pdf で，そのリンクを clickable にしてあります．

[1]2025 年の (二度の) ヴィーン滞在では，ヴィーン工科大学のミュラー (Sandra Müller) 教授の研究グループから旅費滞在費の援助を受けました．この滞在では，同大学でポスドク研究員をされている合浦岳彦さんにもお世話になりました．東京の滞在では，酒井拓史教授の科研費からの補助を受けました．この三方を含め本稿の執筆に関連してお世話になった方々に感謝の意を表します．

登場人物になっている人達なので，(ニュートンやライプニッツに敬称をつけないのと同じ理由で) 以下では敬称を略することにします．実際，彼等に同じ年に会って話をしたというのは，330 年の時間を遡って考えると，1695(元禄 8) 年にロンドンでニュートンと会って，ハノーヴァでライプニッツに会った，というのに相当するような歴史的な体験だったのではないかと思っています．ちなみに，筆者はシェラハの助手をしたこともあり，彼とは共著論文も 10 本近くあります． ライプニッツは私の学術的祖先 (博士論文の指導教官という関係をたどった家系図での祖先) で，ハノーヴァでは 1 年間数学科の助手をしたことがあります．

『数セミ』掲載版ではこう書いてみたのですが，以下では，ゥウディンとの対話についての逸話も書いているので，ニュートンとの由縁だけがぬけ落ちてしまっています．何かないかと考えてみたら，ケンブリッジのニュートン研究所で講演をしたことがある，というのが言えることに気がつきました．この講演の聴衆の中にいた，当時イギリスの University of East Anglia の教授だった，シェラハの助手をしていた時代からの旧知の Mirna Džamonja 氏がいたく感心してくれて，その後で，オスロで開かれた Logic Colloquium のメインスピーカーの 1 人として招待してくれたことがあったりしました．以下で話すことになる私の最近の研究は，これらの会合の講演で発表した結果の延長線上で得られているものなので，その意味では，このニュートン研究所の滞在を，ここで挙げるのもそんなに場違いではないかもしれません．

数学の歴史は，文書として記録の残っているものに限っても 3500 年以上遡ることができるわけですが，その長い歴史と比べると，集合論が数学理論として確立したのは，ごく最近です．カントル (Georg Cantor) が実数の全体の非可算性の証明を得たのが 1873(明治 6) 年の 12 月のことで，これを集合論の研究分野としての発足のタイミングとすると，これはほんの 150 年ちょっと前のことにすぎません．しかし，この後の集合論の研究の進展や技術の洗練の加速には，目を見張るものがあります．筆者自身は，1970 年代の終りに，集合論の周辺の研究テーマで数学研究を始めて，次第に集合論の中心テーマに関わる研究に移行してきたと思っているのですが，現在から振り返ってみると，自分がやっていたことを含めて 2010 年代以前の研究は，遙か昔の時代の古色蒼然とした数学，という感じがします．もちろん，古い時代の研究を現在の視点から見なおしてみたときに新しい発見がある，という可能性は，どの段階でもつねにあるので，それ以前の時代の研究結果がもう「それで終ってしまったもの」になっているわけでも全然ないのですが．

集合論は，この研究に直接携っていない人にとっては，学部の数学の勉強で初めに習う，基礎用語集のようなものと理解されることが多いかもしれません．数学の基礎用語が集合論由来の概念でカバーできる，ということの背後には，少なくとも現存の数学については，これをすべて集合論の枠組の中で統一的に展開できる，という事実が控えているわけです．このことは，通常の数学のみを研究している立

場から見たときは，ちょうど物理学者が「数学は物理学の言語にすぎない」とよく言うことがあるのと同じように，「集合論は数学の言語にすぎない」という理解として見えてしまいがちかもしれません．

