集合論は矛盾する？！[1]

渕野 昌

数理論理学は，日本では数学の研究分野としてほとんど存在しない，と言ってもそれほど嘘ではないような気がします．この分野の研究者が日本にはいない，ということではありません．逆に，この分野の日本人研究者で，国際的な研究活動をされている方も少なくありません．しかし，それらの研究者のうち，数学の学科にポジションを持っている方は本当に数えるほどしかいません．数理論理学の研究分野のうちでも他の数学の分野との関連性が一番大きいと思われるモデル理論や集合論でさえ，日本の大学の数学系の学部や大学院で，これらの分野の講義が開講されているところは皆無に等しく，学生がこれらの分野に興味を持って勉強を始めたいと思ったときに，適当な指導者を見つけることが難しいことも多いようです．

私自身も，1997 年にドイツから日本に移住して以来，数理論理学の学生を公式に指導できる立場にいません．ドイツに置いてきた私の学生のうちの最後の人がずいぶんと長い時間をかけた末，今年になってようやく長大な修士論文を書き上げたので，これを最後として私の学生は誰もいなくなってしまいました．そんな感慨もあって，先日，早稲田大学の江田勝哉先生と電話で話した折に，つい，『日本での数理論理学の状況を何とかもう少し改善できないものだろうか』，というような愚痴をこぼしてしまいました．

ところが，このとき江田先生のおっしゃったことが，後になってひどく気になりだしてきました．

『数理論理学では，数学自身も数学的対象として扱かう，という立場をとらなくてはならなくなるので，“実在する” 数学の内側で仕事をしている，と感じている一般の数学者とっては，これがひどく不安に思えるのだ．そのため，数学者でない人たちが，その抽象性ゆえに数学をけむたい存在と感じるのと同じように，一般の数学者は数理論理学をうとましく感じることになるのだ.』というのがそのときの江田先生のコメントでした．

たしかに，数学を客体視するという立場から議論を押し進めると，スコー

[1]『数学セミナー』 2002 年 2 月号，52–56 掲載． ただし，本稿は『数学セミナー』掲載予定のテキストからは削除されたリマークや，その後の補筆を，幾つか含むものとなっている．

レムのパラドックス[2] や不完全性定理[3] など，"実存論的" 数学観からは病的としか思えないような現象が，次々と現れてきます．

数理論理学では，これらの一見病的とも見える現象を逆手にとり，そのような現象を発生させる論理のメカニズムを数学的手法として用いることで，近年，次々とめざましい成果をあげてきました．しかしそのために，この分野での議論は，矛盾すれすれの「論理のアクロバット」の感を提するものになることも，多いのです．

さきほど，日本では数学の学生が数理論理学の指導者を得ることが難しい，と書きましたが，まさに，この「論理のアクロバット」的性格のために，適当なアドバイザーなしに，独学で数理論理学の研究の前線にまで到達することは，不可能でないとしても，非常に難しいのではないかと思うのです．

特に公理的集合論では，集合論の体系のさまざまな拡張について，それらの拡張の無矛盾性を考察する，ということが現代的な研究の中心的なテーマの一つになるため，集合論の体系の内側と，この体系を外側から眺める視点（超数学）の間を頻繁に往復しながら議論をする必要がでてきます．さらに，集合論のモデルを集合論の体系の中で構成して議論する場合には，集合論の体系の内側で異なるモデルの間を行き来し，かつその議論と超数学的視点からの議論がからみあう，という構図ができあがることになります．

こういうことを書きつらねてゆくと，読者の数理論理学に対する恐怖心をますますあおりたてる結果になってしまうかもしれません．しかし，ここではむしろ，恐いものついでに，この文章のタイトルで予告した，集合論の矛盾証明について話してみようと思います．

もちろん，ここで話すことになる集合論の矛盾証明（集合論が矛盾している，ということの証明）は正しい証明ではありません[4]．しかし，この証明のどこが間違っているのかを見抜くのはそれほど簡単なことではないと思い

[2]「集合論では非可算無限集合の存在が証明できるのに，集合論が理論として矛盾しないなら，集合論の可算モデルが作れてしまう」という現象．じつは，これはパラドックスではないのですが，なぜこれがパラドックスでないかについては，後に述べることを参考にして考えてみてください．

