『無限のスーパーレッスン』の hyper-critique

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2021 年 04 月 20 日 (21:04 JST)
── この原稿の初版の upload: 2014 年 12 月 23 日

以下に書くのは，**木村俊一著: 『無限のスーパーレッスン』，講談社 (2007)**[註 1] からの複数の引用 ── 主にこの本の後半部分からの引用です ── と，それに対する (批判的) 解説です．このテキストは，主に本書の著者である木村俊一さん自身に読んでいただくことを目標として書いていますが，本書を後半まで読み進んだ読者への注意，といった感じのものにもなることも意識しています．

論理学や集合論を独学で勉強したときに陥る可能性のある誤解についての例文集とその解題として読んでいただくこともできると思います[註 2]．

私がここで書こうとしていることは,「物事を本当に分る」ということと,「分った気になる」，または「面白おかしく茶化してごまかす」，などとの間の区別のつかない (つまり，区別をつける能力のない[註 3]) 人には，いずれにしても無用のコメ

[註 1] 以下では「本書」と言ったときにはこの本のことを指すことにします．これに対して,「本テキスト」あるいは「このテキスト」,「この文章」etc. はあなたが今読んでいるこの文章です．また,「著者」あるいは「本書の著者」は木村俊一さんで,「私」,「本テキストの筆者」は渕野です．

[註 2] [**2018 年 09 月 15 日 (15:16 JST) の付記**]: 実際，あなたが今読んでいるこの文章は，論理学や集合論の普通とは少し異なる角度からの入門の副読本のようなものになりうることも頭に置いて書いていたのですが，愛知東邦大学の成田良一氏は，まさにそのような文章として本テキストを精読され，多くの誤植の指摘をしていただいきました．このことに感謝します．

[註 3] 犬を「言葉が話せないのは怠慢だ」と言って責めたら動物虐待になってしまうでしょう．むしろ，犬は優しく犬扱いをしてあげるべきだと思っています．だからといって犬に指を噛み切られたとしても平気でいられるかどうかというのはちょっと別のような気もしますが⋯．ちなみに，私は (寓意でなくて本物の) 犬たちとはちゃんとコミュニケーションがとれます．大抵の場合，彼等に犬の好きな人間として認識されて敬意のこもった関係が構築できますし，彼等がじゃれて噛んでいるのか本気で噛もうとしているのるかの区別も正確につくと思います．

ントでしかないでしょう[註4]．しかし，『無限のスーパーレッスン』を読んで「やはり数学での無限の議論というのはかなり怪しいものなのではないか」，という嫌疑を抱いてしまった人には，その感想は本書が読者に与えることを企てている幻想に過ぎない，ということをぜひ判っていただきたいと思うのです．

あなたが今読んでいるこの文章は，読者としては普通に数学の素養のある人を想定して書かれていますが[註5]，逆に，普通に数学の素養のある人に対してとすると，ちょっとくどすぎる説明になっているところもあるかもしれません．しかし，これは，なにしろ以下で引用することになるようなディテイルを含む本を書いて出

[註4] 本書の著者の木村俊一さんがまさにそのような人で，そもそもがんばって人間扱いをする必要はない，ということなら (もちろん，これは，ヨーロッパの言葉で書くとすると，仮定法で書かれているはずの文章です)，こんな文章を書く必要はなくなって，後は，彼が数学者の肩書きを持っていることや出版社を非難すればいいだけになり，私としては，よほど気が楽になる，ということになる，と言えるのかもしれませんが．

[**2021 年 04 月 20 日 (21:04 JST) の付記**]: その後，木村さんも出版社も，この本に対するアクションを何もを起していないようです．木村さん自身は私のこの批判を御存知のようなので，このアクションの不在には，かなりたちの悪い悪意を感じます．

[註5] これに対し，本書 (『無限のスーパーレッスン』) が想定している読者は，多分，「数学は門外漢、という人」 (本書, p.4) です．だから，もし，『無限のスーパーレッスン』の “本来の読者” が，以下の文を眺めて「なんだか分らないことが書いてある」という不満を持ったとしても，それは私の責任範囲外のことです．ただし，「数学の素養のある人」というのは別に数学を大学で専門的に勉強した人である必要はなくて，中学生でも高校生でも，学校で教わる数学に疑問を持って自分で考えてみる余裕のある人 (でもこう言うと，日本の場合，どこにそんな中学生や高校生がいるの，という突っ込みを入れられてしまうかもしれませんが) だったら，ちょっと背伸びをすれば読める，という程度の書き方になっていると思います．

版までしちゃった人のための説明なので[註 6]，念を入れて細かいことまで説明する必要があるだろうと思って書いているからです．

この文章はまだ執筆途中です．この文章の最新版は:

https://fuchino.ddo.jp/misc/superlesson.pdf

でダウンロードできます．

書き始めてみたところ，かなり長い文章になりそうで，書きあがるまで発表しないことにすると読者の目に触れるのがずっと後になってしまいそうなので，区切のいいところまで書き進んだところで，その都度上の URL のファイルを更新しようと思っています．すでに upload した部分についても，次の更新で更に変更／改良する可能性もあります．内容に関する質問やコメント，批判などがあればぜひお寄せください．テキストの改良の際にできる限り対応したいと思います．

このテキストは，これを書き始めたころ，私の神戸大学での若い同僚だった池上大祐氏や薄葉季路氏をはじめ，何人かの方に精読していただき，彼等の指摘も反映させて細部を何度も書き直しています．特に，その意味で，以下に書いたことのうち，少なくとも数学的な内容については，客観的に正しさが十分に保証できるものになっていると思います．

[註 6] 木村さんの本では，会話が「大阪府枚方市近辺の方言」(本書 p.245 脚注) で書かれている，というそのこと自体は大いに興味深いものです．ただし，以下で論じることになる，本書の数学的あるいは数学思想的な問題点 (あるいは数学思想に関してはその欠落) を考えると，本書はむしろ「大阪府枚方市近辺の方言」がその話者に供する嗜好空間の問題点を示唆するものになっている，という読み方も成立してしまうかもしれません．勿論どの言語も様々な長所や短所，またそれらを越えた歴史的な存在理由を持っているわけでしょうが，科学[註 7] に適さない言語というのはあるように思えます．

ちなみに，私自身の日本語は東京の山の手の言葉で，これに加えて，小学校のときのクラスに東京の下町の言葉の話者が少なくなかったことから，「なんちゃって下町言葉」も地の口語に混ったものになっているのではないかと思います —— 例えば「ひ」と「し」の混乱が多少あります．ここで意識的に書いている「…しちゃった」という表現を「…をしでかしてしまった」という意味に使う，というのは東京の下町言葉のようで，この表現が典型的な下町言葉の表現の一つとして認識されるようになったのは割合最近 (昭和初期ごろか？) なのではないかと思われます．例えば，戦後の小津映画で，若者が，若者ことばとして，この表現を使うシーンがいくつかあります．また，東京に出てきた上州の田舎者だった萩原朔太郎は，この表現のパロディーを「郵便局の窓口で／僕は故郷への手紙を書いた／鴉のように零落して／靴も運命もすり切れちゃった」という 1920 年代後半に書かれた詩句に書き記しています．

[註 7] ここで言っているのは「科学技術」というときの技術の添えものとしての「科学」ではなく，人文科学も含めた広義の科学です．[註 4] の付記にも書いたように，木村さんがその後，本書を訂正するとか，(版木を割って) 絶版にする，というようなアクションをとっていないので，本書の存在が，「大阪府枚方市近辺の方言」がまさに数学の議論をするのに適さない言語である，という証明の一つとなっている，という解釈も可能であるように思えます．

そうは言っても，勿論このテキストは本書に対する最終的な価値判断を読者に強要するものではありません．特に，数学的な結果のとらえ方や解釈の仕方について述べている部分については，ここで書くことは，数学のこの分野を研究している研究者の多くの人たちの視点からの物の見方を反映しているものになっているとは思っていますが，他の捉え方も可能かもしれません．また，フェアネスのために，ここで，私が内容に問題のある文章として引用した部分だけを読んだときの印象は，本全体を読んだときに受ける印象とは異る可能性もある，ということにも注意しておきたいと思います．

目次

1　選択公理と超限帰納法

ZFC 集合論の公理系の一部

⋮

8 [選択公理] 超限帰納法を使ってよい (つまり、ある集合が超限帰納法によって作れるならば、その集合が存在する)

(無限のスーパーレッスン，p.164)

これは，網掛けの囲み記事になっているので，この本で論じられていることについての正しい知識を持った人が本書をぱらぱらとめくったときにまず目にとまることになる「衝撃の内容」の 1 つだと思います．

選択公理のもともとの主張は,

(1)　空集合を含まない任意の集合族 $\{X_i : i \in I\}$ に対し，I 上の関数 f で各 $i \in I$ に対し，$f(i) \in X_i$ となるようなものが存在する

というものです[註 8]．内容的には (1) と同じ主張が，もう少し集合論特有の記号法を伴って，本書の「解説編」の p.237 にも「選択公理」として書かれていて，そこには,

以下の記述には『数学のロジックと集合論』田中一之・鈴木登志雄 (培風館) を参考にした。

(無限のスーパーレッスン，p.237)

という註釈も見えます．

集合論の他の公理の仮定のもとでは，(1) の意味での選択公理は,

(2)　すべての集合の上に整列順序が存在する[註 9]

[註 8] (1) でのような f は，集合族 $\{X_i : i \in I\}$ に対する選択関数とよばれます．

[註 9] ある集合 X 上の二項関係 R が X の整列順序であるとは，R は全順序 (線形順序とも言う[註 10]) で，空でないすべての X の部分集合 Y に対し，Y の R に関する最小元が存在することを言います．たとえば，自然数の全体 $\mathbb{N}$ の上の通常の大小関係は整列順序ですが $\mathbb{Q}$ 上の通常の大小関係は (全順序ではありますが) 整列順序ではありません．ある集合 X 上に整列順序が存在することを,「X は整列可能である」とも言うことにします．たとえば，有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は，可算[註 11] であることが (選択公理なしで) 証明できるので，整列可能です．これに対し，実数の全体 $\mathbb{R}$ が，整列可能であることは，選択公理 (あるいは少なくとも何らかの，選択公理を弱めた公理) の仮定しないなしでは示すことができません．実際，“$\mathbb{R}$ は整列可能である” という主張自身が，弱い選択公理のヴァリアントの一つとして考えられることさえあります．

という命題と同値になることが知られています[註 12]．　このことと，

(3)　　整列順序の上では超限帰納法の議論や超限帰納法による再帰的定義が可能

[註 10] X 上の順序関係 R が全順序または線形順序であるとは，すべての異る $x, y \in X$ に対し，$x\,R\,y$ か $y\,R\,x$ のどちらか片方が必ず成り立つことです．

[註 11] 集合 X が可算とは，X から $\mathbb{N}$ への 1 対 1 写像が存在することを言います．X が空集合でないときには，これは，$\mathbb{N}$ から X の上への写像が存在することと同値です．X が有限でない，つまり，どの $n \in \mathbb{N}$ に対しても，集合 $\{0, ..., n-1\}$ から X の上への写像が存在しないときには，X が可算であることは，$\mathbb{N}$ から X への全単射が存在することと同値になります (これらのことはすべて選択公理を仮定せずに示せます)．$\mathbb{N}$ 上の標準的な大小関係は整列順序なので，可算集合上には，この整列順序 (の部分) をコピーできることから，すべての可算集合は整列可能です．

[註 12] (2) から (1) が導けることは容易に証明できます:　空集合を含まない任意の集合族 $\{X_i : i \in I\}$ に対し，$\bigcup_{i\in I} X_i$ 上の整列順序 $\sqsubseteq$ をとると，各 X_i に，X_i の $\sqsubseteq$ に関する最小元を対応させる関数を選択関数としてとることができるからです．

逆方向の証明はもうすこし難しいものになります (特に順序数上の関数の再帰的定義が可能であることの知識が必要になります) が，次のように要約できます: 集合 X が与えられたとき，X が空集合なら，空集合が X の上の整列順序になっているからよい．そうでないときは，$Y = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ として，Y を集合族と見て Y 上の選択関数 f をとる．このとき，a を X に含まれない集合として，すべての順序数の全体 On から X への (クラス) 関数 F を，$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$X \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ が空でないときには，$F(\alpha) = f(X \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\})$, $X \setminus \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ が空のときは $F(\alpha) = a$ とすると，すべての $x \in X$ に対し，$F^{-1}(x)$ が一意に定まるが，$x, y \in X$ に対し，$x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$ とすると，$\sqsubseteq$ は X 上の整列順序になる．[註 13]

[註 13] [註 12] で与えた「逆方向」の証明のスケッチは，ツェルメロ=フレンケル集合論で展開できる超限順序数の理論のマシナリーに依存するものですが，この同値性証明はツェルメロ=フレンケル集合論 (ZF) よりずっと弱いけれど旧来の数学の殆ど全てがそこで展開できることの知られているツェルメロ集合論 (Z) —— ZF から置換公理 (と正則性公理) を除いたもの —— でも超限順序数を経由せずに直接証明することができます (順方向の証明については，ここで与えた証明が既ににツェルメロ集合論でのものになっています)．この直接証明は素手でちゃんとやると結構長くになります．私は大昔日本で学部生だったころ，松坂和夫著『集合・位相入門』にぐちゃぐちゃ書いてあった，このツェルメロのもとの証明の写しのようなものを読んでよく分らなかった記憶があります．[註 14]

因みに，定理 1 の証明でも超限順序数が用いられていますが，現代の意味での ω_1 の存在もツェルメロの集合論では証明できないので (これが Z で証明できない，ということが ZF の無矛盾性を仮定すると簡単に証明できます)，ここで述べた証明をツェルメロの集合論で実行するためには，ここで順序数と言っているものを整列順序の順序型で置き換えた証明で置き換える必要があります (実際には更に証明の細部をいくつか書き直す必要もあります)．

[註 14] 実は，この，松坂和夫著『集合・位相入門』の記憶があったために，この同値性の証明は，Z でやったときには，ぐちゃぐちゃした分りにくい議論をしなくてはならなくなる，と思い込んでいたのですが，最近 (2019 年 4 月) 大学院の講義でこの Z での同値性について話す必要があって，自分で証明を再現してみたところ，すっきりした素直な長くない証明を与えることができることが分かって大変びっくりしました．分野の専門家でない人が教科書を書くことのメリットやデメリット

である

という事実をごっちゃにして，上の 「超限帰納法を使ってよい」が出てきたのではないかと想像しますが，これについては，実際のところどういう誤解のプロセスを経てこういうことになってしまったのかをぜひ御本人に聞いて確かめてみたいものです．

超限帰納法自身は，選択公理とは無関係に成立します．例えば，拙著 [9] の第 2 章をごらんください．

実際，超限帰納法の応用では，選択公理が用いられることが多いのですが，選択公理を仮定しない超限帰納法の重要な応用も少なくありません．たとえば，おそらく超限帰納法の歴史上最初の応用例であるカントル・ベンディクソンの定理の証明では[註 15]，選択公理は必要になりません:

定理 1 (Cantor, Bendixson) 任意の閉集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対し，可算集合 $C \subseteq A$ が存在して，$A \setminus C$ は完全集合となる[註 16]．

以下で，この定理の証明では超限帰納法が本質的に使われているけれど，選択公理は全く使わずに証明が遂行できる，ということを検証してみようと思います．まず，定理の証明を自然なやり方で記述して，その後で，選択公理が用いられているように見えるいくつかの場所[註 17] で，なぜ選択公理が必要ないのかを説明する

という本稿の主題の一つとも関連すると思うのですが，この松坂という人 (多分，当時のスタンダードで考えても集合論や集合論の応用の専門家ではなかった人だと思います) の書いた教科書は，少なくとも私には長年にわたって大きな害を及ぼしていた，と言うことができると思います．なお，私の講義での Z での選択公理の同値命題の証明は， [15] に書いてあります．

選択公理の，整列定理 (2) やツォルンの補題，また後出のカントルの三分律との同値性は，Z で証明できます．しかし，選択公理と同値であることの知られている他の命題では，同値性の証明が ZF 上でなされているものも少なくありません．これらについては，Z 上で同値性の証明ができるかどうかは，ほとんど分っていないのではないかと思います．

[註 15] カントルがこの定理をきっかけに超限順序数や超限帰納法による証明の祖型を導入したのは，1880 年代の初め (明治の 10 年代くらい) のことです (たとえば [4] を参照)．

[註 16] $O \subseteq \mathbb{R}$ が開集合であるとは，すべての $x \in O$ に対して，開区間 I で $x \in I \subseteq O$ となるものが存在することです．$A \subseteq \mathbb{R}$ が閉集合とは $\mathbb{R} \setminus A$ が開集合となること．$X \subseteq \mathbb{R}$ で，$x \in X$ のとき，x が X の孤立点であるとは，開区間 I で，$X \cap I = \{x\}$ となるものが存在すること．$B \subseteq \mathbb{R}$ が完全集合であるとは，B は閉集合で孤立点を持たないことです．空でない完全集合は連続体のサイズを持つことが容易に示せるので，カントル・ベンディクソンの定理 (とカントル・ベルンシュタインの定理) から，すべての非可算な閉集合は連続体濃度を持つことがわかります．

[註 17] 以下で “**選んで ①**”, “**選べる ②**” と太文字で書いてあるところはそのまま読むと選択公理が必要になっているように見えます．また，“**可算集合の可算和だから，可算である ③**” という主張も，この一般的な形で示すには，(少なくとも弱い形の) 選択公理が不可欠であることが知られていま

ことにします.

定理 1 の証明: A が可算なら,定理は自明なので ($C = A$ とすればよい),A は非可算とする.$\alpha < \omega_1$ に対して[註 19],A_α を超限帰納法により,次のように定義する:

(4) $A_0 = A$;

(5) $A_{\alpha+1} = A_\alpha \setminus D_\alpha$, ただし,$D_\alpha = \{x \in A_\alpha : x$ は A_α の孤立点$\}$ とする;

(6) $\gamma < \omega_1$ が極限のときには,$A_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ とする.

このとき,

Claim 1.1 各 $\alpha < \omega_1$ に対し,A_α は閉集合である.

$\vdash$ $\alpha < \omega_1$ に関する超限帰納法によりよい: A_α が閉集合のときには,D_α の定義から,

$$\begin{aligned} A_{\alpha+1} = A_\alpha \ \setminus \ \bigcup\{O : O \subseteq \mathbb{R} \text{ は開区間}, \\ A_\alpha \cap O \text{ は高々 } 1 \text{ つの要素しか持たない}\} \end{aligned}$$

となっているので[註 20],$A_{\alpha+1}$ も (“閉集合 $\setminus$ 開集合” という形の集合として) 閉集合である.

$\gamma < \omega_1$ が極限順序数のときには,(6) により,$A_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ で 各 A_α, $\alpha < \omega_1$ は帰納法の仮定から閉集合だから,A_γ も閉集合である[註 21]. $\dashv$ (Claim 1.1)

Claim 1.2 各 $\alpha < \omega_1$ に対し,$D_\alpha = \{x \in A_\alpha : x$ は A_α の孤立点$\}$ は高々可算である.

す[註 18].

[註 18] 「実数の全体 $\mathbb{R}$ は可算集合の可算和である」という主張は選択公理を除いた集合論の公理系 (ZF) と矛盾しないことが知られています (たとえば,Jech [28] Chapter 10 を参照).$\mathbb{R}$ が非可算なことは ZF で証明できるので,「実数の全体 $\mathbb{R}$ は可算集合の可算和である」の成り立つ世界では,③ は成り立たないことになります.

[註 19] ω_1 で最初の非可算な順序数をあらわします.

[註 20] 集合論では「すべての数学的対象は集合である」という立場で議論するので,すべての集合は集合族でもあります.そこで,集合 S に対して $\bigcup S$ と書いたときには,集合族としての S の和集合をあらわします.つまり,$\bigcup S = \{x : x$ はある $y \in S$ の要素$\}$ です.この書き方は,集合論を専門としていない人には,見慣れないものかもしれませんが,慣れると大変に便利な記法です.

[註 21] この証明では,「任意の開集合の族の和集合は開集合である」,「任意の閉集合の族の共通部分は閉集合である」,という事実が使われています.これは [註 16] で述べた $\mathbb{R}$ の部分集合についての開集合と閉集合の定義から容易に導くことができます.