でも，この「基礎用語集」の勉強を，少し本格的にやった人の中には，集合の理論 (したがって数学) は，現代の論理学のきちんとした理解なしで使うと誤用しておかしな議論をしてしまったり，実際には記述できない命題をあたかもそれが記述できているような気になって議論してしまったりしている，というような状況が起こりやすいことや，通常の集合論の公理系からその正否の決定できない数学的な命題 (つまりその命題もその命題の否定も通常の集合論の公理系から証明できないような (通常の集合論の公理系から**独立**な)，**独立性命題** (independent (mathematical) assertions) と呼ばれる命題) がたくさんあって，現代の集合論はそのような命題を積極的に研究対象としていること，特に，カントルの**連続体仮説** (Continuum Hypothesis, 以下 CH と略記する)[2] がそのような命題の例の一つになっていること，また，この “独立性現象” が，数学や論理学の構造的な問題で，集合論の公理系など，数学の基礎付けとなるような十分に強い体系を，どのように設定／拡張したとしても，その体系での独立命題たちがまだ残っていて，そのようなものの中には数学的にも意味のあるものになっている命題たちも沢山含まれているかもしれないこと (**ゲーデルの不完全性定理**)，などを，聞いたことのある人もあると思います．

このような話を聞いて，これらの面倒な (恐しい？) 現象は，数学が集合論と関わるから起ることで，集合論と関わらなければ，起らないことだろう，という勘違いをしてしまう人が結構いるように思えます．しかし，これらは，もちろん数学を集合論に統合しようが，別の枠組で扱うことにしようが，数学が直面している現象であることに変わりはありません．それは不完全性定理の証明を思い出すと明らかでしょう．むしろ，これらの (魅惑的な？) 現象は，論理学や集合論で開発された／されつつある手法で分析／対応しなければ，まったく手のつけようのない問題になってしまうだけだ，と理解すべきだと思います．

以下では，(十分に) 数学的な意味があると言える (CH 以外での) 独立命題の例として，スースリンの仮説に関する，今では古典となっている，いくつかの研究結果の例を見てみたいと思います．**スースリンの仮説** (Suslin Hypothesis, 以下 SH と略記) は，

(∗) 端点を持たない完備な稠密線形順序で，可算連鎖条件を満たすものは，すべて，実数の全体の形成する線形順序と順序同型である． xitem-0

という主張です．ここで，順序集合 $\langle S, <_S \rangle$ が **線形順序** であるとは，S の任意の

[2]すぐ上で言ったように，実数の全体は可算でない (自然数の全体と一対一に対応をつけることができない)，つまり実数の全体の方が自然数の全体より本質的にサイズの大きな集合であることが 1873 年にカントルによって証明されたわけですが，CH は，自然数の全体の集合と，実数の全体の集合のサイズの真の間にあるサイズの集合が存在しないこと主張するものです．

異なる 2 点が $<_S$ で比較可能なことで，$\langle S, <_S\rangle$ が **稠密** (dense in itself) とは，任意の $a, b \in S$, $a <_S b$ に対して $c \in S$ で $a <_S c <_S b$ となるものがあること，稠密な線形順序が **完備** とは，S の任意の ($<_S$ に関する) デデキント切断が S の要素によって実現されること，$\langle S, <_S\rangle$ が **可算連鎖条件** を満たすとは，任意の S の互いに素な (つまり，任意の異なる 2 つの共通部分が空集合になるような) 開区間たちからなる族がすべて可算になること (つまりそのようなもので非可算なものがないこと) です．**可分** な (つまり，($\mathbb{R}$ に対しての $\mathbb{Q}$ のような) 可算な稠密部分集合が存在する[3]) 線形順序は可算連鎖条件を満たすことと，($*$) で「可算連鎖条件」を「可分」で置き換えたものは，定理として成り立つことから (これはカントルの Back and Forth 定理からの帰結です)，(*) は，

(†) すべての端点を持たない完備な稠密線形順序 $\langle S, <_S\rangle$ で，$\langle S, <_S\rangle$ が可算連鎖条件を満たすなら，$\langle S, <_S\rangle$ は可分である． xitem-1

と言いなおすこともできます．1970 年代に，この命題 ($*$) (または (†)) は通常の集合論の公理系 (ZFC) から独立なだけでなく，ZFC に CH を加えて得られる体系からも，ZFC に連続体仮説の否定 ¬CH を加えて得られる体系からも，独立であることが証明されています[4]．スースリンの仮説に関連する数学史については，Kanamori [10] に詳しい記述があって，そこには，本稿で話題にしている 2 人のうちの 1 人であるシェラハの，1984 年の「驚くべき結果」(remarkable result) についての言及もあります．