[3]「自然数論を含む確定的に与えられた任意の公理系 T に対し，T が矛盾しないなら，T から証明できないし否定も証明できないような命題が必ず存在する．」（第一不完全性定理）という定理．特に集合論とその任意の具体的な拡張に対してこのことが成り立つ．第二不完全性定理については次の脚注をごらんください．

[4]ゲーデルの第二不完全性定理により，集合論 — あるいはその部分体系とみることのできる全数学 — が矛盾していないことは普通の数学的議論によって証明することはできません．これは懐疑的な言い方をすると，数学は「矛盾することが発見されるまで，矛盾しないかもしれない，という小康状態をたもっているにすぎない」ということのようにも見えます．しかし，3000 年にわたる数学の歴史の中での数学の健全な発展を当事者として実感している人達の中で，数学の無矛盾性を疑う人は誰もいない，と断言していいだろうと思います．

ます．この証明の間違いを見極めることができるためには,「集合論の体系の内側と，この体系を外側から眺める視点（超数学）の間を頻繁に往復しながら議論をする」ということの正しい認識が必要になります.

1　公理的集合論入門

集合論が矛盾しているかどうか，という議論をするためには，そもそも集合論とはどのような理論体系だったのかをはっきりさせておく必要があります. そこで，まず公理的集合論の体系の要点を簡単に解説しておこうと思います.

以下で述べる公理系は，ツェルメロ (Ernst Zermelo, 1871–1953) により定式化され，フレンケル (Abraham Fraenkel, 1891–1965) によりさらに拡張されて得られた体系であるため，この二人の名前の頭文字をとって ZF（英語読みでは "zi:ef"）と呼ばれているものです．現代数学を展開するためには, はさらに選択公理 (Axiom of Choice) と呼ばれる公理を ZF に付け加えた体系 ZFC を考えることが必要になります.

まず，公理的集合論では，考察の対象はすべて集合である，と考えます. したがって，以下で，"ある x について ..." と言ったときには "ある集合 x について ..." という意味です．２つの集合 a, b に対して "a が b の要素である" という関係が基本的な述語として用意されていて，この関係を "$a \in b$" または "$b \ni a$" とあらわすことにします．"a は b の要素でない" は $a \notin b$ であらわすことにします．$a \in b$ のとき a は b の元（げん）である，という言い方もすることにします.

集合論の公理系の一番最初の公理は，集合はその要素により一意に決まることを主張するものです：

（外延性公理）　任意の x, y に対し，すべての z で，$z \in x$ と $z \in y$ が同値になるとき，$x = y$ が成り立つ.

ZF の他の公理は，すべて,「集合 $x_1, x_2, \ldots$ が与えられたとき，これらから ... という性質を持つ集合を作ることができる」というタイプの主張（存在公理）となっています.

（空集合公理）　要素を一つも持たないような集合が存在する.

外延性公理により，要素を一つも持たない集合は存在すれば一意であることがわかります．つまり，x と y を両方とも要素を一つも持たない集合とすると，$x = y$ が帰結できます．このように一意に決まるところの，要素を一つも持たないような集合を $\emptyset$ で表すことにします.

（対の公理）　任意の x と y に対し，x と y だけを要素として持つような z が存在する．

対の公理でその存在の保証された（これも外延性の公理により一意に決まるところの）集合 z を $\{x, y\}$ とあらわすことにします．特に $x = y$ のときには，これを $\{x\}$ と書いて，singleton x と呼びます（singleton はカードゲームで組みものになっていない単独の札をあらわす言葉です）．$\{x\}$ は x のみを要素として持つ集合です．

（和集合の公理）　任意の x に対し，y で z が y の元であることと，ある $u \in x$ が存在して $z \in u$ となることが同値になるようなものが存在する．

上の公理は x を集合族と見てその和集合をとったものとなっています．特に，$x = \{v, w\}$ のときには，上の公理での y は v と w の普通の意味での和集合 $v \cup w$ となります．

次の分出公理と後出の置換公理を正確に述べるためには，数理論理学による集合論の形式的な定式化が必要となります．分出公理は，一つの公理ではなく，公理群とでも呼ぶべきもので，述語記号 $\in$ と変数記号のみを用いて論理記号の組合せにより表現できる命題 $\varphi(x, x_1, \ldots x_n)$ （このような命題のことを ZF の論理式とよぶことにします）の一つ一つについて以下のような公理 (分出公理)$_\varphi$ を集合論の公理系に含まれる公理として採用します：