$\vdash$ 各，$x \in D_\alpha$ に対し，有理数を端点にもつような開区間 O_x を **選んで ①**

(7) $\qquad A_\alpha \cap O_x = \{x\}$

となるようにできる．有理数を端点にもつような開区間は可算個しかないから，もし D_α が非可算だとすると，異る $x, x' \in D_\alpha$ で $O_x = O_{x'}$ となるものが存在しなければばならないが，このことは (7) に矛盾である． $\dashv$ (Claim 1.2)

Claim 1.3 ある $\alpha_0 < \omega_1$ が存在して，すべての $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$ に対して，$D_\alpha = \emptyset$ となる．

$\vdash$ そのような $\alpha_0 < \omega_1$ が存在しないとすると，各 α に対して，A_α の孤立点 x_α と有理数を端点とする開区間 O_α で，$x_\alpha \in O_\alpha$, $A_\alpha \cap O_\alpha = \{x_\alpha\}$ となるようなものが **選べる ②**．有理数を端点とする開区間は可算個しか存在しないから，$\alpha < \beta < \omega_1$ で $O_\alpha = O_\beta$ となるものが存在するが，$A_\beta \subseteq A_{\alpha+1}$ により，$A_\beta \cap O_\alpha = \emptyset$ となってしまい矛盾である． $\dashv$ (Claim 1.3)

$\alpha_0 < \omega_1$ を Claim 1.3 でのようなものとすると, $A' = A_{\alpha_0}$ として, A' は Claim 1.1 により閉集合で, $D_{\alpha_0} = \emptyset$ により，A' は孤立点を持たない．$C = A \setminus A' = \bigcup_{\alpha<\alpha_0} D_\alpha$ は Claim 1.2 により **可算集合の可算和だから，可算である ③**.

したがって，この C が求めるようなものである． $\square$ (定理 1)

では，上の証明が実は選択公理なしで行なえることを見てみることにしましょう．問題となるのは ① ～ ③ です．

まず，$\mathbb{Q}$ が整列可能であることを思い出しておきます．これは，例えば，次のようにして見ることができます: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を全単射とします．このような f は構成的に定義できるので，選択公理なしで存在が保証できます．ここで $q, q' \in \mathbb{Q}$ に対し，

(8) $\qquad q \sqsubseteq_{\mathbb{Q}} q' \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(q) \leq f^{-1}(q')$

として $\sqsubseteq_{\mathbb{Q}}$ を定義すると，この二項関係 $\sqsubseteq_{\mathbb{Q}}$ は，($\mathbb{N}$ 上の自然な順序と同じ順序型を持つ) $\mathbb{Q}$ 上の整列順序となります．

①: $\alpha < \omega_1$ と $x \in D_\alpha$ に対し，$q_x, r_x \in \mathbb{Q}$ を，

(9) $\qquad A_\alpha \cap (q, r) = \{x\}$

となる $\langle q, r\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ のうち[註 22] $\sqsubseteq_{\mathbb{Q}}$ に関する辞書式順序[註 23] で最小のもの，と

[註 22] (q, r) は q と r を端点とする開区間を表わし，$\langle q, r\rangle$ は q と r をそれぞれ第 1 第 2 要素とする順序対を表わしています．

[註 23] $\langle q, r\rangle \sqsubseteq_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \langle q', r\rangle \;\Leftrightarrow\; q \neq q'$ で $q \sqsubseteq_{\mathbb{Q}} q'$ となっているか，あるいは $q = q'$ で $r \sqsubseteq_{\mathbb{Q}} r'$ として定義される順序．$\sqsubseteq_{\mathbb{Q}}$ が整列順序であることから，この順序も整列順序になることが示せます．

することにします．$x \in D_\alpha$ に対して (q_x, r_x) は具体的に指定できているので，集合 (族) $\{(q_x, r_x) : x \in D_\alpha\}$ は選択公理なしで構成することができます．

②: 各 $\alpha < \omega_1$ に対して $\{(q_x, r_x) : x \in D_\alpha\}$ を ① でのようにとります．ここで $\langle q_x, r_x\rangle$ $x \in D_\alpha$ のうち $\sqsubseteq_{\mathbb{Q}}$ から作った $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 上の辞書式順序に関して最小のものをとり，これに対応する x と (q_x, r_x) とを x_α と O_α として選ぶことができます．ここでも，x_α と O_α は具体的かつ一意に指定できているので選択公理は必要になっていません．

③: 各 $\alpha < \alpha_0$ に対して $\{(q_x, r_x) : x \in D_\alpha\}$ を ① でのようにとります．各 $x \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} D_\alpha$ に対して $\langle q_x, r_x\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ を対応させる関数は単射になるので，このことから $\bigcup_{\alpha<\alpha_0} D_\alpha$ が可算であることが選択公理を用いずに結論できます．

上の例のように，一見，選択公理が本質的に使われているように見える証明がスタンダードなものとして知られている定理でも，うまく証明を書き換えることで，選択公理なしで証明ができる，という場合もあります．選択公理は，いずれにしても，現代の数学では縦横に用いられるので，選択公理なしの技巧的だが不自然な証明を見つける，ということそれ自体にはそれほど大きな意味があるようには思えないかもしれませんが，最近の集合論のコア・プロブレムの研究では，選択公理を仮定しない集合論のモデルが大きな役割をはたすことになる場合もあります[註 24]．そのようなモデルの考察をしているときには，選択公理なしで何ができて，何ができないのかを明確に把握できている必要があります[註 25]．

『無限のスーパーレッスン』は「一般向けの」本なので，「一般の人が分りやすいような表現を選んでいる」という言い訳で何でも書けてしまうところがありそうにも思えます．上で引用した p.164 の集合論の公理系についての文章も，著者の理解が間違っているのかどうかさえ定かでないような曖昧な表現が選ばれています

[註 24] 「集合論のモデル」というのもナイーヴに扱かうと不完全性定理と抵触してしまうような，非常にデリケートな概念です．ここではこれについて解説するだけの余裕はないのですが，[9] の 4.2 や Kunen [32] Chapter VII, §1 を参照してください．

[註 25] 以下は，集合論を知っている人のためのコメントです．現代の集合論では，選択公理を用いない数学は，例えば，次のような文脈で意味を持つものとなります: 強制法は，選択公理を用いずに導入することができます．このことは，たとえば Woodin の $\mathbb{P}_{\max}$ 理論の大前提として用いられています．この理論では $L(\mathbb{R})$ [註 26] 上の forcing の考察が中心テーマになるからです．もちろん選択公理の非存在で，強制法の理論でのすべてのツールが使えるわけではありません．すぐに分るように，強制法での Maximum Principle (Kunen [32] では Maximal Principle と呼ばれています) の (自然な?) 証明には選択公理が必要になりますが，A. Miller [34] では，強制法で Maximum Principle が成り立つことと選択公理が同値になることが証明されています．

[註 26] これは，後で触れる内部モデルの 1 つで，ZF を満たしますが，巨大基数の下では選択公理を満たさないだけでなく，後でも触れる決定性の公理を満たします．

が，次の例とつなげてみると，ここに書いてあったことが単なる表現の選び方のミスではなく，著者の決定的な誤解であることがわかります:

> … だから、ゲーデルの不完全性定理の意義は、そういう決定版の数学体系、というのは作ることができない、ということだとも言えるわけです。逆に、別の体系からの証明でよければ、たとえば 1936 年に、ゲンツェンは整数論 (ただし選択公理なし) の数学体系が無矛盾であることを、選択公理を使って (つまり整数論、選択公理つき、という体系で) 証明しています」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.185)

この「選択公理なし」の整数論，というところから，この著者がゲンツェンの結果を理解する努力を何もせずにこの文章を書いていることが見えてきます．ゲンツェンがこの結果で扱っている体系は，1 階の論理上のペアノ算術です[註 27] が，そもそもこの体系では選択公理は記述することすら不可能だからです[註 28]．ゲンツェンの定理の扱っている体系が何なのかを思い出して，そこで選択公理がどう表現できうるかをちょっと考えてみれば，この「整数論 (ただし選択公理なし) の数学体系」という主張がいかにナンセンスかはすぐに分るはずなので，著者はそういうことを考える能力を持っていないのか，あるいは考える努力を惜しんでいるか，どちらか，ということになります．

ここで「選択公理」という思いがけない言葉が出てきたのは，著者が，「選択公理というのは超限帰納法のことだ」ということを固く信じてしまっているらしいことと，「ゲンツェンの定理は ε_0 までの超限帰納法を用いて証明された」というような主張をどこかで聞きかじったことからのショートサーキットではないかと思われます．

なお ε_0 というのは，個々の有限の数 0, 1, 2,... や自然数の全体 $\mathbb{N}$ の順序型であるところの ω, ω の次の順序数 $\omega+1$, ω の後にもう 1 つ ω の順序型のコピーを

[註 27] 竹内-八杉 [38] で与えられている初等整数論の証明の体系はゲンツェンの論文の 1 つで与えられている体系と一致するものになっています．また， [10] の pp.216-217 では，これと本質的には同じものが，PA (ペアノ算術の公理系) + (ヒルベルト流の) 述語論理の体系，という形で与えられています．

[註 28] フェアネスのために言い添えておくと，この，選択公理が関係しえないコンテキストで選択公理が問題になっていると勘違いする，というのは，本書の著者に限らず，論理学(ロジック)や集合論の素養のない数学者にはありがちのことのようにも思えます．たとえば，もう 30 年近く昔になりますが，ベーレンツ先生[註 29] に 2 階算術に関連する説明をしたときに，やはり，ありえない箇所で「それは選択公理が…」と頓珍漢な反応をされて非常に驚いてしまったことがありました．

[註 29] [1], [2] の著者で，私がまだベルリン自由大学数学科の学生だったときに，私の Diplom 試験での副専門教科 (私が副専門教科に選んだのは関数解析と微分方程式でした) の試験官だった人です．

付け足した順序型に対応する順序数 $\omega+\omega$ 等々と同じように，確定的に指定することのできる (特に何がそれより下の順序数になっているかを明言のできる) 順序数で[註30]，ε_0 までの超限帰納法は，たとえば，カントル・ベンディクソンの定理の証明で用いた超限帰納法よりずっと弱いものですし，ゲンツェンの証明でのこの超限帰納法の使い方も，更に非常に限定されたものになっていて[註32]，もちろん選択公理に相当するような議論は用いられていませんし，上の引用での，「選択公理なしの整数論の無矛盾性を選択公理つきの整数論を使って証明した」にあるような，鯛で海老をつるような状況が生じているわけでは全くありません[註33]．

『無限のスーパーレッスン』では，この他にも選択公理に関連したおかしな主張がいくつもあるので，ここではそのうちのいくつかを纏めて見ておくことにしたいと思います．

> 選択公理なしでは無限の大小が比べられなくなるので、ベルンシュタインやカントルの対角線論法などが駄目になってしまいます。
>
> (無限のスーパーレッスン，p.201)

「ベルンシュタイン」は本書の 4.2 で触れているカントル・ベルンシュタインの定理のことだと思われます．この「駄目になってしまいます」，というのはどういう意味でしょう？ 日本語としての一番素直な解釈としては，選択公理を仮定しないと，カントル・ベルンシュタインの定理も対角線論法による議論も成立しえない，ということだと思いますが，そうだとするとこの主張は間違っています[註34]．しかもカントル・ベルンシュタインの定理にしても対角線論法による議論にしても，

[註30] 具体的に言うと，ε_0 は，ω より大きな順序数のうち順序数の冪演算について閉じている最初の順序数，として定義されます．ε_0 より小さい順序数はカントルの標準形と呼ばれる式で表現できる順序数と一致します．[註31]

[註31] ただし，この ε_0 に関する議論は，ゲンツェンの定理の文脈では，通常の数学の外側にある超数学で行なう必要があるので，ここでの「一致します」という表明は，微妙な点を含むものになっています．数学での無限と超数学での無限の関係については，[18] にも解説があります．

[註32] ヒルベルトは帰納法を „inhaltliche Induktion“ と „formale Induktion“ に区別して考えていますが，ここで言っている 「非常に限定されたもの」は前者の意味に近いものです．

[註33] このへんのところのより詳しい説明は，たとえば [7], [10] をご覧ください．定理の完全な証明は，たとえば，竹内-八杉 [38] で見ることができます．蛇足ですが，変な揚げ足をとる人がいるといやなので言っておくと，ここで「鯛で海老をつる」書いたのは書き間違えではなく，概念の spoonerism として (意図的に) 逆に書いたものです．

[註34] [9] では，カントル・ベルンシュタインの定理 ([9] の定理 2.33) に対して，選択公理を用いる (短い) 証明と，選択公理を用いない (その分だけ少し長くて煩雑なものになっている) 証明の両方が与えられています．

本書には怪しげな証明もどきまで書いてあるので，この (怪しげな) 証明が正しいものなら選択公理が用いられていないことは，それから明らかなはずなのです．ここでもやはりこの著者はどこまで分って書いているのかは全く謎です[註 35]．

　実は，この少し前には，

> 「二つの無限集合の大きさを比べたことがありましたよね。A と B の大きさを比べたいとき、それぞれから元を一つずつ取ってきてカップルを作っていって、どちらかを使いきるまでカップルを作り続けるわけです。これを具体的にどうやるか、というと、まず A から元を一つ、B から元を一つ、それぞれ取ってきてカップルにします。カップルになったのを取り除いて、それで両方とも残っていれば、また A から一つ B から一つ 2 番目の元を取ってきて、カップルにします。以下、3 番目、4 番目と、どちらかを使いきらない限り、元を取り続けて、カップルにしていくことができるので、A と B が無限集合ならば、無限個のカップルができます。普通の帰納法だと、これで終りなんですね。もしこれをやり終ったあとで、まだ両者無限個残っていたら、お手上げです」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.200)

云々と書いてあって，集合の大小を比べるには，超限回の取りつくしの議論をしてみるしかない，と勘違いしたことが，上の p.201 の文章の「選択公理なしでは無限の大小が比べられなくなる」という表明につながっているのではないかと想像できます．しかし，これが正しくないことは，次のような状況を考えてみるとわかります: 今，選択公理が成り立たないとして，更に $\mathbb{R}$ に整列順序が入らないということを仮定してみましょう (ZF 集合論が矛盾しないなら，ZF 集合論にこの命題を付加したものも矛盾しないことが知られています[註 36])．このときには，$\mathbb{R}$ の部分集

[註 35] というより，むしろ，そもそも彼が将来何かを分るチャンスを持っているのか，そうでないのかも，謎であるようにも思えます．

[註 36] 証明は，たとえば 田中 [39] の第 4 章や Jech [28] の Chapter 5 をご覧ください．[32] には，この命題の別証明が VII 章の演習問題 (E4) として出ています．

　ちなみに，ここでは，「選択公理が成り立つなら，$\mathbb{R}$ 上に整列順序が存在する」あるいはもっと一般的には，「選択公理は，すべての集合上に整列順序が存在する，ということと同値である」という命題が ZF で成り立つ，という事実を既知として議論していますが，この事実を聞きかじっていたことが，6 ページで引用した本書 p.164 での著者の勘違いの原因かもしれません．超限帰納法は整列順序の上での帰納法ですが，整列順序を持つ集合自身は (後でクラスについての節で説明するような意味で，互いに順序型の異なるものが class many に) 存在します．このことは ZF で証明できるので，超限帰納法は，既に Cantor- Bendixson の定理 (8 を参照) の証明で見たような応用が (AC の仮定なしに) 可能です．一方，例えば，$\mathbb{R}$ 上の整列順序を一つ固定して，この整列順序に関する超限帰納法の議論を行おうとするときには，そのような整列順序の存在の保証が必要となり，そのためには，選択公理のような ZF からは帰結できない公理の仮定が必要になるわけです．

合の全体 (つまり $\mathbb{R}$ の冪集合) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ にも整列順序は入らないことになります (もし $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ に整列順序が入ったとすると，それを $X = \{\{r\} : r \in \mathbb{R}\}$ に制限したものも整列順序になりますが，X と $\mathbb{R}$ の間には自然な全単射が定義できるので，このことから $\mathbb{R}$ にも整列順序を入れることができてしまいます)．一方，直前の ( ) 内での議論から，$\mathbb{R}$ から $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ への自然な単射が作れることがわかりますが，一般化された対角線論法の議論 (本書の pp.92-97) からは，$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への単射は存在しないことがわかるので，$\mathbb{R}$ より $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ のサイズの方が大きいことがわかります[註 37]．

ただし，p.201 からの引用でも分るように，著者は選択公理が成り立たないとカントル・ベルンシュタインの定理も対角線論法の議論も成り立たないと思い込んでいるようなので[註 38]，自分で類似の例を思いうかべて考え違いの軌道修正をするのは難しかったかもしれません．

上の p.201 の文章を直すとすると，

(10)　選択公理なしでは，基数で大きさの測れない集合が必ず存在することに

[註 37] 選択公理を用いない数学の議論では，通常の選択公理を用いる議論では同値となる命題が，必ずしも同値になるとは限らないため，様々な概念の定義を，選択公理のもとでは互いに同値な定義となっているもののうちのどれとして固定するかを選ばなくてはいけなくなることが頻繁に起こります．

ここでも，集合 X より，集合 Y の方がサイズが大きいということを X から Y への単射が存在するが，Y から X への単射は存在しないこと，として定義しています．これは，言葉を変えれば，X は Y に 1 対 1 に埋め込めるが，Y は X には 1 対 1 には埋め込めない，ということですから，1 対 1 対応で集合の大きさを測るという考え方による集合の大きさの概念の自然な実現となっていることが分ります．

[註 38] 本書の pp.230-231 には，定理の説明のようなものは，選択公理を用いないカントル・ベルンシュタイの証明に基いているように思われるので，この著者が，それを選択公理なしでは駄目になってしまう，と信じている，ということは，(超限的でない) 数学的帰納法も選択公理なしでは成立しない，と思っている，ということなのでしょうか？ しかし，そんな勘違いを放置してしまう人が数学者でありえるのだとすると，これ自身，驚くべき奇跡，あるいはむしろ数学のパラドックスであるように思えます[註 39]．

[註 39] 藤田博司さんは twitter で，この著者について，「木村俊一先生のようないたってマトモな数学者が、講談社というきわめてマトモな出版社から出した本に、そういうことが堂々と書いてあるんだから、問題の根は深いです。」と書いていますが，この「マトモな数学者」や「マトモな出版社」というのは本当にマトモなんだろうか，というのは，少なくとも私にとっては，その答如何によっては日本文化を捨てる (勿論これは日本語では本や論文，論説などを発表することは金輪際しないことにする，ということを含んでいます) 決心を本当にしなくてはいけなくなるかもしれないところの，なんとしてもはっきりさせたい非常に重要な問題です．ちなみに，私の知的活動は，たとえば Stefan Zweig がドイツ語に対してそうだったようには，日本語に絶対的に依存してはいないと思うので，仮に私が日本語をこのような意味で捨てたとしても，自殺に追い詰められることはないだろうと思っています．

なってしまい[註 40]，集合のサイズの比較のできない場合[註 41] が出てくる可能性もあります．

とでもするべきでしょうか．今この文章を書いていて,「すべての集合のサイズの比較ができるのなら選択公理が成り立つか？」という疑問が湧いてきました．しかし，ちょっと考えると，すべての集合のサイズの比較ができることは，選択公理と同値になることが分ります[註 42]．次の定理の証明では，順序数は，普通の定義 (von Neumann による定義) により導入されているものとします．特に，各々の順序数は，それより小さい順序数の全体からなる集合となっています．

定理 2 「すべての集合のサイズの比較ができる」という主張は (集合論の選択公理以外の公理の上で) 選択公理と同値である．

証明．[註 37] で書いたように,「すべての集合のサイズの比較ができる」というのは，すべての集合 X, Y に対し，X から Y への単射が存在するか，または Y から X の単射が存在するかの少なくとも片方が成り立つことである[註 43]．

選択公理が成り立てば，もちろんすべての集合のサイズは比較可能である．Zermelo 集合論 Z でこれを見るには，次のような議論をすればよい: 2 つの集合 X, Y が与えられたとき，整列定理により，X 上の整列順序 $\sqsubset_X$ と Y 上の整列順序 $\sqsubset_Y$ がとれる．整列順序に関しては，最小元どうし，互いの最小元を除いたものの最小元どうし，... という対応を再帰的に作ってゆくことができるので，$\langle X, \sqsubset_X\rangle$, $\langle Y, \sqsubset_Y\rangle$ のどちらかの，もう一方の始片への順序を保存する埋め込みが得られる．特にこの埋め込みは X，Y のうちの片方からもう片方への単射になっている [註 44]．

[註 40] 上にも書いたように，選択公理は,「すべての集合に整列順序を入れることができる」という主張と同値になりますが，基数は整列順序の特別な場合なので，基数で大きさが測れる (つまりある基数との間に全単射の存在する) 集合には，当然 (その基数の順序のコピーとしての) 整列順序を入れることができます．

[註 41] [註 37] から，集合のサイズの比較のできない場合，とは，2 つの集合 X, Y で X から Y への単射も Y から X への単射も存在しないようなものがあることです．

[註 42] これを書いたとき，この主張は，当然昔に誰かが証明している事実だろうと思っていたのですが，案の定，以下の定理は，ハルトークスの 1915 年の論文 [21] に出ているものでした．また，この定理の前提 「すべての集合 X, Y に対し，X から Y への単射が存在するか，または Y から X の単射が存在するかの少なくとも片方が成り立つ」 は「カントルの三分律 (law of trichotomy)」と呼ばれているようです．これがなぜ二分律でなく三分律なのかは，次の [註 43] を見ると分かります．

[註 43] 両方の単射が存在するときには，カントル・ベルンシュタインの定理により，X から Y への全単射が存在して，X と Y は (通常の意味で) サイズが同じである，ということが結論づけられます．

[註 44] この，それまでに対応づけられていないもののうちの最小なもの同士を対応づける，という埋

逆に「すべての集合のサイズの比較ができる」という主張から，選択公理が証明できることを示す．もちろん，この証明は，選択公理以外の集合論の公理のみを前提として行なわなくてはならない．この証明のために先ず，次の Claim を示しておく (もちろん，この Claim も選択公理を用いずに証明する必要がある).