現代の最先端の数学研究では，集合論で開発された，一般の数学では通常使われない手法や集合論の公理系に関する考察を応用することで解決された／される可能性のある問題もあります (上で例として挙げたスースリンの仮説に関連の研究結果たちも，これは主に 1970 年代にすでに確立された古典的な結果ではありますが，そのようなものの一つの例と考えてよいでしょう)．

集合論の研究には，このような通常数学と考えられているテーマにつながる研究や，それ自身が「集合論」という数学の分野としての研究で，集合論での特有の研究手法も積極的に用いられているような数学研究，という側面があると同時に，集合論 (つまり数学) の基礎付けとしての集合論の研究，という側面もあって，この 2 つの側面への分極は，集合論発足以来，つねに見られるように思えます．

1947 年のゲーデルの論説 [9] に端を発する，通常の集合論の公理系に妥当な公

---

[3] $D \subseteq S$ が (S で) 稠密とは，任意の $a, b \in S$, $a <_S b$ に対し，$d \in D$ で，$a <_S d <_S b$ となるものが存在することです．これは先ほど出てきた S 自身が稠密な順序集合だ，というのとは，似ているけれど別の概念であることに注意してください．

[4] ZFC は完全でないけれど，これに連続体仮説 CH を加えると完全になる，と勘違いしている人も少なくないかもしれません．そんなことがあり得ないのは，不完全性定理をきちんと理解していれば明らかなはずなわけですが，スースリンの仮説は，この ZFC + CH が完全な体系でないことの，具体的な例になっているものの一つです (しかも連続体に直接関連する命題でそれを示すような例になっています!) ．

理を付加することで，CH やスースリンの仮説 (SH) など，通常の集合論上で独立命題であることが知られているものの (全部は不完全性定理により無理としても) 主要なものについて，それらの真偽を決定するような (正しい) 公理系を見つけることを目指す，という「**ゲーデルのプログラム**」として知られている研究方針は，上で 2 つの極と言ったものの後者の立場での，20 世紀後半以降での大きな指針の一つと言えます．

そこで，以下では，上で言ったような集合論の 2 つの潮流を，それぞれ，「集合論的数学」，「集合論の基礎付けとしての集合論」ないし「ゲーデルのプログラム」というキーワードで呼ぶことにしたいと思います．本稿の初めで「シェラハとゥウディンが 2 つの潮流を代表する」と言ったのは，この 2 つを頭に置いて言ったことでした．もちろん，この 2 つの潮流は大きな共通部分を持つし，以下でも触れることになる強制法の手法を含め，いくつもの基本的なテクニックを共有してもいます．シェラハと ゥウディンの研究でも，2 人とも，この 2 つの潮流の両方の側で，歴史に残る重要な研究結果をあげているし，この 2 人による共著論文もあります．それだから，2 人の数学の捉え方の違いを，こう纏めてしまうと，いずれにしても単純化しすぎかもしれないけれど，あえて理解のために言ってしまうと，前者が「集合論的数学」を代表し，後者が「ゲーデルのプログラム」を代表する，と言えるのではいかと思うのです．

CH や SH に関連する，独立性の研究結果は，「集合論的数学」の側から見るか，「ゲーデルのプログラム」の側から見るかで，見え方がまったく違ってくると言えそうです．集合論的数学の観点からは，これらの独立性の結果は，この 2 つの命題の真偽の組合せを成立させるさまざまなモデルの構成に関する研究結果として見ることができるでしょう．ここでは，ゲーデルの構成的宇宙 L で (例えば，拙著 [3] を参照)，CH とスースリンの仮説の否定 ¬SH が成り立つことや，マルティンの公理 (MA) と ¬CH を仮定したときに，SH が成り立つこと，などが含まれ，イェンセン (Ronald Jensen) による，CH を保って SH を成立させるモデルの構成や，シェラハの 1984 年の任意の集合論のモデルにコーエン実数を一つ付け加えたときに ¬SH の例証となっている構造が出現する，ということの証明の妙などが，さまざまな既存のモデルに関する結果の風景に組み入れられ，さらに考えてゆくと数学的に手の動きそうな，拡張された主張や関連する仮説などが，一気に広がって見えてくるでしょう．