（分出公理）$_\varphi$　$x_1, \ldots, x_n$ を固定するとき，任意の x に対し，x の元 z で $\varphi(z, x_1, \ldots x_n)$ を満たすようなものの全体からなる集合 y が存在する．

上のような y は $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \ldots x_n)\}$ ともあらわされます．

無限集合を積極的に考えることが，集合論の大きな特徴の一つですが，そもそも無限集合が存在する，ということを保証しておく必要があります．次の公理はそのようなものになっています：

（無限公理）　集合 x で空集合を元として含み，すべての $y \in x$ に対し，$y \cup \{y\} \in x$ となるようなものが存在する．

上のような集合 x は，仮定により $\emptyset \in x$ ですから，$\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$, $\ldots$ となり，x は無限個の元を含むことがわかります．集合論では，自然数 $0, 1, 2, \ldots$ を，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\ldots$ のこととして導入するので，無限公理で

存在の保証された集合 x は $0, 1, 2, \ldots$ のすべてを含むものとなっています．したがって，このような x と分出公理を用いると，自然数の全体からなる集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ の存在が証明できることになります．

集合 x が集合 y の部分集合であるとは，すべての z に対し，$z \in x$ なら $z \in y$ が成り立つこととします．たとえば，分出公理での $y = \{z \in x : \varphi(z, x_1, \ldots x_n)\}$ は x の部分集合であることが分かります．

（べき集合の公理）　任意の x に対し，そのべき集合が存在する．つまり，集合 y で，すべての z に対し $z \in y \leftrightarrow z \subseteq x$ となるようなものが存在する．

集合 x のべき集合を $\mathcal{P}(x)$ とあらわします．先ほど自然数の全体 $\mathbb{N}$ が集合としてとらえられることを述べましたが，たとえば，$\mathbb{N}$ の部分集合を実数の二進表示と対応づけて考えることにより，上の公理でその存在の保証された集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ から，実数の全体の集合を，ここでの公理的集合論の枠組の中で構成することができることになります．

ここでは詳しく述べる余裕はありませんが，対の公理を応用して順序対の概念を導入することができ，これとべき集合の公理および分出公理を用いて集合の直積を導入できます．写像はそのグラフのことだと思って定義域と値域の直積集合の部分集合として導入することができます．このような解釈をすることで，我々が普通に出会う数学的対象は，すべて公理的集合論の枠組の中で扱えるようになります．

念のため言っておくと，ZF で前記のようにして構成した $\mathbb{N}$ は，（たとえばペアノが定式化したような）自然数の全体の満たすべき性質を，すべて満たすものになっていることを示すことができます．$\mathbb{N}$ の作りかたから $n \in \mathbb{N}$ に対し，$n+1$ を $n \cup \{n\}$ で定義するとよいことがわかります．次は自然数上の関数の帰納的定義に関する定理の特殊な形となっています：

定理 1　（関数の帰納的定義）$\varphi(x, y, \vec{z})$ を ZF の論理式で，“すべての x に対し，$\varphi(x, y, \vec{z})$ となるような y が一意に存在する” という命題が ZF で証明できるようなものとする．n_0 を任意の自然数とする．このとき $\mathbb{N}$ 上の関数で，

$f(0) = n_0$;

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n+1)$ は $\varphi(f(n), y, \vec{z})$ を満たすような y となる

を満たすような f が一意に存在することを ZF で証明することができる．

分出公理と同じように次の置換公理も，ZF の論理式 $\varphi(x, y, z, x_1, \ldots x_n)$ 一つ一つに対する命題 (置換公理)$_\varphi$ を集めてできる公理群になっています：

（置換公理）$_\varphi$　すべての集合 A と，c_1, ..., c_n に対し，任意の $a \in A$ をとったときに，$\varphi(a, b, A, c_1, \ldots, c_n)$ となるような b が一意に決まるなら，集合 C で，すべての $a \in A$ に対し $\varphi(a, b, A, c_1, \ldots, c_n)$ となる $b \in C$ が見つかるようなものが存在する．