次の Claim 2.1 は ZF で成り立つ命題である．これが Z で証明できないだけでなく，ZC (ツェルメロの集合論に選択公理を加えたもの) ででも証明できないことは，ZF の無矛盾性を仮定すると (比較的) 容易に示せる[註 45]．

Claim 2.1 任意の集合 X をとると，X への単射の存在しないような順序数 κ が存在する．

$\vdash$

(11) $\qquad A = \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha$ から X への単射が存在する $\}$

は集合になる[註 47]．これを見るには，各 $Y \subseteq X$ に対し，

(12) $\qquad A_Y = \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha$ から Y への全単射が存在する $\}$

が集合になることを示しておき,[註 48]

(13) $\qquad A = \bigcup\{A_Y : Y \in \mathcal{P}(X)\}$

め込みの部分的の拡張の仕方の一意性 (この拡張しかあり得ないこと) から，このようにして得られる埋め込みは一意に定まることがわかる．この事実は，p.19～ で定理の別証明を与えるときに重要な役割を果たすことになる．また，拡張の仕方の一意性により，この埋め込みの構成では選択公理は必要にならないことにも注意しておく．

[註 45] ZF の無矛盾性から ZFC の無矛盾性が導けるので，ZFC で議論することにする．V_{ω_1} は ZC のモデルになるが [註 46] (これが言えるために ZFC で議論していることが必要になる!)，V_{ω_1} では非可算な順序数は存在しないので，V_{ω_1} では，任意の無限集合 X に対し，すべての順序数が X に埋め込める．

[註 46] ω_1 で (ZF ではその存在の証明できる) 最初の非可算な順序数をあらわす．次の [註 47] でと同じく，On で順序数の全体をあらわすことにして，$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, γ が極限順序数のときには，$V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$ として，集合の列 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ を定義すると (このような定義が可能なことは順序数の基礎理論から導かれる) この列は $\subseteq$ に関して上昇列となり，$V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ が成り立つ．集合の列 V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は累積的階層，あるいはフォン・ノイマン階層とよばれる．ここでの V_{ω_1} はこの階層での ω_1 番目の集合である．

[註 47] On で順序数の全体からなるクラスを表しています．以下の第 3 節に，本書の p.163 に書いてあることにもかかわらず，このようなクラスの考察はできる，ということの説明があります．

[註 48] このことは，Y への全単射の存在するような順序数の順序型は，$\mathcal{P}(Y^2)$ の要素で一意コードできること，したがって，そのようなコードの全体が $\mathcal{P}(Y^2)$ の部分集合になることから導ける．

に留意すればよい．

したがって，$\kappa = \bigcup\{\alpha+1 : \alpha \in A\}$ として順序数 κ が定義できるが，κ は求めるようなものである．もし，$\kappa \in A$ とすると，κ の定義から $\kappa \geqq \kappa+1$ となってしまい矛盾するからである． $\dashv$ (Claim 2.1)

κ を上の Claim でのようにとると，仮定から κ と X は比較可能なので，X から κ への単射 $f : X \to \kappa$ が存在しなくてはならないが，$x, y \in X$ に対し，

(14) $x \leqq_X y \;\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$

とすることで X の上の整列順序 $\leqq_X$ が定義できる．このことから，すべての集合に整列順序を入れられることが示せたが，この主張は選択公理と同値である ((2) と [註 12] を参照)． □ (定理 2)

上の定理から，(10) で書いた本書 p.201 の文章の訂正例は，更に，

(15) 選択公理なしでは，基数で大きさの測れない集合が必ず存在し，集合のサイズの比較のできない場合も必ず出てきます

とでも書き直すべきでしょう．

上の定理に関して，実は非常に興味深いことがあります．整列定理やツォルンの補題など，選択公理を特徴付ける性質の多くは，それらの選択公理との同値性がツェルメロの集合論 (置換公理と基礎の公理を含まない公理系) で証明できるのですが，最近に得られた同値命題，たとえば，すぐ後で触れる「任意の係数体上の線型空間に基底が存在する」という命題など，選択公理との同値性の証明のために，ツェルメロ=フレンケルの集合論が必要になるように思える命題があります．これらのより複雑な同値命題は，比較的最近のもののことが多いのですが (線型空間に関する命題は 1984 年に発表された Andreas Blass の結果です) 上の定理 2 も，上でも述べたように，その証明は (基数の理論を十分に展開することのできない) ツェルメロの集合論では実行できないものになっています．Hartogs の論文は 1915 年で ツェルメロ=フレンケルの集合論の公理系が確立するのは，1920 年より後のことなので，Hartogs は (そしてもちろんカントルも) 公理的な枠組がまだ確立されていない集合論で結果を得ていることになります．定理 2 の命題は非常に単純な形をしているので，これの選択公理との同値性がツェルメロの集合論では証明できないことが示せるなら，ツェルメロの集合論で展開できる数学に関する議論にとって非常に重要な結果となると思うのですが，少なくとも今のところ私が分っているのは，考えつく証明は上で示したものを含めてすべてツェルメロ=フレンケルの集合論の公理系でのものになっている，ということだけです．修士論文 (同値性がツェルメロの集合論で示せた場合) か場合によっては博士論文 (同値性がツェルメロの

集合論で示せないことが証明できた場合) のテーマにはなると思うのですが，誰か考えてみてもらえないでしょうか? —— この文章の 2020 年 05 月 15 日 (16:40 JST) 版以前の版ではこのように書いていたのですが，Hartogs の定理は，次の (Z で証明できる) 補題 3 を，上での Claim 2.1 の代りに用いると，Z で示せることに，気がつきました．この補題が Z で証明できることをきちんと示すのには，以下で見るようなトリックが必要になるので，当時，集合論での，関数の扱いがまだうまく確立していなかったことを考えると，Hartogs の論文で，このへんの議論が，最後まで，詰められてはいなかった可能性も低くないように思えたのですが，[35] によると，Hartogs は，Zermelo の公理系で厳密に議論をしている最初の一人である，ということで，整列順序集合を使う議論も Hartogs の論文で採用されているようです．

$\mathcal{S} = \langle O_\mathcal{S}, \leq_\mathcal{S}\rangle$, $\mathcal{T} = \langle O_\mathcal{T}, \leq_\mathcal{T}\rangle$ を整列順序とするとき，$\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ を，順序を保存する埋め込み $i : O_\mathcal{S} \to O_\mathcal{T}$ で，$O_\mathcal{S}$ の i による像 $i''O_\mathcal{S}$ が，$O_\mathcal{T}$ の始片となっているようなものとする．このような i は存在すれば一意であることが ($\mathcal{S}$ 上の) 超限帰納法により示せるから，これを $i_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ とあらわすことにする (この一意性により選択公理を回避する)．任意の整列順序集合 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ に対し，$\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ か $\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$ の少なくとも片方は成りたつ [註 49]．

補題 3 (Z) X を要素が整列順序集合であるような集合とすると，整列順序集合 $\mathcal{S}$ で，すべての $\mathcal{T} \in X$ に対し，$\mathcal{T} \leq \mathcal{S}$ となるようなものが存在する．

証明． 各 $\mathcal{T} \in X$ は，$\mathcal{T} = \langle O_\mathcal{T}, \leq \mathcal{T}\rangle$ という形をしているものとする．∞ を，$\bigcup_{\mathcal{T}\in X} O_\mathcal{T}$ に含まれない新しい集合とする (このようなものが存在することは $\mathsf{V} = \{x : x = x\}$ が集合でない[註 50] ことからよい)．

各 $\mathcal{T} \in X$ に対し，$\mathcal{T}' = \langle O_\mathcal{T} \cup \{\infty\}, \leq'_\mathcal{T}\rangle$ とする．ただし，$\leq'_\mathcal{T}$ は，∞ を $O_\mathcal{T}$ のすべての要素の上に置く整列順序とする．$O'_\mathcal{T} = O_\mathcal{T} \cup \{\infty\}$ とする．

$$
\begin{aligned}
O_\mathcal{S} = \{f \in \textstyle\prod_{\mathcal{T}\in X} O'_\mathcal{T} \ :\ & \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \in X,\ \mathcal{T}_0 \leq \mathcal{T}_1 \text{ で } f(\mathcal{T}_0) \in O_{\mathcal{T}_0} \text{ なら}\\
& f(\mathcal{T}_1) = i_{\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1}(f(\mathcal{T}_0)),\ \mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \in X,\ \mathcal{T}_0 \leq \mathcal{T}_1 \text{ で}\\
& f(\mathcal{T}_1) \notin i_{\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1}{}''O_{\mathcal{T}_0} \text{ なら } f(\mathcal{T}_0) = \infty\}
\end{aligned}
$$

とする．$\leq_\mathcal{S}$ を coordinatewise comparison (添字ごとの比較による順序) とすると，$\mathcal{S} = \langle O_\mathcal{S}, \leq_\mathcal{S}\rangle$ は求めるような性質を持つものになっている (演習)． □ (補題 3)

[註 49] ここで述べたことの証明のスケッチは [註 44] とその前後を参照されたい．

[註 50] V が集合でないことの証明は，このテキストの p.33 を参照．

定理 2 の Z での証明: 定理の証明の “$\Leftarrow$” 方向は既に Z での証明が得られていたので，“$\Rightarrow$” 方向を示せばよい．このためには，すべての集合上に整列順序が存在することを言えばよい．S を任意の集合とするとき，

$$X = \{\mathcal{T} : \mathcal{T} = \langle O_{\mathcal{T}}, \leq_{\mathcal{T}} \rangle \text{ は整列順序集合で } O_{\mathcal{T}} \subseteq S\}$$

として，$\mathcal{S}$ をこの X に対して補題 3 でのようにとる．$\mathcal{S} = \langle O_{\mathcal{S}}, \leq_{\mathcal{S}} \rangle$ とする．仮定から，$O_{\mathcal{S}}$ から S への単射が存在するか，S から $O_{\mathcal{S}}$ への単射が存在するかの少なくとも片方は成り立つ．もし，$O_{\mathcal{S}}$ から S への単射 i が存在すれば，i は上射である: もし i が上射でなければ，$a^* \in S \setminus i''O_{\mathcal{S}}$ がとれるが，$O^* = (i''O_{\mathcal{S}}) \cup \{a^*\}$ として，O^* 上の順序 $\sqsubseteq$ を，$a, b \in S$ に対し，

$$a \sqsubseteq b :\Leftrightarrow b = a^* \text{ または，} a = i(a'), b = i(b') \text{ で，} a' \leq_{\mathcal{S}} b'$$

として定義すると，$\sqsubseteq$ は O^* 上の整列順序となるから，$\langle O^*, \sqsubseteq \rangle \in X$ で，$\sqsubseteq$ の構成から，$\mathcal{S} < \langle O^*, \sqsubseteq \rangle$ となる．しかしこれは，$\mathcal{S}$ の定義に矛盾である．

したがって，この場合には，$\mathcal{S}$ の順序を，S 上にコピーすることができるから，S は，整列可能である．

もし，$O_{\mathcal{S}}$ から S への単射が，存在存在しなければ，S から $O_{\mathcal{S}}$ への単射 j が存在するが，このときには，S 上の順序 $\sqsubseteq$ を，$a, b \in S$ に対し，

$$a \sqsubseteq b :\Leftrightarrow j(a) \leq_{\mathcal{S}} j(b)$$

により定義すると，$\sqsubseteq$ は S 上の整列順序となる．したがって，いずれの場合にも，S 上に，整列順序が存在することが，示せた． ❏ (定理 2)

選択公理に関する研究では，1960 年代から 1970 年代初めくらいまでに，すぐに思いつくような問題，あるいは，「門外漢」の人にも，その意味が比較的簡単に説明できるような問題は，あらかた解決されてしまっていますが，それでも，その後も，幾つかの新しい結果が得られ続けています．たとえば，「任意の体上のすべての線型空間に基底が存在する」という命題が，集合論の他の公理上で，選択公理と同値になる，という Andreas Blass の結果は Jech [28] の出版よりずっと後の 1984 年に発表されています (Blass [3])[註 51] ．

また，最近では集合論のコア・プロブレムとの関連で，選択公理の成り立たない集合論のモデル上の強制法などが取り上げられることもあり，古典的な結果とは別

[註 51] 一つの例だけではあまりにも単発的に思えるかもしれないので，あと 2 つほど比較的最近得られた結果を，説明ぬきで挙げておきます．既に本文でも触れた Miller の結果は，「門外漢の人にも比較的簡単に説明できる」とは言えないかもしれませんが: 「すべての可換な単位環は極大イデアルを持つ」という命題は選択公理と同値である (W. Hodges, 1979 [26]), 強制法の理論での Maximality Principle が成立することと選択公理は同値である (A. Miller 2011 [34]).

の観点から選択公理の成立しない集合論が議論されることも稀ではありませんし，それに伴って，上や本書で議論されているようなものとは異る新しいタイプの結果も出てくるようにもなってきています[註 52]．

ところで，この本の著者は，選択公理が成り立たない場合に，更に色々な異る状況が起こり得る，ということを理解していない可能性があります．たとえばそれは，

> 選択公理を否定すると、すべての図形に体積が定義できるんだ、ということを聞いたことがあります。
>
> (無限のスーパーレッスン，p.203)

というような表明に示唆されているように思えます。

幾何で，平行線公理が成り立たない状況では，その中で更に色々と異る幾何のモデルが成立する可能性があるわけですが，この人はこちらの方は，ちゃんと理解しているのかどうか，というのはぜひ知りたいところです．もし，幾何の方はちゃんと理解していて，選択公理の否定では不思議な考えちがいをしているとするとその違いはどこから来ているのでしょうか？ とはいっても幾何学での状況は集合論でとは少し異るところもあって，そのことが，理解を妨げているかもしれません．

ユークリッド幾何では，公理的に議論する場合でも，通常はヒルベルトの公理系のように，それだけで閉じておらず，無限論理や高階論理でしか記述できないような公理を含むカッコつきの公理系が考えられていて，それらの述語論理の記述力を越えた公理たちは，集合論の中でのスタンダードな解釈で考察されることになるので，公理的な扱いとしては徹底していないからです．[註 53] 平行線公理の否定も，だから，モデルを考えるということになり，公理系の拡張という観点からは考察されることはないと思います．

幾何学ではモデルを集合論の中で考えるということができるわけですが，集合

[註 52] たとえば [註 25] を参照してください．

[註 53] 一方，一階の述語論理で記述できる集合論的な概念を全く持ちこまない初等的な平面幾何学に限定して考えると，これは，たとえばタルスキーによって記述された体系の中で展開できて，しかも，このタルスキーの公理系は完全にもなることが証明されています (Wikipedia の項目 [42] はよくまとまった説明になっています)．このことは日本では一般の数学者にはほとんど知られていないようです．

これは既にどこかに書いたことがありますが，昔，北海道に住んでいた頃，亡くなる少し前に客員研究者として北見に滞在されていた故 Peter Slodowy 先生に，この初等幾何についての話をしたところ，即座に「ああタルスキーのあれね」という反応が返ってきて驚いたことがありました (日本語で話していたわけではなく，ドイツ語の会話だったのですが)．だからここで書いた「日本では」という但し書きは，飾りではなくて本当に日本だけの特殊事情を言っているのかもしれません．

論では，集合論のモデルを集合論自身の中で考えるという議論は，厳密に言うと，実際には，一種の「だまし」にすぎず，非ユークリッド幾何学のモデルを集合論の中で考えるようには集合論のモデルが集合論の中で考察できるわけでなくて，モデルについて議論しているようなふりをしていても実際には，公理系の体系の拡張について (その体系の解釈を介さずに) 議論していることになっているのです．

ちなみに，自然に予想できるように，「すべての図形に体積が定義できる」という主張の真偽も，単に選択公理を否定しただけでは決定できません．

ソロベイ (Solovay) は 1971 年の論文で

(16) 集合論の公理系に到達不可能基数の存在の主張を付加して得られる公理系が矛盾しないなら，選択公理を除いた集合論の公理系に「すべての図形に体積 (Lebesgue 測度) が定義できる」という主張と (従属選択公理 Axiom of Dependent Choice) と呼ばれる弱い選択公理を付け加えた体系も矛盾しない

ことを証明しています．また，シュタインハウス[註 54] とミチェルスキは 1962 年の論文で，現在では決定性の公理 (Axiom of Diterminacy (AD)) と呼ばれている公理 (と選択公理以外の集合論の公理) から，すべての図形に体積が定義できることを証明しています．この公理については，更に 1990 年代以降に大きな研究の進展があったのですが，それについては，たとえば Kanamori [29] をご覧ください．

一方，ヴィタリによる非可測集合の構成法を思い出してみると，$\mathbb{R}$ が整列可能なら，ヴィタリが構成したような非可測集合が作れることがわかります．集合論の公理系が無矛盾なら，選択公理を集合論の公理から除いたものに，選択公理の否定と $\mathbb{R}$ の整列可能性の主張を加えた体系も無矛盾であることが示せます (例えば，前出の Kunen [32] の VII 章の演習問題 (E4) の変形でこれが示せます[註 55])． この体系では，選択公理は成り立たないけれど，非可測集合は存在します．

上で引用した「ベルンシュタインやカントル …」の表明のすぐ後には、

> ところが、バナッハという数学者とタルスキという数学者が、この公理はあまりに強力だから、ちょっとまずいんじゃないか、ということを言いだしました。
>
> (無限のスーパーレッスン，p.201)

[註 54] シュタインハウスはバナッハの先生だった人です．

[註 55] 以下は集合論を知っている人のためのコメンントです: $V = L$ を仮定して，V で G を $\mathrm{Fn}(\aleph_2, 2, {<}\aleph_1)$-generic filter とします．このとき，$L(\mathcal{P}(\omega_1))$ を $V[G]$ で考えると，$\mathbb{R}^{L(\mathcal{P}(\omega_1))} = \mathbb{R}^L$ は整列可能だが，選択公理は $L(\mathcal{P}(\omega_1))$ では成り立たないことが，Kunen [32] の演習問題 (E1) ～ (E4) と同様に示せます．

とありますが，これは史実の曲解であるように思えます[註 56]．これについては他にも似たようなことを言う人が少なからずいます．それについての苦言を

https://fuchino.ddo.jp/barcelona.html#08.04.27

に書いたことがありました．ここではこれを繰り返すことは避けることにして，上の URL の方を参照していただきたいと思います．

このちょっと先のところで，

… 今ではバナッハ・タルスキのパラドックスは厳密に証明された定理である、と考えられています」 (無限のスーパーレッスン，p.202)

とありますが，これにはちょっと参りました．「…、と考えられています」と書いているということは，この著者はバナッハ・タルスキの定理の証明も理解できていない，というか，理解できたという錯覚すら抱いていない，ということなんでしょうか？ もちろん私だって，フェルマーの大定理の証明をちゃんと理解していないのに，[12] では，偉そうに「フェルマーの大定理とは…」なんて一席ぶっちゃったりしているので，人のことを言えたぎりではない，と言われてしまうかもしれませんが，フェルマーの大定理の証明を理解するには証明の本質的な部分の理解のためだけでも多分計 400 ページ以上文献を読み込まなくてはいけないでしょう．これに対して，バナッハ・タルスキの定理の証明は，理解するために読まなくてはいけないのは高々 10 ページくらいのものです．難しさの規模が全く違います[註 57]．それは別としても，自分がちゃんと理解していないものを，「と考えられています」といって，いかにも胡散くさいのは自分ではなくてバナッハ・タルスキの定理の方だ，みたいな言い方をするのはやめてほしいものです．

ちなみに，なぜバナッハ・タルスキの定理が逆理でなく，選択公理の問題点を提示しているものでもないのか，ということについても上記の URL の文書で論じていますが[註 58]，要点は，このバナッハ・タルスキの定理が述べている球体の有限

[註 56] バナッハ・タルスキーの定理は，球体をうまく有限個に分割すると，分割されたピースを回転したり平行移動したりて組み直すことで (拡大縮小はしない！)，同じ直径の 2 つの球体を得ることができる，ということを主張するものです．

[註 57] 1998 年に「八ヶ岳フレッシュマンセミナー」の最終回での講師の 1 人として学部生のセミナーを指導したときには，このバナッハ・タルスキの定理をテーマとして取り上げましたが，このときのセミナーの参加者は全員この定理の証明を理解してくれたと思います．なおこのときに自作したバナッハ・タルスキの定理の証明を含むテキストが [8] にあります．

[註 58] バナッハ・タルスキの定理は，集合論をよく知らない人が，選択公理が直観に反する例として安易に挙げることの多い定理ですが，選択公理の否定も，直観に反する結論を否定できないことが多いことは，同様に指摘するべきでしょう．たとえば [註 18] を参照．これは，選択公理が直観に反