上で述べた研究結果は L での結果を除くと，すべて，**強制法** (forcing) と呼ばれるテクニックの応用で得られているものですが，集合論的数学では，このテクニックの精錬自体も研究の目標になりえると言えるかもしれないし，実際この手法にまつわるテクニックは，現在でもさらに改良／革新が重ねられています (強制法についての一般向けの解説としては，これも例えば，拙著 [4] を参照してください)．

一方，「ゲーデルのプログラム」から見たときの，CH や，SH は，それらの真偽

が最終的には，何らかの意味で正しい公理から決定されることが目標になり，上で言ったような既存の結果は，この目標へのアプローチのための踏台になりうるエビデンスたち，というような認識になるのではないかと思います．もちろん，そのような価値観から出発しても，研究が流れに乗ったときには，そこでの結果は，「集合論的数学」への貢献につながる可能性もあるわけです．

2　集合論的多世界宇宙

上で言った結果たちのうち，独立性を得るために構成したモデルの中には，例えば，コーエン実数を一つ付加して得られるモデルのように，人工的，技術的と捉えられるようなものがある反面，マルティンの公理 (を $\neg$CH のもとで成り立たせるようなモデルのうち標準的なもの) やゲーデルの構成的集合の全体 L が集合全体のユニヴァース V と一致することを主張する公理 (V = L) での L のように，それらの意味や，そこで成り立っている公理の「正しさ」あるいは不適切性の議論が可能に思えるものもあります．

マルティンの公理を拡張する，Proper Forcing Axiom (PFA) や Martin's Maximum (MM) は，連続体仮説を否定するだけでなく，連続体の濃度を $\aleph_2$ に特定し，このこととこれらの公理の定義から，MA を導くので，PFA や MM からは $\neg$CH と SH が導かれます．上ですでに触れたコーエン実数でもそうですが，これらの公理を成り立たせるモデルは，**強制法** (forcing) という手法を使って作られます．ただし，PFA や MM の無矛盾性の確立には，大きな巨大基数の無矛盾性の強さが不可欠であることが知られていて，これらの公理の標準的なモデルは，通常 supercompact cardinal と呼ばれる基数の存在を満たす ZFC のモデルから出発して構成されます．

PFA も MM も，その主張は，集合論のユニヴァースが強制法を使った拡張に関して，ある種の絶対性や極大性を持つ，と解釈できるものになっていることが分かっています．これらの特徴づけや関連の古典的な結果は，Bagaria [1] や，S.F. [2] にあり，筆者が最近若い同僚と共著で書いた S.F., T. Gappo, and F. Parente [6] には，これらの結果の最近の視点からの再評価につながるいくつかの結果が述べられています．

これに対して，L は集合論の極小モデルであるという意味づけができて，このことや，これ以外の特徴づけから，V = L は，「意味を持つ」公理と言えるのですが，公理系 ZFC の「正しい」拡張に含まれている公理ではない，と判断されることが多いと思います．これは，V = L が大きな巨大基数の存在と共存できない，というのが主な理由の一つです．YouTube などで閲覧できる，ゥウディンの一般講演のヴィデオのいくつかで，彼は「スコット (Dana Scott) の定理により，V = L から可測基数の非存在が証明される．したがって V $\neq$ L である」と高らかに宣言しています．

ゥウディンは，2010 年代の初めごろに，V = L の自然なアナロジーで，大きな巨大基数との共存を許す V = Ultimate-L と呼ばれる原理を提唱して，これが ZFC を拡張する自然な公理になっていることを主張することになるべき大きな理論の構築を進めています．V = Ultimate-L は，多くの場合，連続体の周りを V = L でと同じように決定するので，CH や ¬SH を導く一方，巨大基数と共存できることから，(存在するところの) 巨大基数による記述集合論的な状況 (例えば，すべての射影集合がルベーグ可測になることなど) も成り立つことになるはずです．