置換公理は，これまでの他の公理と違い，通常の数学の議論では用いられることが少ない公理です．古典的な数学にこの公理が必要となることはない，と断言してもよいくらいだと思います．

次の基礎の公理と呼ばれるものも，通常の数学の議論では用いられる機会の少ないものです：

（基礎の公理）　空集合でない任意の集合 x に対し，$y \in x$ で，どんな $z \in x$ をとってきても $z \in y$ とならないようなものが存在する．

基礎の公理から，すべての集合 x に対し $x \in x$ とはならないことがわかります．また，集合の列 x_0, x_1, x_2, ... で，$x_n \ni x_{n+1}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つなら，$x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ とすると，x は基礎の公理の反例になってしまうことがわかります．つまり，基礎の公理のもとではこのような集合列は存在しません．

基礎の公理は技術的な理由で付け加えられた公理と言えますが，この公理を集合論の公理系に加えることの妥当性は，(1) $x \cup \mathcal{P}(x) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \cup \cdots$ の任意の部分集合が基礎の公理での性質を満たすような集合 x の全体が基礎の公理を含む集合論の公理系を満たすものになること — 特にこのことから，ZF から基礎の公理を除いたものが矛盾しないなら，（基礎の公理も含む）ZF も矛盾しないことがわかる；(2) $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ... など集合論の枠組の中で通常の数学を展開するのに必要となる集合は，すべて (1) のような性質を持つものになっていること；(3) 基礎の公理での性質を満たさない集合の存在を保証する公理を集合論の他の公理に付け加えても (1) の性質を持つ集合に関しては何ら新しい結論が得られない（つまりこのような拡張された公理系は集合論の公理系の一種の保守拡大になっている）こと，により保証されている，と考えることができます．

2　集合論の矛盾証明 その１

この節と以下の節で，集合論が矛盾することを示す証明を２つあげます．もちろんこれらの証明は両方とも間違っています．どこが間違っているのか，まず解説を読まずに自分で考えてみてください．

以下の議論のために，まず次の定理を復習しておきます．

定理 2 （述語論理のコンパクト性） T をある公理系とする．このとき，T の任意の有限個の公理がたがいに矛盾しないなら，T 自身も矛盾しない．

証明． 背理法で証明する．T が矛盾すると仮定する．つまり，T を前提とした証明で，ある命題 φ とその否定 $\neg\varphi$ の両方が証明できてしまったとする．このとき，φ の証明も $\neg\varphi$ の証明も紙に書きだしてしまうと，T に含まれる公理のうち有限個のものしか使っていないことが確かめられるから，それらの有限個の公理から矛盾が証明されることになってしまう． **（証明終）**

この定理（この定理もその証明も正しいものです！念のため）を使って集合論が矛盾することの（一見正しい）証明を次のように行うことができます：

集合論の矛盾証明： $\tilde{T}$ を ZF に，次の公理系を付け足して得られる理論とする：

$$(*)_n \qquad c_n \ni c_{n+1}$$

ここに，n はすべての自然数を動き，各 c_n はそれぞれ互いに異なる定数記号であるとする．

補題 3 ZF が矛盾しないなら，$\tilde{T}$ も矛盾しない．

証明． ZF が矛盾しないと仮定する．定理 2 により，$\tilde{T}$ の任意の有限部分集合が矛盾しないことを示せば証明が完了する．

T' を $\tilde{T}$ の有限部分集合とすると，十分に大きな自然数 n をとって，T' が ZF と $c_0 \ni c_1$, $c_1 \ni c_2$, $\ldots$, $c_{n-1} \ni c_n$ を合せたもの（これを T^* とよぶことにする）に含まれるようにできる．このとき，T^* は，$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ をそれぞれ，

$$\underbrace{\{\{\cdots\{}_{n\text{ 個}}\emptyset\underbrace{\}\cdots\}\}}_{n\text{ 個}},\ \underbrace{\{\{\cdots\{}_{n-1\text{ 個}}\emptyset\underbrace{\}\cdots\}\}}_{n-1\text{ 個}}, \ldots,\ \{\emptyset\},\ \emptyset$$

とすることで ZF で解釈できる．したがって，ZF は矛盾しないという仮定から，T^* も矛盾しないことがわかり，その部分集合の T' も矛盾しないことが帰結できる． **（証明終）**