分割が物理的に実現可能である，とはどこにも述べられていないことにあります．数学は，物理現象のモデルとして使えるような実数体を用意していますが，それは数学的な理想化のされた対象で，たとえば，$\mathbb{R}^3$ での直線や平面 (一次方程式の解として得られる $\mathbb{R}^3$ の部分集合) だって厳密に言えば物理的な対応物は存在しないことを思い出してみれば，数学が物理現象に対応しないようなオブジェクトも含めて議論をしているので，物理的な近似の存在しないような定理も成り立っている，ということ自体は何のパラドックスでもないことが納得できると思います．ただし，バナッハ・タルスキーの定理に物理的な近似が絶対にない，とも限らないかもしれなくて，それに関連するかもしれない，と思える内容を持つ研究もあることは言い添えておく必要があるでしょう[註59]．

数学は，物理学を含む現在の科学に応用できればいい，というものではなくて，どのような科学の発展が未来にあっても，未来の科学での基礎として用をなすような体系を提供する一般性を持つものでなくてはならないでしょう．バナッハ・タルスキの定理が物理的に実現可能であるとは限らない球体の有限分割について議論していることは，この意味での数学の一般性に属すことがらとして自然なことと言えると思います．

ついでに言えば，現在日本では「何も (金儲けの足しになるような) 応用がない」，ということで，科学研究を安易に批判する，ということがよく行なわれますが[註60]，応用があるかどうか，という価値判定の基準は認めるとしても，「現在応用がない」は批判としてはおそまつ，としか言いようがないでしょう．数学の歴史を思い出してみれば分るように，ある時点で全く他の学問と関連のない思考のゲームにすぎないように見えていた研究が，後になって思いもよらなかった応用を見出し，人類の文化に大きな影響を及ぼす，という展開が何度も起っているからです．しかも，これは数学では特に顕著ですが，別に数学に限ったことではないでしょう．「現在応用がないからだめだ」というのは，「欲しがりません勝つまでは」というのとどっちこっちな近視眼的な価値判断でしかないと言わざるを得ないものに思えます．

マルティン・ルター (1483–1546) が言ったと言われていて，寺田寅彦の「災害は忘れたころにやってくる」と同じように，本当のところは誰が言ったのかよく分っていないらしい「明日世界が滅ぶことが分っていたとしても私は今日林檎の木を植

する，というより我々の直観が集合論的な状況に対してまだ十分に研ぎ澄まされていないのだ，と理解すべきなのだと思います．

[註59] たとえばホログラムのように，ナイーヴな数学的な直観からは不可能に思えることが物理的に可能になるということだって有り得ることに注意してください．

[註60] この状況は第三帝国の統治下の国や戦時中の日本の状況と類似のものに思われます．

えるだろう」というのがありますが，明日日本が滅ぶことが分っていたとしても日本の “科学技術” 行政が今日の純粋 (精神&自然) 科学をサポートしてくれる，ということなら頼もしいのにな，とつくづく思います．

このバナッハ・タルスキーの定理でもそうですが，『無限のスーパーレッスン』では「無限を考えるとこんな不思議なことが出てくる」ということを「数学は門外漢」の読者に一生懸命訴えようとしているように思われます[註 61]．これに，読者受けのする売れる本を書かなくてはいけない，というバイアスがかかった結果，自分でよく分っていないことにつて，自分でよく分っていない，という自覚もなしに[註 62] 色々とオカルト的な脚色をして書いてしまった[註 63]，というのがこの本の成立の過程ではないかと想像します[註 64]．ブログや twitter の作者が半分無自覚のまま陥ってしまうことの多い悪循環と似たところがあるのではないかと思います．

2　不完全性定理

同じようなモメンタムが本書の不完全性定理に関連する部分でも強く働いているように思えます．ただし，不完全性定理に関しては，本書で著者が何を本当に言いたいと思っているのか，あるいは何を正しく理解して書いているのか，は更に曖昧で，それだから，日本の政治家が “失言” の批判をかわすときによくやるのと同じように，上にも既に述べたような，「数学は門外漢」の人に説明しているので細かい

[註 61] 「数学は門外漢」というのは本書の p.4 に出てくる表現です．

[註 62] 学生の指導をしていると，自分でよく分っていない，という自覚のない状態，というのを観測しなくてはならなくなる不幸な状況が生じることが少なくないのですが，そのような状況と本書の著者の状況との間に本質的な違いがあるのか，もしあるとしたらどういうことなのか，ということもぜひ本人と直接話してはっきりさせたい事の 1 つです．

[註 63] ここでは，私がオカルト的と言っているのは数学の内容についてで，本書で数学的内容の回りに厚くまぶしてある “お話” の部分の是非について議論しているわけではありません．

[註 64] もちろん，もっと悪意を持ってわざとおかしなことを書いた，という結論も，本書を読んで得られる情報のみをたよりに判断したときにはありえるのでしょうが，私はたまたま本書の著者と (本書を読んでみる前に) 一度じかに話をしたことがあって，少なくともその時の印象では，ナイーヴな見縊りのようなものはあるかもしれませんが，邪悪な悪巧みが本人の背後にひそんでいるようには思えませんでした．ただし本人にその意志があるかどうかは別として，本書に，数学を貶める，という邪悪な効果があることは否めないでしょうし，もし彼にナイーヴな見縊りがあるとすれば (というより，もしそういうものさえ無いのなら，本書の内容は一体何なんでしょう！？)，それはこの数学を貶めることには貢献しているはずです．しかも，本書を数学者の肩書きを持った人が書いて，日本でメージャーな出版社の 1 つと考えられている (?) ところから出されてしまった，というのは著者本人の問題というより，日本文化の大きな欠陥を示している問題の 1 つとして見逃せないように思えます．

ことを省いているのだ，という言い訳で，白を切りとおせてしまえそうにも思えます．しかし，そのような問題表記の一つ一つでなく，それら全部を全体の文脈の中で見てみると，本人に悪意があってわざと変なことを書いているのでなければ，著者は不完全性定理の本質的な部分を全く理解していない，ことを理解していない，ということが明白になるようにも思えます．

特に，「正しい」，「証明可能である」，といった概念の区別がはっきりついていなかったり，形式化された数学と超数学の区別が全く欠落していたり，日本語で「有限の立場」と誤訳されることもある dem finiten Standpunkt[註 65] についての理解が欠落していること (これは前出の p.185 からの引用文でも既に明らかでしょう) などが，指摘できます．

以下で，このことの根拠となる『無限のスーパーレッスン』からのいくつかの箇所について更にコメントしてみたいと思います．

まず，数学 vs. 超数学に関しては，全体的には有意な区別を全くしていなくて，その段階で，本書の中の発言が意味のあるものになりようがなくなっているのですが，全く認識していないか，というとそうでもなくて，たとえば，次のような文章が見つかります:

> 「$\cdots$ そこでヒルベルトさんは、数学的活動の全体をコピーしたミニチュアを数学の内部に作りあげて、数学の活動そのものを数学の研究の対象とします」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.123)

上の引用で $\cdots$ のところには，ラッセルのパラドックスの話があって，それを解決するためにヒルベルトが云々ということが書いてあって，そのために別の混乱が起ってしまっているのですが，ここではそのことを問題としているのではないので省略します．

ここで書いてある「数学的活動の全体をコピーしたミニチュアを数学の内部に作りあげて」というところが後に続く様々のおかしな発言の根源の 1 つになっているようにも思えます．形式化された数学は，数学活動のミニチュアではなく，できあがった数学 (体系) のすべてです．また，超数学は，それこそミニチュアとして数学の内部に再現することが研究されてもいますが，もともとの超数学は「数学」

[註 65] この「有限の立場」という訳語に問題があることは，広島大学 (本書の著者の所属する大学です) で開かれた 2014 年度数学会での分科会講演 [13] でも言及しました．ドイツ語の finit という形容詞は英語の finite と同じ意味を持つものではなく，ヒルベルトの用法でも，「有限的」という意味ではなく「確定的」とでも訳すべき意味が付与されています．もちろん厳格に確定的なら有限的でもあると言えるのかもしれませんが，両者の関係は非常に微妙です．英語では，“finitary” という造語 (手元の Webster にはこの単語の項目はありません) を使って finitary standpoint と訳されるのですが，かなり頻繁に finite standpoint という誤訳も見受けられます．

の外側で展開されているものです．

『無限のスーパーレッスン』でよく出てくる怪しげな「例え話」を真似て言えば，数学を孫悟空とすると，超数学は御釈迦様です．数学から超数学への視点の移行は，だから，孫悟空の視点から御釈迦様の視点への移行で，この視点の移行で，地の果てに建っていた 5 本の柱は御釈迦様の手の指であることが見えるようになるわけですが，これを更に御釈迦様の視点を外側から俯瞰する視点に移ってそこから見たときに，御釈迦様の内面世界は孫悟空の内面世界のミニチュアだ，と言えるようになるわけではありません．しかも (この例え話を続けることにすると)，無限の思惟を展開しているのは，御釈迦様の世界観ではなくて，孫悟空の内面世界の方なわけです．

> 「すごい不思議に思てたんですけど、正しいて証明できてへんのに、何で正しいゆうてわかるんでしたっけ？」
> 「命題 G が正しくなければ、その数学体系に矛盾が起こる、ということを先ほど証明したわけです。 対偶を取ると、数学体系に矛盾がなければ、命題 G は正しい、ということになります。命題 G、つまり『命題 G には証明がない』が正しいわけですから、命題 G には証明がありません。あくまでも、その数学体系が矛盾を含まない、という状況が起きているわけです」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.177)

これは「正しい」と「証明できる」の区別の混乱の典型的な例の 1 つとなっています．「命題 G が正しくなければ、その数学体系に矛盾が起こる、ということを先ほど証明したわけです。」と書いてありますが，「先ほど証明」したはずなのは，「G の否定の証明 P が与えられたとすれば，ここで考えている数学体系での矛盾の証明を P を変形することによって作ることができる」，ということです．したがって，この主張の対偶は，ここに書いてあることではなく，「数学体系が矛盾しないなら，G の否定は証明できない」です．

そもそも，命題の真偽について議論するためには，命題の (真偽の) 解釈を考える必要があります (一方，「証明が存在する」は記号列としての命題についての，記号の操作に関する主張にすぎず解釈の仲介が必要にはなっていません)．ではこの命題 (の真偽を) どこで解釈するのか？と，考えると，実はこの引用の最初にある質問は，実は大変に難しい問題だということが分ります．

ここで著者が書きたかったことは，むしろ次のようなことではなかったかと思います:

> 本書の表現を使うと，G は「私には (考えている体系での) 証明がない」ということを主張する，と考えられるので，体系が矛盾しないなら (正確に

は ω-無矛盾であるなら) その証明がないのだから，G は正しい．

しかし，これも (多くの本に書かれていて巷でも耳にすることの多い) 間違った議論です．

何が間違っているかというと，“G の証明がない”，というのはこの数学の体系を外から見たときの (つまり超数学 (meta-mathematics) での) 主張なのですが，G が主張している，と考えられる「私には証明がない」は考えている体系内での，証明をコードしている “オブジェクト” が存在しない，ということなので，超数学で証明がない，としても体系 (のモデル) ではおばけのような (non-standard な) オブジェクトが証明をコードしていることがないとは限らないわけです[註 66]．もともと，このような，超数学での証明と体系の中でコードされた証明のボタンの掛け違いを正すのが，本書でも怪しい説明のなされている (pp.180–184 あたり)，fixed point theorem の議論なのですが，ボタンの掛け違いを正した後の G は体系の言語で書かれた論理式 (つまり超数学で見ると記号列にすぎないもの) です．

実はこの問題は専門家にとっても難しいもののようで，いわゆる “専門家” の発言に限って見てみても，色々なところで間違った主張に出会うことが多いものです．Mathematics Stack Exchange で，まさにこの問題の質問に関する記録が残っていて ([33]) 大昔に私のドクターの学生だった Stefan Geschke の答をはじめ，何人もの人が答を寄せています．しかし，Stefan の答を含めてどれも微妙に迷走気味で，一番的を得ているのは，(この節を書いた当時，ヘブライ大学のマギドア先生のところで学位論文を書いて，現在はイギリスの East Anglia 大学に移籍して選択公理に関連する研究のエキスパートとなっている) Asaf Karagila 氏の答 (多分まだ彼がベルシェバで学部生だったころに書かれたものです) であるように思えます．

[註 66] ゲーデルの 1931 年の論文 [19] での第 1 不完全性定理で仮定している ω-無矛盾性 (本書では説明されていません．詳しくは，例えば [10] または，菊池 [31] を参照してください) は，ある意味で，このおばけのようなオブジェクトの存在を禁じるものではあるので，これを根拠に G は正しい，と言うこともできるかもしれなくて，このことは，ゲーデルが 1930 年代初めにこの結果を証明した時点での不完全な理解としては容認できるものだとは言えるかもしれません．ちなみに，ゲーデル自身はこの「正しいが証明できない」という言い方を一般の数学者に説明するときには使っていますが，たとえば，不完全性定理の証明がなされている [19] では注意深く避けています．

> ··· しかし、かと言って、もしゲーデルの第 2 不完全性定理が正しくないような世界があったとして (論理的にそういう世界はありえないので、どういう意味で言っているのかよくわかりませんが)、その世界で、ある数学体系が無矛盾だと自分自身の中で証明できたからと言って、その体系が矛盾を含めば、背理法でどんな定理でも証明できてしまうのでやっぱり無矛盾性は証明できてしまう。つまり無矛盾性の証明がある、ということだけからは、その数学体系が本当に無矛盾なのか、それとも矛盾を含むものか、というのはゲーデルの定理に関係なく判断不可能なんですよ。
>
> (無限のスーパーレッスン，p.186)

ここに書いてあることは，細部は間違ってはいないとも言えるのですが，無矛盾性の証明に対する究極的な誤解を含んでいる，あるいはそれに対する究極的な誤解を読者に植えつけることになる内容のものになっている，ものではあるでしょう．問題となるのは，「ある数学体系が無矛盾だと自分自身の中で証明できたからと言って」とありますが，この「ある数学体系が無矛盾だと自分自身の中で証明」できること自体は，ヒルベルトのプログラムとは直接には関係のないことだ，ということが無視されている点です．もう少し詳しく言うと，ヒルベルトがやろうとしたことは，数学の形式的体系を確定的 (finit) な手続きのみが扱われる世界 (有限の記号の操作の体系) で展開して，そのような体系に関する確定的な推論のみにより数学の形式的体系の無矛盾性を示す (確定的立場 (finiter Standpunkt))，ということでした．だから，そのような体系で無矛盾性が示されたときには，それは本当に体系の無矛盾性を保証する実際に意味のあるものになるはずのものでした．もし，数学全体に対してそのような議論ができたとすると，結果としてそのような厳格な制限の下での議論は，(すべての数学的議論を包含する) 数学の形式的体系でも同様に実行可能になるはずなので，この数学の体系の無矛盾性が数学の体系の中で証明できたことにもなるはずです．ゲーデルの第 2 不完全性定理は，これが不可能なことを示していて，したがって，もともとのヒルベルトの計画の意味での無矛盾性証明も不可能であることが帰結されるわけです．

ゲンツェンの定理の証明は，前出の p.185 では内容的に全く間違った引用のされ方をしていましたが，この定理 (の正しい形のもの) は，1 階の論理上の数論 (ペアノ算術) の無矛盾性が，この算術のごく一部となっている確定的な議論のベースに，そこには含まれていないけれど，ある意味でまだ確定的と言うことのできる ε_0 までの超限帰納法の “確定的バージョン” を付け加えたものから証明されています．

実は，本質的にこれと同じ証明で，古典的な数学 (たとえば現代の大多数の (古典的な数学を研究している) 数学者や理論物理学者が生涯で使うことになる数学のすべて) をすべて含むと思われる体系の無矛盾性が証明できます．したがって，た

とえば,

> 数学が基礎から駄目になってしもて、数学者がおらんようになったとか？
>
> (無限のスーパーレッスン，p.190)

という状況は古典的な数学については全く起っていないと言っていいことになります．それでは，不完全性定理現象と接触する可能性の高いもっと強い理論についてはどうか，というと，ここでも，不完全性定理は,「数学が基礎から駄目」になったことを示しているわけではなく，単に，体系が完全でないこと，また，体系が無矛盾であることのストレートな証明は不可能であること，を言っているだけです．特に，無矛盾であることの証明が不可能であることは，矛盾することの証明が得られた，ということでは全くありません．

次は上で引用した文のすぐ次に出てくるものです:

> 「無矛盾性は証明できないことがわかったんだから、この問題はなかったことにしよう、て感じで、元通り無限をがんがん使って研究を続ける数学者が大半だったと思います。でも転んでもただしゃ起きない、というか、せっかく不完全性定理がわかったんだからそれを使って面白い研究をしよう、という数学者も表（ママ）れます。これまで数学の定理と言えば、『∼ が計算できる』とか『∼ がないことがわかる』とか、何かがわかる話ばっかりでした。ところがゲーデルの定理で初めて『∼ がわからない』という形の定理が見つかったわけです。それでこれを突破口にすれば、何かがわからない、計算できない、というタイプの定理が証明され始めます。· · ·
>
> (無限のスーパーレッスン，pp.190-191)

上の引用の前半は，大多数の数学者の (論理（ロジック）学への敵意を込めた) 視点を代表しているかもしれなくて，だからその意味では，以下に述べることは，一般論というより，大勢に反する意見と言うべきものです．

ヒルベルトは，[23] で,

> この数学の更なる基礎付け（それは証明論とでも呼ぶことが相応しいものである) により，数学の基礎の問題を，そのようなものとして，各々の数学の命題を具体的に認識ができ，厳格に導出することのできる論理式に変換し，そのことによって，すべての基礎の問題を純粋数学の領域に移行させることによって，完全に解決してしまうことができることを信じる．ただし，この課題の完全な遂行のためには，若い世代の数学者たちの献身的な貢献が必要になる． ([23], 日本語訳: 渕野 昌)

と書いています．これは不完全性定理の発表される数年前のことですが，どこか別のところでは，「数学者は，この課題 (ヒルベルトのプログラムのこと) が遂行されたときには，論理学を忘れて安心して数学に帰ることができる」というようなことも書いています．

不完全性定理によって破綻したのは，ヒルベルトのプログラム自身ではなく，ヒルベルトの思っていたようなヒルベルトのプログラムの完全な遂行でした．つまり，不完全性定理によって，この，数学者が「論理学を忘れて安心して数学に帰ることができる」，という状態にはどこまで行ってもならない，ということが証明されたわけです．だから，「問題はなかったことにしよう」という態度は，数学の本質から目をそむける，という消極的な意味しか持ちえないことが明らかになった，とも結論できるはずです．

それにもかかわらず，大多数の数学者が実際今だに「問題はなかったことにしよう」と思っていたり，本書の著者のように非常に不完全な不完全性定理に対する理解を示すに留まっている，ということが何を意味するのかは，数学者のコミュニティーを対象とするアンソロポロジーでの，大変に興味のある研究テーマの１つになるだろうと思います．

上の引用の後半での 「ゲーデルの定理で初めて『∼ がわからない』という形の定理が見つかったわけです。」はここでも，真理と，真理の認識，具体的に与えられた証明，証明の存在，という互いに異る概念を混同しているように思えます．ゲーデルの不完全性定理では『∼ が証明されない』（つまり，体系に関するゲーデル文が体系で証明されない，ゲーデル文の否定がこの体系で証明されない (第 1 不完全性定理)，体系が無矛盾であることの主張に対応する命題がこの体系で証明されない (第 2 不完全性定理)）ことが**証明されて**います[註67]．

ここでの『∼ がわからない』を『∼ が証明できない』と読み替えて，その後の文章を，「何かが証明できない、というタイプの定理が証明され始めます。」と書き換えると，ある意味ではその主張の正当性の認められる文章にすることができますが，少なくとも「計算できない、というタイプの定理」に関しては，数学史でのステートメントとして見たときには問題が残るものになっているように思えます．たとえば，「5 次以上の多項式の根が，四則演算と根号を使った計算式で計算できない」(ガロア) や，「π を多項式の根として計算できない」(リンデマン[註68])．など，不完全性定理以前のこのタイプの結果がいくつも思いつくからです．これらも含めて，本書は数学史に関して，色々と不正確な主張が含まれているように思えますが，これについては，第 6 節で更に見てゆこうと思います．

[註67] 最後の太文字で書いた “**証明されて**” は超数学 (meta-mathematics) での意味の証明です．

[註68] ちなみに，リンデマンはヒルベルトの先生です．

3　クラスと矛盾する数学体系

どんな数学の体系も絶対に矛盾しないか，というと，もちろんこれはそうではなくて，意味のある公理系と考えて導入された体系から後で矛盾が示されてしまった，という例も歴史上いくつかあります[註 69]．この話をするために，まず，本書での「クラス」に対する間違った説明を訂正しておく必要があります:

> 「集合全体が集合ないんやったら、一体何になるんですやろ？」
> 「集合全体は、集合ではなくて、クラスと呼ばれます」
> 「呼び方を変えたらそんでええ、ちゅんですか？ ほな、クラスの全体は何になるんですか」
> 「あ、それは聞いたことがありませんね。岬先生、どうなるんでしょう？」
> 「集合じゃないものは数学的対象としては存在しないものだから、とりあえず考えないことにしていると思うわよ。クラスっていうのも呼び名がなければ不便だから便宜的にそう呼んでいるだけで、数学の議論の中ではクラスを使っちゃいけないの」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.163)

これでは，「群の全体はクラスだから数学では群論はやってはいけない」,「線型空間の全体はクラスだから数学では線型代数はやってはいけない」etc. ということにはならないでしょうか？ 数学が苦痛の種になっている人にとっては，これは朗報と言えるのかもしれないですが….