でも，V = Ultimate-L が最終的に確立されるべき，集合論の姿だとすると，現在盛んに研究されている，「数学としての集合論」での，さまざまな集合論のモデル — その中には，コーエンモデルよりさらに人工的なものに見えるものも沢山含まれます — で行なわれている数学の研究は，ここから見たときには，単なる技術の遊びでしかなくなってしまうのではないか，という危惧も感じられます．

筆者自身は，「数学としての集合論」と「集合論の基礎付けとしての集合論」との両極端の立場の両立が，どこかでうまくとれてほしいと願っているので，これはずっとすごく気になっていることでした．

それで，東京でゥウディンに会った機会に，彼がこのことをどう思っているのかを知りたくて，「V = Ultimate-L が確立した暁には，例えば MM^{++} のような素敵な公理を全部見捨てなくてはならなくなるのでしょうか？」と思いきって聞いてみました．彼の返事は，「それでも generic extensions はまだある」というものでした．これは，V = Ultimate-L は巨大基数と共存するので，この巨大基数を使って強制拡大を行なうと，V の拡大で MM^{++} の成り立っている集合論宇宙や，他の状況の成り立っている集合論宇宙を構成することができ，それができることを否定するものではない，というような意味なのだろうと思います．でも否定するわけではなくても，これらの宇宙は，Ultimate-L の上に立ちあがる蜃気楼のようなものにすぎないもの，としてしか認識できなくなるのではないか，という不安は残るように思えます．

集合論のユニヴァースの拡大や内部モデルの構成の繰り返しで得られる集合論宇宙たちの総体を考える立場は，**集合論的多世界宇宙** (set-theoretic multiverse) と呼ばれていて，筆者の最近の研究の大きな部分も，この視点からのものと考えることができます．そのような研究で，私が最近得た結果には，集合論的多世界宇宙の中にある種の強い極大性，飽和性を持つ宇宙の 4 つの互いに両立不可能なタイプが存在して，平行宇宙のように，それぞれが正しい (集合論の公理系に対応する) 最終的な宇宙であることを主張している，と解釈のできるものが含まれています．薄葉季路氏が 2010 年代に得た，集合論のモデルのコアになっている bedrock と呼ばれる内部モデルの存在定理により，Ultimate-L の理論が確立されたときには，この Ultimate-L はこのコアと一致するはずなわけですが (コア (core) というのは，スティール (John Steel) が Steel [13] で用いている用語です)，薄葉氏との私の共著

論文 S.F., and T. Usuba [7] により，V がこの 4 つの宇宙のタイプの一つになっているという仮定からも，このコアの存在が導け，このときコアは V から見てそれほど離れていない場所に位置するものになることが分かっています．ゥウディンの言った，「それでも generic extensions はまだある」という答えが，この私の理論の提供する視座も許容／支持するものにもなっているのかどうかは，不明にも思えますが，私自身は，この Ultimate-L(-like) なコアから強制拡大で生成された集合論的多世界宇宙での極大性，飽和性を持つ集合論的宇宙たちの理論が，ゥウディンの Ultimate-L 理論の完成形とうまく調和して，「数学としての集合論」と「集合論の基礎付けとしての集合論」をつなぐ橋になるかもしれない，という期待を持って研究を続けています．この私の研究の一端は京都大学数理解析研究所講究録の集合論の巻に収録予定の，概説論文の性格の強い拙著 [5] でも見ることができます．

3 集合論的地質学と集合強制法多世界宇宙

集合論的多世界宇宙では，もとのユニヴァースの拡大やその内部モデルをとる操作の繰り返しで生成されるユニヴァースのすべてを含む多世界宇宙を考える，という考え方がある一方で，もとのユニヴァースから出発して，通常の強制拡大とその逆操作の繰り返しのみで得られるユニヴァースの多世界宇宙を考える場合もあります．後者は，区別して，**集合強制法多世界宇宙** (set-generic multiverse) と呼ばれることがあります．集合論の拡張の候補となっている公理の中には，上でも触れた MA, PFA, MM, またこれらに上付きの $+$ や $++$ を加えた強化版など，強制拡大に直接言及する原理は少なくないので (実際ここで挙げたような公理は **強制公理** (Forcing Axioms) と呼ばれています)，それらの原理の意味を論ずるには，集合強制法多世界宇宙がそれに相応しい舞台になるわけです．上で触れた Bagaria [1] や，S.F. [2] での強制公理たちの特徴づけも，— これらの論文は，集合強制法多世界宇宙という考え方や用語が確立するより前に書かれたものだったのですが — 現在の視点からは，集合強制法多世界宇宙での特徴づけ，として理解できるものになっています．