$\tilde{T}$ で $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ を考えると，この集合は，基礎の公理と矛盾する．しかし $\tilde{T}$ は基礎の公理を含んでいるのだったから，$\tilde{T}$ は矛盾する．したがって，補題 3 から，ZF も矛盾することが帰結される！

3　矛盾証明の間違い — もう一つの矛盾証明

さて上の議論はどこが間違っているのでしょうか？

実は，この矛盾証明はあるひとつの点を除くと正しい証明となっています．その点とは，“$\tilde{T}$ で $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ を考えると” というくだりです．$\tilde{T}$ で ZF に付加された公理系により，$c_0, c_1, \ldots$ という集合はそれぞれ $\tilde{T}$ の枠内で扱えるわけですが，よく考えてみると $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ という集合の存在は $\tilde{T}$ で保証されていません．対応 $i \mapsto c_i$, $i \in \mathbb{N}$ は ZF のもともとの言語での論理式で記述されているわけではないので，置換公理や分出公理の適用範囲外にあるからです．

しかし，上の矛盾証明をさらに改良して，次のような証明を考えることができます：

集合論の矛盾証明（その 2）： $\bar{T}$ を ZF に，次の公理系を付け足して得られる公理系とする：

$$(**)_n \qquad c_n = \{c_{n+1}\}$$

前と同じように，n はすべての自然数を動き，各 c_n はそれぞれ互いに異なる定数記号であるとする．

補題 4 ZF が矛盾しないなら，$\bar{T}$ も矛盾しない．

補題 4 の証明は，コンパクト性定理を用いて補題 3 でと同様に行なえる．

補題 4 と，前出の関数の帰納的定義の可能性を用いて，

$$\begin{aligned} &f(0) = c_0; \\ &f(n+1) = \text{「}f(n) = \{c\} \text{ となるような } c \\ &\qquad\qquad\qquad \text{— または，このようなものがなければ } c_0\text{」} \end{aligned}$$

として，関数 f が定義できる．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n) = c_n$ となることが，$\bar{T}$ の公理 “$c_n = \{c_{n+1}\}$”, $n \in \mathbb{N}$ により示せる．

f が存在することから f の値域も集合として存在するが，上のことにより，「x が f の値域の元ならば，x は singleton で，$x = \{y\}$ とすれば，y も f の値域の元である」という命題が成り立つ．したがって，この集合は基礎の公理の反例となってしまうが，これは矛盾である．

4　二番目の矛盾証明の間違い

二番目の矛盾証明の間違いは，一番目のものよりさらに微妙で見つけにくいものになっていると思います．

結論を言ってしまうと，この証明の問題点は，“$(**)_n, n \in \mathbb{N}$” での $\mathbb{N}$ が集合論の外側での我々が直観的に考えている $\mathbb{N}$ であるのに対して，矛盾証明での $\mathbb{N}$ は，ZF の内側で存在することの保証された集合であり，同一のものではないのに，それらを同一視してしまっているところにあります．もう少し具体的に言うと，自然数 n を一つとってきたときには，これに対しては，“$f(n) = c_n$” が $\bar{T}$ で証明できるのですが，

$$\text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対し，} f(n) = c_n \text{ となる}$$

という命題は $\bar{T}$ で証明することができていないことがわかります．$c_n, n \in \mathbb{N}$ と言ったときの “$\mathbb{N}$” はさきほど言ったように，集合論の外側の直観的な意味での自然数の全体でした．そのため，“すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$f(n) = c_n$ となる” という命題は ZF で証明できないのです．さらに，よく考えてみると，対応 $i \mapsto c_i$ は ZF の中で集合として与えられているわけではないので，この命題自身 ZF の論理式としてうまく定式化できないこともわかります．したがって，「x が f の値域の元ならば，x は singleton で，$x = \{y\}$ とすれば，y も f の値域の元である」，という主張は根拠を失ってしまい，ここで証明が破綻していることがわかります．

＊　＊　＊

さて，以上のような例を見て，あなたは「集合論はなかなかは面白そうだ」と思ったでしょうか，それとも，「だから言ったことはない．数理論理学なんかにかかわらない方が無難だ」と思ったでしょうか？

（ふちの さかえ／中部大学 ［工学部／教養教育部］）*

* この所属は，この記事の発表された当時のものです．