まず,「クラス」は「集合」を拡張する概念となっていることを確認しておきましょう．クラスとは，ある性質 (集合論を記述している形式的体系での論理式[註 70]) φ で，$\{x : x$ は φ を満たす$\}$ として与えられるもののことです．これは集合になる (ことが集合論の公理系から証明できる) ときもあり，集合にならない (ことが集

[註 69] これが “いくつも” ではなくて “いくつか” にすぎないのは，数学者が新しい公理の体系を導入するときには，その背景には強い数学的直観が働いていて，大概の場合，その直観が何らかの数学的実体を正しく見据えているからでしょう．だから以下に述べる，Reinhardt cardinal の存在公理に関する展開は，この公理が案出された 1970 年代には，巨大基数に関する直観を十分にサポートするだけの理論がまだ構築されていなかった，ということを示しているものである，と解釈することもできるかもしれません.

しかし，次のように考えることもできます: 選択公理を集合論の公理系から落としたときには，この Rinhardt の公理が矛盾するかどうかについては (現在に至るまで) 未解決です．このことは，むしろ，Reinhardt がこの公理を提案したときの彼の直観の，ある意味での正しさを物語っている，とも解釈することができるようにも思えるのです.

[註 70] 論理式には (たとえばすぐ次に出てくる $\{x : x$ は $x \in a$ を満たす$\}$ での “a” のように) パラメタが含まれていてもよいものとします.

合論の公理系から証明できる) こともあります．たとえば，集合 a が与えられたときには，a は $\{x : x$ は $x \in a$ を満たす$\}$ というクラスとして表現することができます．「集合全体」は，$\{x : x$ は $x = x$ を満たす$\}$ です．これが集合にならないことの証明は，たとえば，まず，ラッセルのクラス $R = \{x : x$ は $x \notin x$ を満たす$\}$ が集合にならないことを証明しておいて[註 71]，背理法で，もし，「集合全体」が集合になるとすれば，分出公理から R も集合になってしまうので矛盾である，として示すことができます．この証明をもう一度よく見てみると，ここで使われている公理は外延性公理と分出公理のほんの一部にすぎないことが確認できます．したがって，「集合全体」が集合にならない，という結論は ZFC の公理のごく一部だけを仮定するようなごく弱い集合論を考えても避けることのほとんど不可能なものであることがわかります[註 72]．

このことは，言い方を変えると，“$a = \{x : x$ は $x = x$ を満たす$\}$ となる集合 a が存在する” という “公理” を集合論に加えると (公理系から選択公理や基礎の公理などをはずしていたとしても) 矛盾する，ということでもあります．ちなみに，集合論を創設したカントルは，集合論の体系を公理的に考えることは積極的にはしなかったのですが，彼の考えていたことが，この，“$a = \{x : x$ は $x = x$ を満たす$\}$ となる集合 a が存在する” という公理を含んでいたものに相等すると解釈して，「カントルの集合論は矛盾していた」というようなことを言う人がいるようです．しかし，実際には，カントルは集合とクラスの区別を「完結した集合」 (fertige Menge, konsistente Menge) とそうでないもの，というような言葉で区別していて，この区別により集合論から矛盾は生じないのだ，という説明をヒルベルトあてた手紙の中で書いています．Akihiro Kanamori はツェルメロ全集の解説の中で，ヒルベルトはこの手紙の内容をツェルメロに話していた可能性がある，と述べています．また，1899 年にデデキントに送った手紙の中の，やはりパラドックスの回避に関する議論で，ツェルメロによる [43] でのような集合論の公理化の基本的な部分に対応するアイデアをカントルが書き記していることが，後になって発見されています．これらのことや，カントルの集合論での仕事は，後にすべて ZFC の中で再現されることが確認されていることから，この「カントルの集合論は矛盾していた」とい

[註 71] これはラッセルのパラドックスの議論そのものです: もし，$a = \{x : x$ は $x \notin x$ を満たす$\}$ となる集合 a が存在するとすれば，$a \in a$ か $a \notin a$ のどちらが成り立つが，もし $a \in a$ すれば，a の定義から $a \notin a$ となり矛盾だし，$a \notin a$ としても，ふたたび a の定義から，$a \in a$ となってしまい矛盾です．

[註 72] すべての集合を集めた $\{x : x$ は $x \notin x$ を満たす$\}$ が集合にならないことは，カントルの定理を用いて示すこともできます．$a = \{x : x$ は $x \notin x$ を満たす$\}$ となる集合 a があったとすると，$\mathcal{P}(a)$ の各要素は，すべての集合を含んでいる a の要素となるので，$\mathcal{P}(a) \subseteq a$ が言えることになりますが，これは，a から $\mathcal{P}(a)$ への上射が存在しないことを主張するカントルの定理に矛盾です．

う表明は不適当なものであると言えることがわかります．

同じように，「素朴集合論は矛盾していた」という表明が聞かれることがありますが，この「素朴集合論」もこの言い方でいくつもの異なる対象を指すことがあるので，その意味できわめて不正確で，ミスリーディングな表現になっていると言えます (“ 素朴集合論” が指しえる理論のリストが英語版のウィキペディアの Naïve Set Theory の項 [41] にあります).

もし，どうしても「矛盾していた」と言いたいのなら,「フレーゲの集合論は矛盾していた」というのは，嘘でない表現になっていると言えるかもしれません．これは，ごく平たく言うと，フレーゲが数学は論理であるという哲学的立場から数学の基礎づけを行なおうとしていたことから，集合の非存在定理としてのラッセル，ツェルメロ，カントル，ヒルベルトらの逆理，という見方を採用することができなかった，あるいは，したくなかったという背景があるからです．しかし不思議なことに，この「フレーゲの集合論は矛盾していた」という表明はあまり聞かないように思います．哲学の人たちの間では，個人崇拝のような文化があって，この「フレーゲの集合論は矛盾していた」や「ヴィトゲンシュタインは不完全性定理を全く理解していなかった」というような偉大な哲学者たちに対するネガティーヴな表明はタブーになっている，ということなのかもしれません．

集合全体のクラスはアルファベットの ‘V’ で表されることが多いので，ここでもこの記号をこの意味で使うことにします．$V = \{x : x$ は $x = x$ を満たす$\}$ です．

集合ではないようなクラスのことを真のクラス (proper class) と言います．真のクラスは,「呼び方を変えたらそんでええ」ということではなくて，集合とは大きな相違点が2つあります．1つは，他の集合やクラスの要素になることができない，というより，それが集合でないことから，そもそも他の集合の要素になるかどうかということを議論することができない，ということです (これに対し，あるクラスにある集合が要素として属すかどうかは，正当な設問です)．もう1つは,「すべてのクラス X に対して $\cdots$ が成り立つ」というようなクラスの量化 (quantification) ができないことです．それらのことを除くと，クラスは集合と同じように扱うことができます．そもそも，クラス $\{x : x$ は φ を満たす$\}$ は性質 φ の言い換えにすぎません．集合 a に対し a がクラス X に属す (記号: $a \in X$) と言ったときには，これは,「a は φ を満たす」という主張の言い換えにすぎない，と考えることができます．集合算と同じような関係をクラスに対して導入することもできます．たとえばクラス X がクラス Y の部分クラスである (記号: $X \subseteq Y$) というのを，すべての集合 x に対し，$x \in X$ なら，$x \in Y$ となること，として定義することができます．結局のところ，$X = \{x : x$ は φ を満たす$\}$, $Y = \{x : x$ は ψ を満たす$\}$ のとき，$X \subseteq Y$ は，“すべての集合 x に対して 「φ なら ψ」 が成り立つ” という主張の言い換えにすぎません．

クラスのクラスはもう少し微妙ですが，パラメタつきの性質を考えて，このパラメタの変動範囲 (集合または真のクラス) をクラスのクラスと解釈する，という方法で通常の議論に対しては十分な対処ができます．

以上は標準的な集合論の公理系であるツェルメロ・フレンケル集合論 (ZFC) でのクラスの扱いですが，フォンノイマン・ベルナイズ・ゲーデル集合論 (NBG) やモース・ケリー集合論 (MK) など ZFC の拡張で，クラスやクラスのクラス等を体系のオブジェクトとして扱えるようなものもあります．

これまでに書いたことで，クラスが『無限のスーパーレッスン』に書いてあるような怪しいものでないことを納得してもらえたことを前提として，この節の初めに書いた，「意味のある公理系と考えて導入された体系から後で矛盾が示されてしまった」例の 1 つについて話してみたいと思います．

あるクラス j が集合の組からなっていて，各集合，a に対し $\langle a,b\rangle \in j$ となる b が一意に存在するときには，j は各集合 a にこのような b を対応させる V 上の関数をあらわしていると考えることができます．このような j のことを V 上のクラス関数と言うことにして，普通の関数と同じように，$\langle a,b\rangle \in j$ のとき，これを $j(a)=b$ と書くことにします．真のクラス $M \subseteq V$ が内部モデルである，というのを M は推移的で[註 73]，集合の要素関係 $\in$ を M に制限して考えたとき，M が集合論の公理をすべて満たすこと，とします．V 上のクラス関数 j が，すべての集合 a に対し $j(a) \in M$ となるようになっているとき，j は V から M へのクラス関数であると言って，これを $j : V \to M$ とあらわすことにします．このような j が，(集合論の言語での論理式で表わせるような) 性質をすべて保つとき (つまり，すべての $a \in V$ と性質 φ に対し，a が V で φ を満たす $\Leftrightarrow$ $j(a)$ が M で φ を満たす，が成り立つとき[註 74])，M への初等的埋め込みである，と言います．たとえば，j を恒等写像 $\{\langle x,x\rangle : x \in V\}$ とすると，$j : V \to V$ は自明な初等的埋め込みとなっています．

我々が考察することのある，大きな巨大基数の存在を主張する公理 (巨大基数公理) の多くは V 上の初等的埋め込みの存在に関する主張として特徴づけられる

[註 73] クラス A (集合でもよい) が推移的であるとはすべての集合 x, y に対し，$x \in A$ で $y \in x$ なら $y \in A$ となることです．近代的な集合論では，順序数を，推移的で $\in$ がその集合上で線形順序になっているようなもの，として定義するので，推移的な真のクラスは，すべての順序数 (したがって基数も) を含むものになることを示すことができます．

[註 74] この性質は普通には，「すべての自然数 n と $a_0,\ldots,a_{n-1} \in V$ に対し，$a_0,\ldots,a_{n-1}$ が V で φ を満たす $\Leftrightarrow$ $j(a_0),\ldots,j(a_{n-1})$ が M で φ を満たす」として表現されることが多いのですが，V で ZFC が成り立っていることから，$a_0,\ldots,a_{n-1} \in V$ は，$a=\{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$ として，$a \in V$ と書きなおせるので，ここで書いたような 1 つの変数に関する主張としてあらわすことができるのです．

ことが知られています[註 75]．たとえば，κ が可測基数である，ということと，ある V の内部モデル M と初等的埋め込み $j : V \to M$ が存在して，κ が $j(\alpha) \neq \alpha$ となるような最初の順序数になっている，ということは同値になります (α が $j(\alpha) \neq \alpha$ となる最初の順序数のとき， α を j の critical point と呼び $crit(j)$ と表すことにします)． 行き先の M が強い閉包性を持っていて，$j(\kappa)$ がいくらでも大きくできるとき，κ はもっとずっと大きな (強い超越性を持つ) 巨大基数になります．たとえば，κ が，可測基数より本質的に大きいことが知られている超コンパクト基数 (supercompact cardinal) であるというのは，任意の $\gamma \geq \kappa$ に対して，内部モデル $M \subseteq V$ で，すべての M の元の長さ γ の列 $\vec{a}$ に対し $\vec{a} \in M$ が成り立つようなものと初等的埋め込み $j : V \to M$ で，$\kappa = crit(j)$ で，$j(\kappa) \geqq \gamma$ となるものが存在すること，として特徴づけられます．ただし，少し前に書いたように，クラス j の “存在” はそのままでは表現できないので，このことの定式化には若干注意を必要とします．

内部モデル $M \subseteq V$ で究極の閉包性を持つものは V 自身なので，上に書いたような状況を背景に W.M. Reinhardt は，究極の巨大基数となるべき，初等埋め込み $j : V \to V$ の critical point κ を考えることを 1960 年代の終りに提案しました．ところが，Reinhardt の提案した基数の存在は ZFC と矛盾することが K. Kunen によって 1970 年ごろに証明されてしまったのです[註 76]．

この “事件” は，集合論の研究者，特に巨大基数とかかわりのある集合論を研究している研究者にとってはまさに宇宙を揺がす大事件でした —— 集合論では，V のことを集合の宇宙 (universe) と呼ぶことがあるのでそれを頭に置いて言ってみているのですが ⋯．当時，同じ初等的埋め込みを介して特徴付けのされる超コンパクト基数や，もしかしたら可測基数まで，同じようにそれらの存在から矛盾が導かれるのではないか，という感覚を持った人も少なくなかったのではないかと思います．また，ロジックを研究している人で，集合論からは遠い分野の研究をしている人たちの一部に「やっぱり集合論の研究をしてもしょうがないんだ」とか，そこまではいかなくても「巨大基数なんて矛盾しているから考えてもしょうがない」というような考え方が広まったように思えるし，高名な “数学者” や “ロジシャン” が，この「集合論の研究をしてもしょうがない」という “意見” の表明を軸にして，政治的な anti 集合論のキャンペーンをはる事例も実際にいくつかあったようです．

しかし，この Kunen の Reinhardt 基数の非存在の証明は，それが証明されておしまいになったわけではなく，その後，この結果の証明が更に分析されること

[註 75] 以下の巨大基数に関する話は，より詳しくは，例えば Kanamori [29] を参照してください．

[註 76] 本テキストの筆者は，Reihnardt 基数について，最近 [14] でも，ここでとは少し違った角度から解説しています．

で，矛盾に近い領域で何が起っているかについての知識が深められることになりました．

Kanamori [29] の Chapter 5 には，この Kunen の定理の，Kunen 自身による証明以外に，Hugh Woodin と原田幹夫による更に 2 つの別証明が書かれていて，それらの証明の分析から見えてくる Reinhardt 基数の存在からのどの帰結が，どういうふうに矛盾を導いているのかということに関する知見から，それらの帰結をさける形で定義された，現在まで矛盾することの証明が見付かっていない，いくつかの “巨大な巨大基数” の概念が論じられています．

また，これら 3 つの Kunen の定理の証明では，いずれのものでも選択公理が本質的に使われているのですが，集合論の公理系から選択公理を除いた体系 (ZF) に Reinhardt 基数の存在の公理を付け加えた体系が矛盾するかどうかは，現在も未解決の問題です[註 77]．

現在では，超コンパクト基数やそれより “小さい”[註 78] 巨大基数については，これまでに得られている多くの数学的結果の整合性から，私も含めた多くの研究者によって “存在する” 基数 (つまりそれから矛盾が導かれることがないと思われる基数) と信じられるようになってきていると思います．YouTube で見ることのできるインタヴューやパネルディスカッションなどで，上でも名前をあげた Hugh Woodin は，彼の名前のつけられた Woodin 基数 [註 79] が存在しない (つまり ZFC とその存在をあわせた公理系が矛盾する) ことになることが万一あれば，そのときには，大学の職 (彼は最近バークレイからハーバードに移籍しています) を辞する，と公

[註 77] もちろん不完全性定理の縛りがあるので，この体系が無矛盾であることは証明されようがないのですが，起こりえるシナリオとしては，この体系「ZF + Reinhardt 基数の存在」からの矛盾の (具体的な) 証明が得られる (つまり ZF から Reinhardt 基数の非存在が証明される) か，または，選択公理を含めた集合論の公理系 ZFC に何らかの巨大基数を付け加えた体系で，「ZF + Reinhardt 基数の存在」の無矛盾性が証明される，ということのどちらかが起きる，という形での問題の解決が考えられます．しかし，この問題が考察されはじめてから，もう 40 年以上の時間がたっており，その間多くの研究者がこの問題にアタックしているので，この公理系から矛盾が導きだされる，という最初のシナリオの可能性はかなり低いと見ていいのではないかと思います．

[註 78] ある種類の巨大基数は，基数の全体の中に共終的に存在することもありえるので，そのような巨大基数の性質を他のやはり基数の全体の中で共終的に存在しうる巨大基数と大小関係で比べることはできないのですが，巨大基数 (の性質) A が巨大基数 (の性質) B より小さい (あるいは弱い) というのを，(1) B の性質を持つ基数はすべて A の性質を持つが逆は成り立たないこと; (2) B の性質を持つ基数の下に A を持つ基数が沢山存在することが示せること; (3) 「ZFC + B の性質を持つ基数が存在する」から，「ZFC + A の性質を持つ基数が存在する」の無矛盾性が証明できる，のうちの少なくとも 1 つが成り立つこと，として理解できます．もちろん (3) が巨大基数の概念の大小の比較になっている，というのは第 2 不完全性定理の理解に基いています．

[註 79] ここでは定義は省略しますが，Woodin 基数は，可測基数と超コンパクト基数の間のどちらかというと超コンパクト基数よりに位置する基数です．

言しています．

とは言っても，不完全性定理により，巨大基数の理論はおろか，ZFC 自身から矛盾が導かれる，という状況が起こらない，ということさえ 100% の保証はどこにもないわけで，あなたが生きているうちに，そのようなドラマチックな展開が数学の世界で起こることは絶対にない，と言いきることはできません．

学校に行くのがいやでいやでたまらない子供の中には，学校が火事で焼けてしまえばよい，と考えて本当に学校に火をつけてしまう人もいたりします．数学についても，数学の議論についてゆけなくてフラストレーションをためている "数学者" の中には，数学の矛盾が見つかって数学がなくなってしまえばよい，と思っている人が沢山いるかもしれません．しかし，Reinhardt 基数の例でも見られるように，仮に数学 (たとえば ZFC) に何らかの矛盾が見付かったとしても，そのことでそれまでの数学が無意味になることは多分なくて，その矛盾を迂回して，その矛盾の証明で用いられたテクニックさえも含めて，数学は更に発展してゆくことになるでしょう．ただし，人類の知性が終りを迎えない限り，数学が終りになることもない，という保証があったとしても，人類の，あるいは人類の知性の終りの方が案外すぐに来ることになるかもしれませんが … .