集合強制法多世界宇宙をなすユニヴァースの生成で注目されるのは，強制拡大の逆操作です．V を我々の “住んでいる” ユニヴァースとするとき，V は V のある内部モデル W の強制拡大になっている可能性があります．つまり，ある半順序 $\mathbb{P} \in \mathsf{W}$ と W 上のジェネリックフィルター $\mathbb{G} \in \mathsf{V}$ で，我々のユニヴァースが W の強制拡大 $\mathsf{V} = \mathsf{W}[\mathbb{G}]$ として表わされる，という状況が起っている可能性です．このようなとき， W は V の **ground** である，と言います．実は，W が V の ground なら，W は，W に含まれるある集合をパラメタとして V で定義可能で，しかも，この定義式は，どの ground に対しても単一のものをとることができることが知られています．V の強制拡大は，「すべての集合からなるクラス V 」のさらなる拡大

なので，そのようなものの存在は実はフィクションで，このフィクションが矛盾を起こさないために，論理学でのトリックが必要になります．このような事情から，多世界宇宙はおろか，集合強制法多世界宇宙でもその理論を我々の V から生成されるものとして考察することは厳密に言うとできない，という状況が生じてしまっています．このため，例えば，[12] や [13] では，集合強制法多世界宇宙 (のモデル) を，集合論の可算推移的モデルから生成されるもの，として構成しています．

これに対して，grounds は，(存在するなら) それはリアルな集合論的存在です．それらはクラスなので，直接扱うことはできないわけですが，上で言ったような，各 ground W の定義に現れるパラメタで置き換えて考えることができるからです．特にこの置き換えにより，ある (集合またはクラスで添字づけされた) grounds の族を考えることができるようになります．

薄葉季路氏は [14] で，V の grounds の set-many な族の共通部分が再び ground になることを示しました．このことから V のすべての grounds の共通部分 $\overline{\mathsf{W}}$ が ZFC を満たすものになることが証明できるのですが，Usuba [14] と [15] では，十分に大きな巨大基数の存在を仮定すると，このすべての grounds の共通部分 $\overline{\mathsf{W}}$ がふたたび V の ground になることが示されています．前節で，bedrock とかコアと言ったのは，実は，この状況が起っているときの $\overline{\mathsf{W}}$ のことだったのです．V の grounds の研究は，Fuchs, Hamkins, and Reits [8] によって **集合論的地質学** (Set-theoretic Geology) と名付けられています．

筆者は，前節で「強い極大性／飽和性を持つ 4 つの宇宙のタイプ」と言ったもののうちの一つを我々のユニヴァースが満たしているときには (具体的には，S.F., and Usuba [7] や S.F. [5] で the Super-$C^{(\infty)}$-LgLCAA for hyperhuge と呼んだ公理系が V で成り立っているときには)，V の地質学の一部からなる定義可能な族が (実際には記述のできないところの) 集合強制法多世界宇宙の性質をよく反映するものになることを示しています ([5])[5]．この結果が，ゥウディンの理論や，M. Viale の model companionship の研究 (例えば [16] の第 6 章以降を参照) などの，筆者の研究の文脈での新しい解釈につながらないかと夢想しているところです．