4　直観主義と数学

『無限のスーパーレッスン』では，直観主義に関する記述でも問題があるように思えるものが少なくありません．たとえば，

> 「いや，それこそ歴史の皮肉なのですが、そのヒルベルトの名誉市民記念講演の前日、まさにその同じ町、ケーニヒスベルクで行なわれていた学会で、ゲーデルという若き数学者が『不完全性定理』という新発見を発表します。これはまさしくブラウワーがその可能性を指摘していた、YES でもないし NO でもない、そんな問題がありうるのだ、という定理でした。· · ·」
>
> (無限のスーパーレッスン，pp.169–170)

「ブラウワーは YES でもないし NO でもない問題がありうるのだと指摘した」というのは一体どこから出てきたのでしょうか？

ブラウワーや彼の直観主義についての基本文献を何か 1 つでも読んでいれば，「ブラウワーは YES でもないし NO でもない問題がありうるのだと指摘した」というような奇妙なことを書かずに済んだと思うのですが⋯．たとえば，インターネットで閲覧できる文書のに限っても，Iemhoff [27] のようなコンパクトでしかもポイントのよく押えられたものが見つかります．ちなみに，[27] が含まれている

Stanford Encyclopedia of Philosophy は科学哲学や科学，数理論理学，数学までを含む，非常にレベルの高い数学の哲学に関する「インターネット事典」で，「不完全性定理」，「選択公理」，「無限」，「ブラウアー」など，『無限のスーパーレッスン』が正しく扱いそこなっているキーワードのほとんどすべてがカバーされていますし，ほとんどすべての項目が非常によく書かれています．以下で述べるブラウワーの直観主義も [27] からの記述を部分的に借りたものになっています．

数学で通常用いられる古典論理が神の視点からの論理なのに対して[註 80]，ブラウワーの主張した直観主義は，人間の視点での論理を目指しています．特に数学の命題 A が「正しい」，というのは，それが精神活動によって正しさの証明が得られたこと，と解釈します．この精神活動の主体は各個人になるわけですが，solipsism の立場で論じているわけではなく，異る個人に同じ精神活動が惹き起こされることで，数学者の間の伝達が行なわれると考えるようです．この視点に立って数学の命題を考えると，たとえば，リーマン予想のような，まだそれが証明も反証もされていない命題 R に対しては R も R の否定 $\neg R$ も正しくないことになるので，$R \vee \neg R$ は正しくない，ということになります．このことから，直観主義では排中律が必ずしも成り立たない (つまり一般的な推論規則としては用いることができない)，ということが帰結されることになるわけですが，本書の著者はこれを「YES でもないし NO でもないこと」と勘違いしたのでしょうか？

もちろん，ブラウワーの立場で，数学の議論を制限することにして，その制限が本質的なものになっているのなら，必然的に，古典的な論理を用いて証明できる命題のうちで，証明できないものが出てきてしまうことになるので，そのような意味の不完全性は，当然予想されるものになるわけですが，このことは，ブラウワーの論点とは異るように思えます．

通常数学の証明は古典的な論理によって行なわれているわけですが，そのような証明での排中律に対する不安は，次のような証明を見てみると理解できると思います．

定理 4 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明． もし $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数なら，$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ とすればよい．そうでないなら，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ とすれば，

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって (排中律から) 定理の命題が成り立つ． ❑ (定理 4)

[註 80] ここで神と言っているのは一神教の神のことです．

実は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数となることは知られているので[註81]，この結果を使えば，排中律を用いない証明ができるのですが，上の証明では，「$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数となる」ということの真偽に頼ることなく，a^b が有理数となる無理数 a, b の存在が示されているわけです．この証明がなんとも腑に落ちない，という感覚は，直観主義を擁護するものと言えるでしょう．

現在では，直観主義は，数学思想としてというより，構成的数学の一種として研究されている，と言っていいと思いますが，そうだとしても，本書の著者がやっているように，これをぞんざいに扱っていいわけではないでしょう．

上の説明だけでも，ゲーデルの不完全性定理とブラウアーの直観主義の関係が，著者が言っているようなものではあり得ないことが分ると思いますが，事実としては，ゲーデルは不完全性定理を得る少し前にブラウアーの講演を聞いていて，だから，不完全性定理を証明したときには，ブラウアーの思想から何らかの影響を受けていたと主張する議論もあります．一方，ブラウアーの論敵だったヒルベルトの超数学も，ブラウアーの直観主義がその手本になっていると指摘されることがあります．実際，ヒルベルトの意味の確定的立場(finiter Standpunkt)は，ブラウアーの直観主義を更に制限したようなものになっていることが見てとれます．

本書の著者は，このような歴史的な関連を小耳にはさんでいたことから，全部を一緒くたにして，「... ゲーデルという若き数学者が『不完全性定理』という新発見を発表します。これはまさしくブラウワーがその可能性を指摘していた、YES でもないし NO でもない、そんな問題がありうるのだ、という定理でした。」という発言が，出てきてしまったのでしょうか？

[The rest will be written soon.]

5　連続体仮説 (の不在)

『無限のスーパーレッスン』では，無限集合論の濃度の話は出てくるのに，連続体仮説の話は全く出てきません．これはとても不思議に思えます．もし本書の著者の木村さんが，「無限を考えるとこんな不思議なことが出てくる」ということを「数学は門外漢」の読者に一生懸命訴えようとして本書を書いているのだとすると，この “こんな不思議なこと” は，現代の数学ではいずれにしてもいたるところで使う

[註81] 1934 年に Gelfond と Schneider によって独立に証明された，現在 Gelfond-Schneider Theorem と呼ばれている定理のほとんど自明な系として示すことができます．実は，この定理により $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数であるばかりでなく，超越数であることも示せます．

ことになる[註 82]，選択公理についてのことではなく，連続体仮説についてのことであるはずだからです．

もし，著者の木村さんが，選択公理を含めて，この本に書いた他のことは，本に書ける程度に理解したと思ったが，連続体仮説についてはそう思わなかったのだとすると，ここまでで議論してきた，彼が理解したと思っていることの不正確さの度合を頭に置いて，この本に書くに至らなかった理解が，どのようなものだったのだろうか，というのは，恐いもの見たさ的な興味を多いにそそられます．

連続体仮説は，未だ未解決の問題で，しかもその未解決であることのありようは，数学の，他の未解決問題とは，大きく異なるので，これについて生半可な解説が書かれなかったこと自体は，大いに歓迎すべきことではあるのですが，それならそもそも何で本書を書いたのか？ というミステリーは依然として残ってしまいます．

以下では，この，木村さんが書かなかったことが，何だったのかを検証するために，連続体仮説の解説のようなものをしておこうと思います．

連続体仮説は，選択公理を仮定するかどうかで，微妙に異なる内容の仮説になります．

選択公理なしでの連続体仮説の可能な記述の一つは，「実数からなる任意の無限集合 X について X が可算でないなら，X と $\mathbb{R}$ の間に全単射が存在する」というものです．

一方，選択公理の下での連続体仮説の通常の記述: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ は，実数の全体の整列可能性を導くので，選択公理の一部を内包するものになっています．これらの 2 つの連続体仮説の記述は，選択公理を仮定すると同値になりますが，選択公理の仮定なしでは，後者から前者が導けるけれど，同値性は証明できません．たとえば，22 ページで触れたソロベイの定理の証明で構成された集合論のモデル (これは可算選択公理は成り立つが，フルの選択公理は成り立っていないようなモデルです) では，前者の意味の連続体仮説は成り立ちますが，$\mathbb{R}$ 上には整列順序が存在しないので (もし存在すれば，それから非可測集合が作れてしまいます)，後者の連続体仮説は成り立っていません．

選択公理を仮定したときの連続体仮説については，[6], [9], [12], [17] などでも書いたので，そちらも参照してください．特に，[6] では，連続体仮説から導かれるいくつかの定理についての言及があり，[9] では，連続体仮説の “数学的な” 特徴付けが，幾つか紹介されています．

もし，木村さんが，連続体仮説は，数学とは無関係な仮説だ，という理由で『無

[註 82] たとえば，大学で理学系の学生が，学部の初年次に習うことになる，微分積分や線型代数でも，選択公理が用いられている局面がいくつかあります．

限のスーパーレッスン』で取り上げないことにしたのだとすると，そこで述べた Erdős の定理や Erdős-Kakutani の定理は，そのような主張に対する異議となっていると言えるのではないかと思います．

実は，[9] で取り上げなかった，次の 2 つの連続体仮説の特徴付けは，もっと直球で普通の数学の命題の形をしていると言えると思います．これらの定理は，いずれも選択公理の仮定のもとで成立しているものです．

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 C が雲であるとは，ある点 $p \in \mathbb{R}^2$ から見ると，どの方向にも C の要素は有限個しかないこと，とします．有限集合は雲ですが，ある点からの方向は連続体個あるので，雲は連続体濃度でありえます．例えば，単位円は連続体濃度の雲の例の一つです．

定理 5 (Péter Komjáth, 2001) 連続体仮説は，$\mathbb{R}^2$ が 3 つの雲で覆えること，と同値である． □

定理 6 (Michał Morayne, 1987) 連続体仮説は，$\mathbb{R}^2$ を覆うペアノ関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で，各点で，少なくとも片方の座標成分が微分可能となっているようなものが存在すること，と同値である． □

[The rest will be written soon.]

6 数学史と数学史観

日本の “数学界” では「数学史」の研究は現役を退いた数学者が余生の趣味 (または執念？) でやるもの，というような暗黙の了解があるのではないかと思います．そしてこの余生の趣味は，時代劇や歴史小説を歴史学と混同するのと同じレベルで行なわれていることが多いようにも見えます．

もちろん，本物の数学の歴史を研究しようと思ったときには，当然，現代にまでいたる数学そのものを深く理解していることが前提となるので，必ずしも歴史のエキスパートでない数学者が数学の歴史について発言したり研究したりすること自身は不可避だし，意義のあることでもあるのでしょう．数学史の研究ができるために必要となる “総合力” はシニアな数学者が手にしていることが多いとも思います．しかし，そうだからといって，数学史の研究が，今世紀の数学に加担することを全くやめてしまった人の余生の趣味のようなものでよい，ということではないでしょう．

私が日本数学会で所属している分科会は「数学基礎論と数学史」という組物になっているので，「あんたのところの分科会に所属していると「歴史の人」になっても目立たないでいい」というような皮肉を言われることがあります．しかし，数

学史の研究に対して，このような皮肉が成立しうる状況自体，何としても打破すべきことだと思っています．

『無限のスーパーレッスン』の中でも，この時代劇的数学史や，歴史小説的数学史が横行しているように思えます．ここではいくつかの例を挙げてそれらについてのコメントを付すに止めます:

バナッハ・タルスキーの定理を彼等が, 選択公理「はあまりに強力だから、ちょっとまずいんじゃないか」ということを言うために発表した，としか読めない記述が本書の p.201 にあることは既に述べました (本テキスト 22 ページ)．この表明が少なくとも歴史的事実を反映していないことは既にそこで述べた通りですが，自分の言いたいことを歴史的人物に言わせる —— しかもこの場合，この言いたいことが的をはずれているわけですが ——，という「時代劇的数学史」の典型的な例の 1 つと言えるでしょう．

次の引用も歴史的な文献の (意識的な？) 誤読ないし誤訳から生じたと思える歴史的事実の歪曲の例と言えます:

> 「今、囲み記事のヒルベルトの第 2 問題 (158 ∼ 159 ページ) の原文を読んでみたんだけど、整数が存在するのは当たり前ということになっていて、実数の存在が問題になっているのね。私、何となくここでは整数の公理の無矛盾性を問題にしているのかと思っていたわ」
>
> (無限のスーパーレッスン，p.156)

「囲み記事」というのは，ヒルベルトの [22] 第 2 問題に関する部分の日本語訳 (と思われる文章) です．誰の訳とも書いてないので，著者自身の訳ないし翻案と考えていいのでしょう．英語圏では，原文 [22] でなく，Mary Frances Winston Newson による 1902 年の英訳の方が読まれているようなので，こちらの方からの翻訳かもしれません．ところが，この翻訳はいずれのものからの翻訳としても，内容的に不正確で，上の引用や，前出の p.163 からの引用での問題は，もしかするとこの翻訳の不正確さに由来する考え違いかもしれません．それで，以下では，この翻訳の問題点を見てみることにしたいと思いますが，まず，上の p.156 から引用した部分について言うべきことを述べておきたいと思います．

「整数が存在するのは当たり前ということになっていて、· · ·」とありますが，これは，本書の「囲み記事」の訳文でも全くそのようには読めないように思えます．ヒルベルトはここで，実数を公理化した体系の無矛盾性について述べているわけですが，整数の体系は，実数の体系に含まれているので，実数の体系の無矛盾性が厳格に確定的立場(aus dem finiten Standpunkt)から示されれば，その部分体系としての整数の体系の無矛盾性も示されたことになります．ヒルベルトがこの文章を書いたのは，彼が論理学の研

究を本格的に始めるより前のことだったので，ここではまだ，1 階の論理の概念も確立されておらず，アルキメデスの原理や完備性など，現代の視点から見ると，どこでどのように表現されるべきかが不明なものを公理として採ろうとしていて，彼がここで言っていることは多分に勇み足の感があるのですが，そうだとしても，後の確定的立場(vom finiten Standpunkt)の考え方の根本になっているアイデアを含め，方向としては，何が問題なのかは驚くほど正確に押えられていると言えます．

本書では，ここでの話の後，p.164 の「選択公理は超限帰納法を使ってよいこと」の話などに続けて，すぐに不完全性定理の話に移行しているのですが，これでは歴史的な事実に対して大変ミスリーディングな書き方になってしまいます．

ゲーデルの仕事は，この 1900 年のヒルベルトの論文への否定的な答としてなされたのではなく，1920 年代の後半までに [24] で纒められることになるヒルベルトの論理学の研究の成果や，更にこの研究成果に最後の一筆を付け加えた，ゲーデル自身による「完全性定理」を前提として，それらの結果を背景にした，したがって，1900 年の時点での知見よりはるかに精度の高い言葉で記述されたヒルベルトの計画に，否定的な答を与える形でなされているからです．ただし，この「否定的」というのが全否定ではないことは，既に議論した通りですし，[19] でもそのことはゲーデル自身が強調していることでもあります．

上の引用での，「実数の存在が問題になっているのね。」というのも，二つの意味で問題があります．まず，ここで「問題になっている」のは個別の実数ではなくて，実数上の基本演算 (や解析関数など) を伴った実数の全体の体系の存在であることがこの言い方ではうまく伝わらない，ということです．既に見たような本書の多くのおかしな内容を思い出すと，うまく伝わらないだけではなく，著者はこの区別が自分でも分っていない可能性も否定できないわけですが (同様の言葉の不正確さについては，下で，[22] の，この第 2 問題に関する部分の，著者の訳文について精査するときに，改めて指摘しなくてはならなくなります)．まあ，これは，著者の問題だけではなく，文法的な複数を持たない日本語の問題，と言うべきかもしれませんが，もう一つの方は，ここで議論しようとしている数学史にからんだ問題として，無視できないものです．

Hilbert [22] を見ると，ヒルベルトは，この第 2 問題の記述で，最終問題としては，(関数全体の集合や超限順序数を含む) カントルの集合論の無矛盾性証明までを目指していたことが分ります．実数論 (解析学) の無矛盾性[註 83] は，とりあえず

[註 83] これも，本書ではきちんと説明していないことの一つなのですが，解析学では，実数関数や複素数関数など，一つ一つの実数よりさらに “階数の高い” 対象を扱かうので，一見，実数論と解析学を同じレベルで考えることはできないように見えます．しかし，連続関数，区分的に連続な関数 etc. など実際に解析学で扱われる関数はすべて，実数で “コードでき” ます．このコーディングにより，連続関数，区分的に連続な関数 etc. も “実数論” の範囲で扱かうことができるようになるの

達成できそうに見える具体的な目標として掲げられているにすぎず，しかも，当時のヒルベルトはこの問題はほとんど解けたと思っているらしいことが，Hilbert [22] からわかります．本書での記述はそれらの背景や時系列の遠近法をすべて無視して「実数の存在が問題なのね」と短絡的に言いきっているため，著者自身がここで何をどう理解しているかが不明なだけでなく，読者が誤った歴史的な情報をこの前後の文章から汲み取ることになるのはほぼ決定的なことに思えます．

このように議論してゆくと，やはり，本書に掲げられている Hilbert [22] の第 2 問題の部分の翻訳をきちんと見てみるしかないようです．少し長くなりますが，まず本書での著者の翻訳を挙げて，その後で私の試訳を挙げることにします．ちなみに，原著もその英訳もインターネットからダウンロードできるので，オリジナルのテキストと比較してみたい方は，そちらの方を参照してください．

後で引用しやすいように著者の翻訳に加えられている “ⓝ:” というマークは，この後の私の翻訳での同じ “ⓝ:” に対応しています．

木村訳: ヒルベルトの第 2 問題

> ①: 科学の基礎付けの研究に携わる場合、その科学の基本的な概念の間の関係を記述する正確かつ完全な公理の体系を構築する必要がある。逆にそのように構築された公理は、基本的な概念の定義ともなる。そして、科学の領域で、ある言明が「正しい」とされるためには、②: これらの公理から有限回の論理的なステップを踏むことによって導かれなくてはならない。③: 公理のある部分が公理の残りの部分から導かれるような状況であれば、それは無駄であり、取り除かれるべきである。こうして公理はそれぞれが互いに独立な状態にまで持っていくことができる。
>
> しかし公理に関するさまざまな問題のうち、もっとも重要なものは、次の問

です．ただし，Hilbert [22] では，ベースになる論理学の体系がまだ正確に特定できていないので，Hilbert [22] の時点でのヒルベルトには，今言ったような注意は，まだ時期尚早，と言るかもしれません．

今述べたことは，歴史的な文献を現代の視点から読むときに生じる現代の視点からの数学的解釈と歴史的解釈の間に生じる可能性のある，「ゆがみ」の良い例の一つになっていると言えるでしょう: 「連続関数 etc. は実数で “コードできる”」ということをここで指摘することは，歴史的文献 [22] の解釈過多(overinterpretation)になってしまい，[22] の 1900 年における状況に対する誤解を生むことになりかねないわけですが，一方，それを指摘しないことは，現代の読者の「解析学の無矛盾性証明」(を現代から見たとき) の意味に対する誤解を助長することになりかねません．

数学書としての “「数学は門外漢」の人への啓蒙” を目指すなら，著者自身がこのような点をきちんと区別できていることは勿論ですが，更に，歴史の一コマでの当時の状況と現代の我々が理解すべき事柄の衝突をうまく回避して，その両方を分りやすい言葉で説明することができる能力も要求されていると言えるでしょう．

題である: ④: **公理系が無矛盾であることを証明せよ。すなわち、その公理系から有限回の論理的なステップを踏むことによって矛盾する結果 (おかしな結果) が得られることが決してないことを証明せよ。**

⑤: 幾何学において、公理の無矛盾性の証明は、適当な実数の体系を構築することに帰着される。この実数体系の数の間の関係が、幾何学の公理系にあたるものである。もしも幾何学の公理から矛盾が導かれてしまうようであれば、その矛盾は実数の体系の中の矛盾として現れてくるはずである。したがって、幾何の公理の無矛盾性の証明は、実数の体系の公理系の無矛盾性の証明に帰着される。

⑥: ところで、実数の体系の無矛盾性を証明するには、直接的な方法が必要である。実数の体系の公理とは、よく知られている計算の規則のことであり、それに連続性の公理を付け加えたものである。私は最近実数の公理をまとめあげたが、連続性の公理は次のより簡単な二つの公理で置き換えることができた。一つはよく知られたアルキメデスの公理であり、もう一つの新しい公理は、他の公理を満たす中で、もうこうれ以上元を付け加えることができない、完備性の公理である。私は、実数の公理が無矛盾であることの直接説明を、慎重な研究と無理数を議論する際の方法を適切に変更することによって可能だと確信してしいる。

この問題の意義について、別の視点から述べることができる。ある概念が矛盾を導くならば、その概念は数学的に存在しない。たとえば 2 乗して -1 になる実数は、数学的に存在しない。逆に言うと、ある概念 (たとえば数とか、ある条件を満たす関数とか) は、そこから出発して有限回の論理的なステップを踏むことによって矛盾を生じないことが証明されるならば、その概念の存在が説明された、ということなのである。 今我々は、実数の公理の無矛盾性の証明を問題にしてしいたわけであるが、それは取りも直さず実数が存在することを証明するのと同義なのである。実際、実数の公理が無矛盾であることの証明か完全に達成された暁には、時にさされかれるような実数体系の存在に対する疑問などは根拠のないものとして一蹴できるようになるのである。実数、すなわち上で述べられたような連続体、の全体、とは無限小数の全体や、コーシー列を取り扱う規則の全体、なとではない。それは実数の公理によってその相互関係か定められた集合の元全体であり、その公理から有限回の論理的ステップを踏むことによって導かれる定理が、そしてそれのみが正しい、というものである。私の意見では、論理的に有効な実数の概念は、

この意味においてのみ実現される。実際、これは我々の経験と直観にもっともぴったり合うように私には思われる。連続体や、すべての関数の概念は、たとえば整数や有理数と同じような意味で、またカントールによる高次の順序数も同じ意味で、存在することがわかるはずなのである。最後のものが存在することは、私が確信するところ、私が説明した意味で連続体と同じように存在が証明されるはずである。⑦ すべての順序数や、すべてのカントールのアレフについては、私の意味で無矛盾な公理体系は構築できないことが証明されるだろう。したがってこれらの体系は、私の言葉で言うならば、数学的に存在しないのである。

次は同じテキストの私の試訳です:

渕野訳: 2. 算術の公理系の無矛盾性 (訳注: ヒルベルトの第 2 問題)

①: ある科学分野の基礎付けを問題とするときには，その科学分野での基本概念の間に成り立つ関係を正確かつ完全に記述する公理系を構築することが必要である．そのように構築された公理系は，同時にそれらの基本概念の定義ともなっており，その基礎付けについて我々が検証しようとしている科学分野の領域内の主張が正しいものとされるのは，それが，②: ここで構築された公理系から有限回の論理的推論により導出される丁度そのときとなる．さらに詳しく見てみると，次のような問が生じる: ③ **たとえば各々の公理の主張のいくつかが互いに関連性を持っていて，それによって，公理系たちが互いに完全に独立なものになっているような公理系を得るためには，まだ除去しなければならない共通部分を含んでしまってはいないか．**

しかし，公理系に関して問うてみることのできる問題のうちで，次のものを最も重要な問題として挙げたい: ④: **これらの公理たちが，互いに無矛盾であること，つまり，これらから出発して，有限回の論理的推論により互いに矛盾するような結果に至ることが絶対にないことを証明すること．**

⑤: 幾何学においては，公理系の無矛盾性の証明は，数の領域をうまく構成して幾何学の公理たちに類比の数の間の関係が対応するようにし，これにより，幾何学の公理たちからの帰結としてのどんな矛盾もこの数の領域での数論での矛盾として認識されなくてはならないようにすることで達成される．このようにすることで，求める幾何の公理系の無矛盾性が数論の公理系の無矛盾性に帰着できたことになる．

⑥: しかし，これに対して，数論の無矛盾性の証明には，直接的な方法をとるしかない．

数論の公理系は，本質的には，よく知られた計算則に連続の公理を加えたものである．私は最近この公理系を纏めてみたが[註 84] そこでは，連続性の公理は，それより簡単な二つの公理，つまり，よく知られたアルキメデスの公理と，数の全体が他の公理をすべて保存してこれ以上は拡張のできないような対象物のシステム ([訳注]: 集合) になっていることを内容とする新しい公理 (完全性の公理) によって置き換えられている．既知の無理数の理論での推論方法をここでの目標にむけて精密化し適宜なやりかたで修正することで，この算術の公理系の直接的な無矛盾性の証明が得られることを確信している．

この問題の意義を別の観点にむけて特徴付けるために，次の注意を付け加えておきたい．もしある概念に互いに矛盾するような基本性質を付与したときには，この概念は数学的には存在しないと言える．例えば，実数でその二乗が -1 となるようなものは数学的に存在しない．逆にその概念に付与された基本性質から有限回の論理的推論によって矛盾が導かれることが絶対にないことが証明できたときには，それによってその概念，例えば，ある条件を満たすような数，あるい関数の概念の，数学的な存在が証明された，と言うことができる．前の算術での実数の全体の公理系が問題となっていた場合では，この公理系の無矛盾性の証明は同時に，実数の全体の実体，あるいは連続体の存在が証明されたことになる．実際，この公理系の証明が完全に得られたときには，実数の全体の実体の存在に対してこれまで持たれてきた嫌疑の正当性がすべて解消されることになる．ただし，実数の全体の実体，つまり連続体は，今記述した観点からは，すべての可能な小数点展開や，基本列の項の展開を制御するすべての可能な法則の全体，などではなく，それらの間の関係が，ここで与えられた公理系に従い，それらの公理から有限回の論理的推論によって導けるような事実のみが真であるような対象物からなるシステム ([訳注]: 集合) である．私見によれば，連続体の概念は，このような意味においてのみ把握することが可能である．実際，この ([訳注]: 連続体の) 概念は，経験と直観が我々に与えるものに最もうまく対応しているように思える．連続体の概念や，すべての関数のシステムはこのとき，整数のシステムや高階のカントルの数のクラス ([訳注]:超限順序数) と濃度たちと全く同じ意味で存在する．これらのうち後者のものたちの私が上で記述したような意味

[註 84] Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd.8, (1900), 180–183.

で連続体の存在と同じように証明されるであろうことを確信するからである —— ⑦ これに対して，濃度たち全体のシステムや，カントルのアレフたちの全体のシステムに対しては，ここでの意味での無矛盾な公理系を作ることはできないことが示せるので，私の言い方では，数学的に存在しない概念ということになる．

以下で，著者の訳で番号 ⓝ をふった部分の問題点に関するコメントを書き出します:

①: 本書の訳では「科学の基礎付けの研究に携わる場合」となっていて，「科学全体の基礎付け」と読める訳文になっていますが，原文では，„Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen“ となっているので，この „Wissenschaft“ は「科学」の意味ではなく，「科学の一分野」の意味で使われていることがわかります (訳文のような意味なら „··· die Grundlagen der Wissenschaft ···“と書かれていなくてはいけないでしょう．)． ヒルベルトの最終目標がすべての科学の統一的な基礎付けだったことは，この『数学の問題』のここに訳出されている第 1 問題や，物理学の基礎付けを課題とする第 6 問題などから，うかがい知ることができますが，実際にヒルベルトが問題として論じているのは，ここでの「解析学の無矛盾性」など，具体的に手の動く部分問題なので，その意味でもここの文章を原文どおり，「ある科学分野の…」と訳すことは，重要になります．この注意は些細に思えるかもしれませんが，これまでに見てきたような本書の著者の想像を絶する「理解」が，このような種類の誤読の集積として生れている可能性も小さくないように思えます．

②: これは純粋に著者の日本語の問題かもしれませんが，「有限回の論理的なステップ」というのは意味をなさないように見えます．原文では，これは，„mittelst einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse“ と，なっていて，有限回のステップの各々が論理的なのではなくて，有限な回数の論理的な推論のステップについて言及していることが明確に表明されています．この指摘もこれだけ見ると揚げ足取りのように思えるかもしれませんが，著者が本書で書いているような壮大な誤解を深めてゆくプロセスでの小さな一歩の 1 つ，という観点から見ることのできる日本語の杜撰な扱いの例になっていると言えるとは思えます．

③: 「公理のある部分が公理の残りの部分から導かれるような状況であれば、それは無駄であり、」 というのは原文には全くない主張です．原文で主張されているのは，「互いに全く独立な公理たちからなる体系を得たいのなら」という条件のもとでのものであり，そうでなければ「無駄」である，とは言っていません．

④: ここの訳文で「矛盾する結果 = おかしな結果」と言っているように見えることは，この著者が，本書で問題としなくてはいけないはずの意味での「矛盾」に

対して全く見当外れな理解をしている可能性を示唆しているように思えます．ヒルベルトの原文は私の翻訳に対応するものになっていて，これを読めば誤解の余地のないものだと思えるのですが，ここでの「矛盾する結果 = おかしな結果」は本書が読者として想定しているであろう，一般の人々がよく陥る誤解を代表しているようにも思えます．たとえば，「バナッハ・タルスキの定理はおかしな結果なので矛盾だ」というのは，「一般の人々」がいかにも思ってしまいそうなことなわけですが，ここでの訳文はそれを先取りしているように思えます．

⑤:「幾何学において、公理の無矛盾性の証明は、適当な実数の体系を構築することに帰着される。」 … だんだんいやになってきました．まるで落語のちはやふる」を聞かされているみたいです．これも原文で何が述べられているかは，私の翻訳を見ていただければ，分ると思います．本書の著者は，日本語を含む言語能力に重大な欠陥があるか，または，ある体系の各命題を他の体系の対応する命題に翻訳する，というアイデアを全く理解していなくて，ヒルベルトの説明を読んだ後にもまだそれが理解できないかの，いずれかでしょう．このパラグラフ全体として，この訳文でヒルベルトが原文で明快に説明している内容が問題なく理解できた人がいたとしたら，その人の驚くべき日本語能力を賞賛せずにはいられないでしょう[註 85]．

⑥: ここでの文を「ところで」と始めたのは，純粋に語学力の問題なのかもしれませんが，文章の内容のつながりが全く見えずに翻訳していることを示しているものでもあるように思えます．

まだ色々細かい点の指摘は沢山できるのですが，だんだんうんざりしてきたので，枝葉の指摘はとばすことにして，ここでは最後に，歴史的な文献を，十分な知識を持たない人が読むことの危険性を示す良い例となっている，⑦ の部分について見てみたいと思います．

ここでのヒルベルトの原文は明らかに混乱しています．クラスが集合でないということと，対応する概念が矛盾する，ことが同じことであるように述べられているのですが，これは現代から見ると，本書の著者の混乱と同レベルのおかしな発言に思えます．ヒルベルト計画では，何もないところから，必要になる道具を用意していって，1920 年代後半から 1930 年代に [24] や [25] での証明の体系やその理論として，現代からの視点に近い見方が確立されることになったわけなので，初期の段階の，そこに至る試行錯誤の途上での論文や解説文では，現代から見るとナンセンスに思えるような表明が多く含まれていたとしても何の不思議もなく，実際，そのようなものが多く含まれています．歴史的文献を引用をする場合には，そのよう

[註 85] もちろんこの “賞賛せずにはいられないでしょう” はドイツ語で書くとしたら皮肉をこめて Konjunktiv (接続法) で書くことになるはずのものです．

な，今日から振り返ってみると一見意味をなさないように見える表明の背景を分析できるだけの広い知識と知性が，必要になるわけですが，本書の著者の場合は，歴史的文献の混乱と一緒になって過去の思索の混濁に身をまかせてしまっているので[註 86]，ここでの問題点についても，何も触れられていません．

1900 年の段階では，(ビールジョッキと椅子と机の幾何学にもかかわらず) 数学理論のモデルは範疇的なものと考えられていて[註 87]，だから，集合論の中で対象の全体が真のクラスになるような概念の理論は，集合を台集合とするようなモデルがとれないと考えて，これを矛盾する，と捉えた，というのがヒルベルトのここでの理解の仕方だったのではないかと思われます．この時点では，まだ，スコーレムの定理も得られておらず，形式的言語や証明の形式的体系もきちんと定式化される前であり，したがって (シンタクティカルな) 無矛盾性の正確な定義もまだ与えられていなかったわけなので，そのような状況で可能だった議論の精度を考慮したときには，このような混乱は有り得るものだったと結論すべきだろうとは思います．

本書の著者は，そういうわけで，この⑦についての批判的なコメントは何も書いていなくて，むしろ，既に引用した本書 p.163 でのように，「数学の議論の中ではクラスを使っちゃいけないの」というような，これの尻馬に乗るような，おかしなことすら書いているわけです．

逆にヒルベルトについては，既に [註 86] で述べたような，数学の問題の可解性に関するヒルベルトのオプティミズムを攻撃しています．この攻撃は，ゲーデルの不完全性定理によって，そのようなオプティミズムが的をはずれたものになった，というような判断が背景にあるのだろうと思いますが，不完全性定理が明らかにしたのは，そのようなオプティミズムに対して数学的な最終的な論拠を与えることができない，ということに過ぎず，[11] でも述べたように，この信念は独立命題が沢山見つかっている現在でも，修正された形で[註 88] 多くの数学者が信じていることでもあり，現在でもこれを信じてはいけないことの理由は何も与えられていないと

[註 86] しかも，本書では，そのような混濁の中で，これまでにも幾つか引用したような，ヒルベルトの数学の問題の可解性に関するオプティミズムを (感情的に) 批判する表明は沢山ちりばめられているわけなのですが，これは，自分が数学を理解していないことの醜い言い訳のようなものなのかもしれません．

[註 87] たとえば 1920 年前後に書かれたヴァイルの「連続体」[40] でも，そこで導入された数学理論の記述している数学的世界が範疇的なものとして (現象学で “unmittelbar gebeben” と表現されるような意味で，我々の認識に対して与えられたものとして) 扱われています．しかも，この視点の不完全性定理以降に必要になるはずの修正，ないし付記は，この本の 1960 年のリプリントでも全くされないままになっています．

[註 88] つまり，「数学的に意味のある命題は必ずその真偽が決定する」とか，「数学的な命題については，それが独立だとすれば，その独立性は必ず決定できる」などという形の信念として．

確言していいと思います．

[The rest will be written soon.]

7　数学と音楽

本書の著者については，一つの大きな謎がある．それは，本書がこれまでの分析でも明らかになったような，究極的な内容の破綻があるにもかかわらず，彼の書いたもっと古典的な数学に関する啓蒙書や文章では，少なくとも私が確かめた範囲では，ここまで極端な内容の破綻が見られないように思えることである．早稲田大学名誉教授の江田勝哉先生は，「論理学は数学者にはとても難しいものなので，数理論理学について理解ができないのは無理のないことなのだ」と仰るのだが，そんな単純なことなのだろうか？ もちろん脊髄反射的な直観だけで数学をしていて，自分がやっていることが何だか説明のできない「優秀な数学者」というのは沢山いるかもしれないが，本を書こうとする人は，そういう人たちとは違う人たち (であるべき) ではないか？ 仮に，論理学は数学者にはとても難しいものである，ということが事実だとしても，曲がりなりにも数理論理学に関連する本を書こうとするような人なら，論理学の理解に必要になる能力に欠陥があれば，それに自分で気が付いて，それを補う努力をするか，直接論理学に関連する話題に関する本を書くというような彼／彼女にとって不可能な野望を自主的に放棄するかのどちらかを行うことにならないだろうか？ つまり，この本書の著者の本書以外の本をざっと見てみたところでは，そのような行動のどちらかに出られるくらいの知性は感じられるようにも思えるのである．

しかし，このことは (芸術) 音楽で，極めて類似の現象が多発していることを思い起こしてみると，(そういう現象が起っているということ自体は) 納得ができるようにも思えてくる．

私はかつて，[11] で，以下のように書いた．

> 本稿での，以下の「脱線」で問題にしている「音楽」は，n) で言っていると思われるような種類のものではなく，後に出てくる G. Ligeti の名前が示唆しているように，通常の商業音楽としては耳にすることのない西洋のクラシック音楽 (商業音楽としてのクラシック音楽のことでもない) の延長線上の (純粋) 音楽のことである．数学 (これについてもここで言っているのは応用数学ではなく純粋数学である) と，そのような音楽の間には，それを理解できる人がごく限られていることや，その美学や，それをとりまく (ここで触れた “アマチュア” の現象を含む) 社会構造や，歴史的な変遷に，単なるアナロジー以上の密接な類似

性が見られる，という点を指摘しておく必要があるだろう．評者は，この類似性を論じることは数学論を論じるとき避けることのできない論点の一つとなると思っているのだが，もちろん本稿はこれについて更に議論をすることが適当な場所ではない．

（渕野: 『[[[不完全性定理に挑む] に挑む] に挑む]』，[11]）

ここでも，「音楽と数学」というテーマを本格的に取り上げようと思っているわけではないのだが，本稿で論じている話題に関連して，音楽の側で頻繁に生じている，本書での著者のそれと平行なものと思える次のような現象については指摘しておきたい:

プロフェッショナルな音楽家として認められている人で，(ロマン派や広い意味でのロマン派に属する音楽やそれ以前の) 古典的な音楽に対しては非常に深い造詣を持っているように思える発言をしているのに，近代以降の音楽について話はじめると滅茶苦茶としか言いようのない発言をする人が少なくない．

たとえば，「テレマンはバッハより偉大な音楽家である」という発言は，(西洋の芸術) 音楽の素養を少しでも持っている人なら，滅多には口にしないだろう[註 89]．しかし，私の経験でも，音楽の「プロ」と看做されている人の中にも，「ラフマニノフはシェーンベルクより偉大である」とか「ラフマニノフは正しい音楽だがシェーンベルクは間違っている」というような言明や，内容的にそれに相当するような発言を公にする人は決して少なくない[註 90]．

日本での例では，少し前に話題になった，例の「聾の作曲家」事件のときに，明らかに “映画音楽もどき” でしかない過去のスタイルの踏襲ないしパロディーによる「作品」を傑作として褒めちぎった「プロの」日本人音楽家の映像が複数 youtube に upload されたことがあった．それから，こちらの方は，英語で書かれていることが多いので，日本での，というより世界での反応なのだろうが，上で一つの例として挙げたシェーンベルクに関しての例に留まることにすると，彼の作品の演奏[註 91] の youtube の upload に対して (ほとんど意味をなさないような内容の) ネガティヴなコメンツが大量に集まってきているのを観察することができる．しか

[註 89] このことは，勿論，「テレマンの方がバッハより気楽だから好きだ」というような嗜好の表明を禁止するものではないはずだが，このような発言すらも，芸術音楽の通人をもって自らを認じている多くの人は，軽薄なバロックファンと思われることを恐れて口にしないだろう．

[註 90] ここでも，「ソープオペラを見ているようで心地がよいので，ラフマニノフの方がシェーンベルクより好きだ」というような嗜好の可能性についての批判をしているわけでは勿論ないし，いわゆる「癒し」を求めるというような実用主義文化の文脈では，当然そのような嗜好の方が自然だろう．

[註 91] ここで言っている演奏の中には，Glenn Gould のような，既成の “権威” を持っているはずの演奏家によるものも含まれている！！ もちろん権威にとらわれないのはいいことなのだろうが，Gould の「権威」にとらわれない，あるいは彼の音楽コミュニティーでの「権威」を知らないとし

も，例えば，実際にはシェーンベルクの作品と少なくとも同等に難解なはずの (つまり少なくとも同程度の耳の訓練の必要であるはずの) バッハの作品には，同様のネガティヴなコメントが書かれることは全くない，というのも，非常に面白い現象であると思う．

小学校などでの，いわゆる「いじめっ子」は，誰を苛めていいのか，ということに関して，恐しく鋭い直観を持っていることが多い．今言った youtube でのネガティヴ・コメンツの現象も，この「いじめっ子の直観」のようなもので動いているのかもしれない．

本書の著者の，古典的な数学に対しては，まあ妥当と言えるような内容の本や雑誌記事などを書いているようなのに，論理学が関連したことに関しての発言をした途端におかしなものになる，というのも，上で言った音楽で頻繁に起っている現象と同様のメカニズムが背後で働いているのではないか，と邪推してみたくなる所以である．

もっとも，もしこの著者が “いじめっ子的直観から” 本書を書いているのだとすると，それはそれで痛すぎる，としか言いようがないようにも思えるのであるが．

[The rest will be written soon.]

8　数学の哲学と数学者の哲学

このテキストは，具体的な対象 (木村俊一著『無限のスーパーレッスン』) の批判という隠れ蓑の下での数学論，数学の哲学，日本 (出版) 文化論のための試論を行なう，という意味合いも持つものでもあったのですが，以降の章ではこの隠れ蓑から抜け出て，本書に対する私の論点と関連する事柄に関して —— 特にこの節では，節の題にあるような 2 つの事項に関して —— もう少し抽象的に見通しよく纏めた論考を行なっておきたいと思っています．そのため，既に議論した話題と多少かぶる話題も多少含まれている可能性もあります．

「数学の哲学」あるいは，「哲学」そのものは，日本文化とは直交するものなのかもしれません．「方丈記」はある意味の哲学的エッセーと言うことはできるかもしれませんが，この「方丈記」にしても，「葉隠」にしても，「風姿花伝」にしても，それ以外のいかなる「哲学的」と呼べるような内容を持っていると思われる日本の

ても， 巷の価値観の権威にはとらえられているというか，ある意味その尻馬に乗っているわけなので…．この大勢の (つまり巷の) 価値観の尻馬に乗って，ある種の巷では支持されない「権威」を攻撃して，権威にとらわれていない，という姿勢を誇示する，というのは，「苛めっ子気質」の一つの典型に思えるし，似たようなパターンは，日本の「元気の良い政治家」の発言の中などにも見ることができる．

書籍を思い浮かべてみても，それらは，どれも人生譚，あるいは，近年日本で「理念」なる単語と対でよく言われることの多い「方法論」以上のものではないように思えます．もちろん，たとえばカントの数学論と比較のできるような，和算の哲学的考察も全く無かったと考えていいでしょう．

そういう背景があるために，日本の数学者は全般的に「数学の哲学」に対して懐疑的，軽蔑的で，彼等が「哲学」と言ったときには，それは自分自身の数学に対する思い入れの表明のようなものにすぎないことも多いように思えます．そういう意味の「私の哲学」的数学書は沢山出版されていて，それらはそれなりに大変面白い読みものだし，教えられるところも少なくなかったりもするわけではあるのですが···.

数学者が「哲学」に対して懐疑的だ，というのは，日本だけの特殊事情ではないようにも思えますが，この一般的傾向は，日本文化での哲学不在のバイアスのために，日本ではより強調された形で現れている，と言えそうです．またこの日本人数学者たちの哲学不信は，日本で「数理哲学」と言われる分野を研究している人たち自身の問題によって，更に深刻さを深めている，とも言えるかもしれません．たとえば，私自身の経験で言えば，少し昔に，日本でデデキント研究の第一人者の 1 人と言われている哲学者と話をしたときに，この方が「デデキントの書いたものは，形式論理で書かれていないのでその正当性の保証がないことが問題である」というようなことを言われたので，大変驚いたことがあました．もちろん，これを formal に書き直してみるというのは，数学能力のない人のためには適当な課題にはなるかもしれないし，今日だったら，mizar かなにかを使って，デデキントのやったことを (弱い集合論の体系の上で) 展開してみるというようなことができたとすれば，そのような (数学にクリエーティヴに加担のできる能力は持っていないような) 人の業績にさえなるかもしれないわけですが，ここに本質的な問題がないことを見通すことのできる知性を持ちあわせていないような人が「数学の哲学」を研究している，という事実は，大変不快なものだし，こういうことを真顔で言われることがあると，日本の「哲学者」の言うことはあまり信用できない，ということを結論せざるを得なくなってしまいそうです．

本書では，西洋哲学への不信感は随所に滲み出ています．しかし，これは今言ったような自分の回りにいる何もわかっちゃいないカッコつきの「哲学者」に対する不信感ではなく，哲学そのものに対する不信感のようです．例えば:

「関連する話をさせてもっていいかしら？ この間たまたまヒルベルトに関する研究集会に出たのよ。そしたらそこで京都大学の林晋先生という方が面白い発表をされていたのね。林先生は、『ヒルベルトノート』という、ヒルベルトのメモ帳を手に入れて研究されてるんだけど、その中にすごく面白いことが書いてあるとおっしゃるのよ。たとえば1890年くらいに『人間の理性の公理とは、どういうものか？多分こういう公理が与えられるだろう。すべての問題は解ける』ですって」
「へえーっ、ヒルベルトさん、そんなこというたはるんですか？」
「ヒルベルトは博士号を取る時に卒業試験の第2テーマがカントだったらしいのね。だからそれにも関係あるんじゃないかって話なんだけど、私カントのことは知らないから」
「何かずいぶん楽観的ですよね。すべての問題って、やっぱり数学の問題のことを言っているんでしょうか？」
「そう思うわよ」

(無限のスーパーレッスン，p.118)

よく数学者でない人が「私数学のことは分らないから」とぬけぬけと仰るのと同じような乗りで「私カントのことは知らないから」という台詞が出てくのには，つい失笑してしまったのですが….