4 補筆

『数学セミナー』の掲載では字数制限のため書けなかったことのいくつかを以下で述べておきたいと思います．この節は，折りに触れて書き足してゆく予定です．

---

[5] もう少し具体的には，the Super-$C^{(\infty)}$-LgLCAA for hyperhuge の下で，$\kappa = \aleph_1{}^{\mathsf{V}} = (2^{\aleph_0})^{\mathsf{V}}$ としたとき，

$$\mathcal{MV} := \{V_\kappa{}^{\overline{\mathsf{W}}}[\mathbb{G}] : \mathbb{G} \in \mathsf{V} \text{ はある } \mathbb{P} \in V_\kappa{}^{\overline{\mathsf{W}}} \text{ に対する } (\overline{\mathsf{W}}, \mathbb{P})\text{-generic フィルター}\},$$

とすると，この $\mathcal{MV}$ が “V から生成される集合強制法多世界宇宙” の初等部分構造 (に相当するもの) になることが証明できます．

4.1 巨大基数

先日，竹内外史著の『集合論とは何か』[18] に目を通してみたら，

> さて、これに関してつぎの問題は重要な問題です。このように、到達不能数の存在の公理や、あるいは人によってはZF集合論の無矛盾性の公理のように絶対付け加えたほうがよいという公理を全部付け加えた集合論はどんなものでしょうか？この集合論には測度可能数の存在とか連続体仮説とかの疑わしいものは一切入れないことにしてどうしても正しいと思われるものだけを入れることにします。このような集合論をまず建設してそれについての議論をすることが現在の段階でなすべき一番大切な問題の一つではないかと思います。
>
> ...
>
> 私の意見では測度可能数存在のような正しいかどうか誰も自信のないものに深入りするよりは、正しいことの分かっている強い集合論をつくり上げることの方が堅実なゆき方だと思います。

という条(くだり)に目がとまりました．これは本文で触れた，ゥウディンの

> スコット (Dana Scott) の定理により，$\mathsf{V} = \mathsf{L}$ から可測基数の非存在が証明される．したがって $\mathsf{V} \neq \mathsf{L}$ である

とは対極にある立場，と言うことができるでしょう．[18] の書かれた 1970 年代と，ゥウディンや我々の生きている今のミレニアムでの時代精神の違い，ということもあるとは思いますが，巨大基数は認めるにしても，$\mathsf{V} = \mathsf{L}$ と抵触しない範囲のもの以外は，認めない，ないしは，できるならなしで済ませたい，という立場を固守している人たちも，現代でもいないわけではありません．

特に前世紀では，巨大基数についての，大きな巨大基数を積極的に考察する立場と，そうでない立場の二つの陣営の間で一触即発の気配の感じられる瞬間すらあったように思います．

現在では，これはあまり感じられなくなってきていると思いますが，それは，ひとつには，この間に，大きな巨大基数に関連する研究が非常に進んで，沢山の輝くべき (しかし技術的には極端に難しい) 結果が得られているので，この批判すると，偉大な研究の進展についてゆけていないことを自白しているだけのように見えてしまう，という状況が成立してしまっていることからきている，ということもあるような気がします．

また，似たことは数学のいろいろな場所でよく生じる現象と言えると思うのですが，大きな巨大基数の研究と，小さな巨大基数の研究の間には，不思議なアナロ

ジーが成立していて，大きな巨大基数で知られている現象を小さな巨大基数に翻訳して考えてみることが意味を持つことが少なくないし，その逆も成り立つことが少なくない，ということがあります．小さな巨大基数しか認めない立場ではこのアナロジーを使って二つの巨大基数の世界を行き来することで，創造力の追い風を得る，ということがそもそもできなくなってしまいます．しかも，巨大基数の理論は，証明論での大きな順序数の理論とのアナロジーさえ持っています．

大きな視点で仕事をするときには，何々には深入りしない，というスタンスは，創造的な数学を阻止する方向にしか働かないような気がするし，カントルの精神 (「数学の本質はその自由性にある」[6]) にも反するもの，になってしまっているように思えます．

そうだとしても，本文でも論じたゲーデルのプログラムの文脈では，無矛盾性の強さ (consistency strength) の弱い体系で済ますことができるのだったらそちらの方がよい，という価値観は依然として有効にも思えます．たとえばシェラハは，彼の [17] で，

> What are our criterions for semi-axioms? First of all, having many consequences, rich, deep beautiful theory is important. Second, it is preferable that it is reason-able and “has positive measure”. Third, it is preferred to be sure it leads to no contradiction (so lower consistency strength is better).