このテキストを書き始めたのは，政治的 populism が世界的に台頭しはじめる前だったのですが，現在の政治的危機状況からあらためて考えなおしてみると，本書の著者のこれらの「哲学」に対する否定的な発言は，この「政治的 populism 」での同様の発言でと類似のメカニズムが背後にあると理解すべきことではないのか，と考えはじめています．つまり，「政治的な権力を得るためには一般大衆に支持されなければいけない」という事情と，「書いた本が売れるには，一般大衆のよろこぶものを書かなければいけない」という事情への短絡的対処は似たようなものになってしまう，ということが有り得るのではないかと思うのです．少なくとも，政治的 populism も，ここでの “ベストセラー populism” も哲学的乃至科学的熟慮に対する蔑視という点は，共通しているように思えます．しかも，この作戦は，哲学的乃至科学的熟慮についてこられずにストレスをためている大衆を喜ばせて，voters の取得や，本の売れ行きという量的な成果を着々と挙げているのではないかと考えると，実に憂鬱な気分にさせられます．

9　一般向きの本を書くということ，売れる本を書くということ，これに対しての所謂「啓蒙」

「啓蒙」と言うと「なんて上から目線な」と反発する人もあるかもしれません．しかし，科学の研究 —— ただし，ここで科学と言っているのは，日本で「科学技術」と言うときの「技術」の添えものとしての科学のことではありませんし，人文科学も含めて言っているつもりです —— に携っている人の中には，多大な努力や犠牲をはらって自分が達成し得た「真実」の認識や，それを理解したことの喜びを多くの人と共有したい，という純粋な (?) 願望から，「啓蒙」とよばれる (講演，本の執筆などを含む) 活動につい手を出してしまう人も少なくないのではないかと思います．

ただし，そういう動機で書かれた「本格的な啓蒙書」は，それが (本来の意味で) とても分りやすく書かれているものであったとしても，読者に「分った」という錯覚を与えるようなものにはならないことが多く，一般の意味での「一般向き」の本とはなりにくいので，「売れる」本となることはほとんどないと言えるのではないでしょうか？

このことが既に日本語で「本格的な啓蒙書」を書くことの不可能性を規定してしまっているように思えます．これは，日本語が英語のような世界語でなく，しかも，日本語を世界語にするための努力を日本文化が全くしてこなかったことのつけが回ってきている，ということでしょう．日本語を世界語とする努力をしてこなかっただけでなく，日本語を論理的な記述をデフォルトでそこにのせることのできるような言語に鍛えあげる努力も，ほとんどされてこなかったと言っていいように思えますし，この状況が未来に改善される兆しも全くないようにも見えます．

つまり，こういうことです: 「本格的な啓蒙書」を読みこなすことのできる人の数は，科学のどの分野でも非常に小さなものになるでしょうが，この数が，直ちに「本格的な啓蒙書」の需要の規模に対応するというわけではないでしょう．必ずしも読みこなせないかもしれないとしても「本格的な啓蒙書」を読んでみようと試みる人の数や，「本格的な啓蒙書」を蔵書に加えることに誇りを感じる人の数，そのような本をほとんど自動的に蔵書に加える図書館の数，なども，この実際の需要を決定する要素として考えられるからです．

しかし，そのような要素を加味して評価したとしても，1 つの国での「本格的な啓蒙書」の需要が，ごく制限されたものになることは避けられないでしょう．そうだとすれば，「本格的な啓蒙書」の書ける言語は，文化的な指向の強い特別な国や文化圏の言語である，という可能性を除くと，英語 (やスペイン語?) のように事実上の国際語となっている言語でしかあり得ないのではないかと思うのです．実際，

(スペイン語については私はほとんど読めないので何とも言えないのですが) 英語に関して言うと，この言葉で書かれた，質の高い本格的な (つまり本来の意味であるべき意味での「一般向き」であるところの) 啓蒙書の (古今の) 例が沢山思い浮かびます．

このことは，もちろん，日本語で，「本格的な啓蒙書」でないものを書いていいことの正当化を与えるものではありえませんが，日本の出版社が「本格的な啓蒙書」ではない「売れる」偽(fake)“啓蒙書” を出版したくなる大きな要因になる，ということことは言えるでしょう．

しかも，日本には，本来，出版社が本を出版するかどうかを，(売れるかどうか，というような商売人の勘による判断基準は別として…[註 92]) 原稿の内容に則して客観的に精査するシステムがちゃんと用意されていない，ということも，この「売れる」偽物の啓蒙書を許容してしまう傾向に拍車をかけているように思えます．因に，私自身の経験では，アメリカなどの外国の出版社や科学研究支援組織から，本の原稿についての意見や，研究プロジェクトについての意見を求められたことが何度もあるのですが，日本からは —— JSPS から，とても個別の内容的な評価ができるようなものではない数のプロポーザルの審査依頼がまとめてどっと来る[註 93] ことがあることを除くと —— このような評価の依頼を受けたことは一度もありません． —— (20.07.20(月 18:24(JST)) の付記) これを書いたときには，全く忘れていたのですが，実は 2013 年に日本評論社の編集者の大賀さんに，田中尚夫先生の書いた本の原稿について意見を求められたことがありました．これは結局，本の第一部をなす翻訳の改良の手伝いを私がすることになって，最終的には，私が翻訳を完全に書き換えたものして，上でも既に引用した [40] の訳／註釈本として出版されました．これは私にとっては，予定外の大変な作業になってしまいました．本の内容評価ということでは，常道をはずれてしまったかもしれませんが，実直な役割を果せたと思っています．

[The rest will be written soon.]

[註 92] ドイツ語圏では，出版は文化人がやっている，という意識が今でも続いているように思えます．たとえばドイツのテレビに出てくる出版社の社長には文化人としての発言が求められていて，個別にはその人たちがそう呼ばれるに値する人であるとは限らないとしても，少なくとも，そのような期待に応じて，彼等があやつる言葉は，文化人のそれです．これに対して日本では，江戸時代から，命懸けで支配者にそむく出版をする少数の例外などを除くと，出版とは純粋なビジネスそのものでしかなかったのではないかと思います．

[註 93] つまり，求められているのは審査者の科学者としての内容評価ではなく，科学者でなくてもできるような整合性のチェックに「毛のはえたもの」のようなものなのでしょう．私はこのような仕事を引き受けた場合，「科学者の立場からの評価」を真面目に試みてしまい疲労困憊してしまうことが多いのですが….

10　ヒルベルトの計画と数学の無矛盾性

この節で書くことは前の 2 節より更に，本書『無限のスーパーレッスン』の諸問題点が位置している場所とは違うレベルでの議論になっているように見えるかもしれません．

前の 2 節で述べたこともそうですが，ここで述べることも，後で，どこか別のところで，独立した論説として，更に子細な議論を試みたいと思っています．この節に述べることをここに書いておくのは，『無限のスーパーレッスン』では「一般の人」の視点に媚びて嘲笑的に扱われている「数学の基礎の問題」を，真剣に考察しようとしたきに取り上げられるべき問題のいくつかについての，可能な議論の 1 つを示しておきたいからです．「一般向け」の本で，ここで論ずるようなことを本格的に展開することは，現実世界で，この「一般」が何になっているのかをよく考えてみると，残念ながら，不可能なことかもしれないし，第 9 節で述べたような，日本語の状況を考えると，絶望的な気もしてきますが，少なくとも，本書でのようなテーマについて「一般向け」の本を書こうとする人自身は，ここで述べるような議論についての考察を進められるだけの能力を持った人であるべきです．

残念なことに，第 1 節から第 8 節で既に見たように，本書の著者は，そのような議論を追うことのできるだけの背景知識や (数学) 能力にさえ欠けていると判断するしかないようにも思えます．あるいは，そような人のふりをして，「一般」の人に受けるような「トンデモ本」を意図的に書いています．そうだとすると，著者が，ここで議論することを本書に書かなかった，ことを取り沙汰するのは，彼にとってかわいそうな批判になってしまう，あるいは，批判してみても馬耳東風である，と考えるべきでしょう．

ただし，本書の著者が随所で書いている，ヒルベルトに関するネガティヴなコメント，例えば，56 ページで引用した，本書 p.118 での言明については，第 8 節の最後で述べたような，単に同情すれば済むようなものではない問題を含んでいる可能性もあります．

本書の著者は，ヒルベルトに対する否定的，嘲笑的な態度を本書で何度も名前の引用されている，林晋氏から継承した可能性があります．もちろん，本書と林氏の研究を同列に議論しようとしているわけではないのですが，たとえば，[11] でも引用したように，林氏の [20] では，

(無矛盾性と完全性の証明を通じて数学の救済を目指した) ヒルベルトのプログラムは

> ゲーデル後も，ゲンツェンの新たな参加などにより継続はされたが，…
> (中略) … やがてナチスによりベルナイスを含むユダヤ人が追放され，

「数学がなくなってしまった」ゲッチンゲンで，ヒルベルト計画も静かに消えていったのである．

—— [20], 第 II 部 5.17 『終焉』 の結び

として，『平家物語』の終りを起想させるようなクライマックスが強調されていて，それまでの記述がすべてここに収斂するよう演出されています．

また同じ [20] の第 II 部 5.16 の終りには，

しかしフォン・ノイマンは，このニュース[註 94] をヒルベルトに伝えなかったらしい，… (中略) … 彼は，パリ講演でのイグノラビムス批判を繰り返した後，こう結んだのである．「我々は知らねばならない．我々は知るであろう」

—— [20], 第 II 部，5.16
『1930 年ケーニヒスベルク』の結び

とあり，ここの文章は，フォン・ノイマンが教えてあげなかったために，ヒルベルトは的外れになってしまったこの「我々は知らねばならない．…」 を彼の講演の結語として選んでしまった，と言っているようにも読めますが，これは，本書の著者のヒルベルトの同様の言明に対する嘲笑的コメントの元ネタだったかもしれません．

林氏の [20] では論調は嘲笑的ではないかもしれませんが，ここで解釈したような「ヒルベルトの的はずれな発言」というような見方は必要以上に強調されているように思えます．これに関して，私は，この本の書評 [11] で，次のように書きました．少し長いですが，脚注を含めて引用します．

しかし，このヒルベルトの講演の結語が，不完全性定理によって数学に対する有効性や文化的な適切性を失なってしまった，という見方の方こそ，全く的外れというか，それこそ Ignorabimus 論者のさしがね的発言でしかないであろう．

数学のすべての仮説は数学的思考の集中により必ず解決できる，という数学者[註 95] の信念は，不完全性定理によっていささかもゆるいではいないし，この信念の “正しさ” は，とどまることを知らない数学の進歩が保証してくれていると言っていいだろう[註 96]．数学から独立な命題が沢山見つかっているではないか，という反論があるかもしれない

[註 94] 第 1 不完全性定理がゲーデルによって証明されたこと．

[註 95] ここで言っている “数学者” は単に tax declaration の職業欄に mathematician と書くような人という意味でなく，数学の創造に加担している人，あるいは加担できる人，という意味である．

[註 96] もし数学の進歩が頭打ちになる時がくるとすると，その理由は不完全性定理ではなく，むしろ

が，数学から独立な命題を研究している数学者は，(数学からの独立性が疑われる) どの数学の命題も，その命題かその命題の否定の証明が見つかることで，それが独立でないことが反駁されるのでなければ，その命題の独立性は必ず証明できる，という信念を持っていると思うし，この信念の妥当性を裏付ける数学の結果も数えきれないほどあり，現在，爆発的な研究の進展の中で，さらに得られつつもある．

『ヒルベルトはそれほど大した数学者ではなかった』,『ヒルベルトは，晩年，耄碌して，「数学基礎論」などに手を染めた』 等々，というようパターンの発言は，色々なところで目にすることがあります．特に日本では，高木貞治の「ヒルベルト訪問記」([37]) がそのような種類の発言のパターンに先鞭をつけたと言えるでしょう．ちなみに，この「訪問記」の書かれた，1932 年はゲーデルの不完全性定理の発表された一年後なので，もし高木貞治が logic に対していくらかでも造詣を持っていたとすれば，この作文はもっとずっと有意義なものになっていたはずです．そういうイタい作文ではあるのですが，実際には，1930 年代には高木貞治の周辺の人々も含めて，不完全性定理を正しく理解した日本人は一人もいなかった可能性が高いので，これはいずれにしても無理な注文かもしれません．

ついでに言えば．志村五郎の [36] には，ヒルベルトに対しても，高木貞治に対しても，否定的な発言があります．もっとも，[36] の出版は本書よりずっと後ですが，本書が [36] に影響を及ぼしたということはまずないと言っていいように思えます．

第 7 節でも述べた「いじめっ子の直観」のようなものを持っている人は，高木貞治の文章や，この文章を拡大再生産した沢山の日本人の書いた同様のコメントを見て，ヒルベルトの悪口を言っていいんだ，と学習して，何も考えずに，(たとえば林氏の文章からも汲み取れる否定的な身振りを) 受け売りしてしまうのではないでしょうか．

ゲーデルの不完全性定理によって，ヒルベルトの計画がヒルベルトが思い描いたような形で成就することはあり得ないことが示された，ということは，ヒルベルトの計画自身が無意味であったということを意味するものではないはずですし，ヒルベルト計画が無意味になった，ということも意味するものではないように思えます．

ここではまだ書くべきことが沢山残っているようにも思えますが，とりあえず，

人間の知力の限界と発展しきった数学の複雑さの兼ね合いにあることになる可能性が高いように思える．しかしそのような飽和状態は，コンピュータが思索の補助装置としてより積極的に使われるようになれば，かなりの程度先送りされることになるだろうと思うし，ひょっとすると，人類の歴史の有限性のために最後まで逃げきれてしまう可能性も低くはないような気もする．

上でも部分的に引用した [20] の第 II 部 5.16 の終りで話題となっている，ヒルベルトの 1930 年のラジオ講演のテキストとその訳，およびそれに関する，ここで述べていることとも関連するコメントを書いた，[16] について，読者の注意を促すに止めたいと思います．

参考文献

[1] Ehrhard Behrends, エアハルト ベーレンツ著， 鈴木 直一 訳，5 分でたのしむ数学 50 話， 岩波書店 (2007).

[2] Ehrhard Behrends, エアハルト ベーレンツ著， 鈴木 直一 訳，続 5 分でたのしむ数学 50 話， 岩波書店 (2008).

[3] Andreas Blass, Existence of bases implies the Axiom of Choice, Contemporary Mathematics、 Vol. 31, (1984).

[4] José Ferreirós, “What Fermented in Me for Years”: Cantor’s Discovery of Transfinite Numbers, Historia Mathematica 22, (1995), 33-42.

[5] 藤田博司，魅了する無限，技術評論社 (2008).

[6] 渕野 昌，連続体仮説と数学，(2000) (2021 の付記)
https://fuchino.ddo.jp/notes/ch.pdf

[7] 渕野 昌，ゲーデル以降の数学と数学基礎論，数学のたのしみ Vol.10, 2006 年秋号 (2006), 38–59.

[8] 渕野 昌，八ヶ岳フレッシュマン・セミナー —— 数理論理学セミナー (2008)
https://fuchino.ddo.jp/yatsugatake/freshman-seminar.html

[9] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，“ゲーデルと 20 世紀の論理学 第 4 巻, 集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007) に第 I 部として収録.

[10] 渕野 昌，現代の視点からの数学の基礎付け: R. デデキント著，渕野 昌 訳／解説，数とは何かそして何であるべきか，ちくま学芸文庫 (2013) に付録 C として収録.

[11] 渕野 昌，[[[不完全性定理に挑む] に挑む] に挑む]， 科学基礎論研究，Vol.41, No.1 (2013), 63–80.
https://fuchino.ddo.jp/misc/incompleteness-challenged.pdf

[12] 渕野 昌，“コーエンの強制法” と強制法，数理科学，2014 年 10 月号，No. 616 (2014), 75–83.

[13] 渕野 昌，菊池 誠，不完全性定理の構成的性質について，2014 年度日本数学会秋季総合分科会 (至広島大学)，分科会講演 (2014).
https://fuchino.ddo.jp/slides/incompl-thm-hiroshima2014-pf.pdf

[14] 渕野 昌，間違いと真理: 解析学と集合論の場合，数学セミナー，Vol.57, No.9, 36–42, (2018).
この論考の拡張版: https://fuchino.ddo.jp/articles/susemi2018-x.pdf

[15] 渕野 昌，数学ノート 2018- ，https://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-18.pdf

[16] 渕野 昌，ヒルベルトのケーニヒスベルクでの講演,
https://fuchino.ddo.jp/HilbertRadiojp.html

[17] 渕野 昌，カントルの精神の継承 — 無限集合の数学／超数学理論としてのカントルの集合論のその後の発展と，その「数学」へのインパクト, 数学文化, No.29, 26–41, (2018).
https://fuchino.ddo.jp/articles/cantor-math-culture-2018-x.pdf

[18] 渕野 昌，巨大基数と巨大な巨大基数，超数学での無限と集合論的無限，それらに対する有限の諸相， 現代思想，2019 年 12 月号，(2019).
この記事の拡張版: https://fuchino.ddo.jp/misc/large-cardinals-2019-x.pdf

[19] Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.

[20] ゲーデル (著), 林 晋，八杉 満利子 (解説，翻訳):
ゲーデル 不完全性定理 (岩波文庫), 岩波書店 (2006).

[21] Friedrich Hartogs, Über das Problem der Wohlordnung, Mathematische Annalen, Vol.76, (1915), 438 – 443.

[22] David Hilbert, Mathematische Probleme, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, Heft 3, (1900), 253–297.

[23] David Hilbert, Probleme der Grundlegung der Mathematik, Mathematische Annalen 102, (1929), 1–9. (1928 年 9 月の国際数学者会議での講演の講演録)

[24] David Hilbert und Wilhelm Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer-Verlag, (1928).

[25] David Hilbert und Paul Bernays, Grundlagen der Mathematik Band II, Springer–Verlag, (1939/1970)

日本語抄訳: 渕野 昌，吉田 夏彦 訳，数学の基礎，シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1993/2007).

[26] Wilfrid Hodges, Krull Implies Zorn, Journal of London Mathematical Society, s2, Vol.19 (2), (1979) 285–287.

[27] Rosalie Iemhoff, Intuitionism in the Philosophy of Mathematics, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
http://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/intuitionism/

[28] Thomas Jech, Axiom of Choice, North Holland (1973), (Dover Publications (2008)).

[29] Akihiro Kanamori, The Higher Ifninite (1994/1997), Corrected Second Edition (2005), Springer Verlag. 日本語訳: A. カナモリ著，渕野 昌 訳，巨大基数の集合論， シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998).

[30] Akihiro Kanamori and David Pincus, Does GCH imply AC locally?, in: Gábor Halász, László Lovász, Miklós Simonivits and Vera T. Sós, (eds), Paul Erdös and His Mathematics, Bolyai Society Mathematical Studies, volume II, 413-426. Berlin, Springer, 2002.

[31] 菊池 誠，不完全性定理，共立出版社 (2014).

[32] Kenneth Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, Elsevier (1980). 日本語訳: K. キューネン著， 藤田 博司 訳，集合論 —— 独立性証明への案内，日本評論社 (2008).

[33] True vs. Provable, Mathematics Stack Exchange (2012).
http://math.stackexchange.com/questions/69353/true-vs-provable

[34] Arnold W. Miller, The maximum principle in forcing and the axiom of choice, (2011)
http://www.math.wisc.edu/~miller/res/max.pdf

[35] Mícheál Ó Searcóid, On the history and mathematics of the equivalence theorem, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy , Vol.113A, No.2 (2013), pp.151–168

[36] Goro Shimura, The Map of My Life, Springer-VErlag, New York, (2008).

[37] 高木貞治,「ヒルベルト訪問記」, (1932) (このテキスト (の新仮名版) は現在「青空文庫」で閲覧することができる).

[38] 竹内外史, 八杉満利子, 数学基礎論 [増補版], 共立出版社, (1974).

[39] 田中尚夫, 選択公理と数学 「増補版」発生と論争, そして確立への道, 遊星社, (1987).

[40] Hermann Weyl, „Das Kontinuum, Kritishe Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis“, Veit, Leibzig (1918); Chelsea Publishing Company, New York, Reprint 1960). (日本語訳: 渕野昌, 田中尚夫 訳註, 連続体仮説, 日本評論社, (2016))

[41] Wikipedia, Naive set theory,
https://en.wikipedia.org/wiki/Naive_set_theory

[42] Wikipedia, Tarski's axioms,
https://en.wikipedia.org/wiki/Tarski%27s_axioms

[43] Ernst Zermelo, „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281. 日本語訳: 集合論の基礎に関する研究 I., R. デデキント著, 渕野 昌 訳/解説, 数と何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫 (2013) に付録 B として収録.