と言っています．

これに対し，筆者は，最近の研究で，ZFC の拡張を一般化によってより強い無矛盾性の強さを持つ巨大基数に結びつけられた原理を考えてゆくと，議論が整理されたものになって，見通しのよいものになってゆくことを，何度も観察しています．これは，より強い無矛盾性の強さを持つ，原理や公理に向って進んでゆくことのモティヴェーションを与えてくれる現象と解釈できるようにも思えます．

参考文献

[1] Joan Bagaria, Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness, Archive for Mathematical Logic, Vol.39, (2000), 393–401. 6, 8

[2] Sakaé Fuchino, On potential embedding and versions of Martin’s axiom, Notre Dame Journal of Logic, Vol.33, No.4, (1992), 481–492. 6, 8

[3] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，“ゲーデルと 20 世紀の論理(ロジック)学集合論とプラトニズム”，第 4 巻，東京大学出版会 (2007) に収録. 5

[6] „ ··· denn das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit. “

[4] _____, “コーエンの強制法” と強制法，数理科学，(寄稿), 2014 年 10 月号, No. 616 (2014), 75–83. Postprint: https://fuchino.ddo.jp/misc/cohenx.pdf 5

[5] _____, Two further aspects of Laver-generic Large Cardinal Axioms, 数理解析研究所講究録, (2026), 1–31. この論文の postprint: https://fuchino.ddo.jp/papers/RIMS2025-multiverse-diamond-x.pdf 8, 9

[6] Sakaé Fuchino, Takehiko Gappo, and Francesco Parente, Generic Absoluteness revisited, to appear in Journal of Symbolic Logic. https://fuchino.ddo.jp/papers/generic-absoluteness-revisited-x.pdf https://arxiv.org/abs/2410.15384 6

[7] Sakaé Fuchino, and Toshimichi Usuba, On recurrence axioms, Annals of Pure and Applied Logic, Vol.176, (10), (2025). Postprint: https://fuchino.ddo.jp/papers/recurrence-axioms-x.pdf 8, 9

[8] Gunter Fuchs, Joel David Hamkins, and Jonas Reitz, Set-theoretic geology, Annals of Pure and Applied Logic 166(4), (2015), 464–501. 9

[9] Kurt Gödel, What is Cantor’s Continuum Problem?, American Mathematical Monthly 54, 515–525; errata 55, 151 (1947); Revised and expanded version in: P. Benacerraf and H. Putnam, Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall (1984). 4

[10] Akihiro Kanamori, Historical Remarks on Suslin’s Problem, Kennedy and Roman Kossak, editors, Set Theory, Arithmetic and Foundations of Mathematics: Theorems, Philosophies, Lecture Notes in Logic, volume 36, (2011), 1-12. 4

[11] Kenneth Kunen, Set Theory, College Publications (2011).

[12] John. R. Steel, Gödel’s program, in: J. Kennedy (ed.), Interpreting Gödel: Critical Essays. Cambridge, UK: Cambridge University Press (2014). 9

[13] _____, Generically invariant set theory, in: S. Arbeiter, and J. Kennedy (eds.), The Philosophy of Penelope Maddy, Springer (2024). 7, 9

[14] Toshimichi Usuba, The downward directed grounds hypothesis and very large cardinals, Journal of Mathematical Logic, Vol. 17(2) (2017), 1–24. 9

[15] _____, Extendible cardinals and the mantle, Archive for Mathematical Logic, Vol.58, (2019), 71-75. 9

[16] Matteo Viale, Strong forcing axioms and the continuum problem, Séminaire BOURBAKI, 75e année, 2022 – 2023, no 1207 (2023), https://arxiv.org/abs/2305.07784v2 9

以下の文献は，『数学セミナー』掲載版では触られていなかったものです．

[17] Saharon Shelah, Logical Dreams, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol.40, No.2, (2003), 203–228. 11

[18] 竹内外史，集合論とはなにか はじめて学ぶ人のために，ブルーバックス，講談社，(1976/2001). 10