

# 想定外の数学 — 不完全性定理以降の数学

浏野 昌

©神戸大学大学院システム情報学研究科

August 17, 2026 (12:20 JST) 版

## 1. 想定外の数学？

数学の研究では、予想を立てることは、とても重要です。思いつきの予想ではなく、「いま判っていることに加えて、もしもこういうことも成り立つとすれば、そのことから … という結果が成り立つことになって、 …」 というような全体像を見据えた予想は、スケールの大きな研究の進展につながります。しかし、予想はあくまでも予想にすぎず、「こうでなくてはならない」とか「こうであるはずだ」という想定をしてしまうことは、逆に思考の足かせになってしまう危険が大です。

困難をともなう数学の研究の遂行には、精神的な支えとしての思い込みや思い入れが必要になることもなくはないのかもしれませんが、それは、数学の特性というより、それを必要とする人間の弱さに属することとすべきでしょう。むしろ、数学での思考の自由のためには、何かが「想定外」な事実となってしまうことを許すような固定観念による心の膠着が起らないような細心の注意が必要でしょう。

しかし、数学者も人間なので、思い込みや思い入れを排除して虚心で数学に向おうと努めても、実際のところは、生きている時代の文化や環境の呪縛から完全に自由になることは難しいのではないのでしょうか。むしろ、何か特定の結論が暗黙のうちに想定されて、そのことが認識の深化を拒んでいる、という状況が生じがちではないかと思います。このような閉塞状態が、天才の発露によって思いもよらない方向に一気に覆される、という「想定外」の展開は、数学の歴史の中で何度も起っています。非ユークリッド幾何学の発見や、高次方程式の解の公式の非存在などは、そのような想定外の数学的展開の例と言えます。

ここで話すゲーデル (Kurt Gödel, 1906 (明治 39) – 1978 (昭和 53)) の不完全性定理の発見 (1931 年 (昭和 6 年)) も、そのような「想定外」の劇的な展開と言えます。しかし、不完全性定理の想定外を語るなら、この定理によって想定されてしまった予測を裏切る、その後の「想定外」の展開についても触れなければならないでしょうし、不完全性定理が広く数学全般や哲学に影響を与えるはずの結果であるにもかかわらず、数学者や哲学者の大多数が不完全性定理を正しく理解していないのではないかと結論せざるを得ないような想定外の状況についても触れなければならないでしょう。

---

0)

August 17, 2026 (12:20 JST) 版 (本稿は数学セミナー 2012 年 1 月号に掲載された同題の文章に多少の補筆拡張を行なったものです)。

早稲田大学理工学術院の江田勝哉先生、神戸大学での筆者の同僚の菊池誠氏と酒井拓史氏から、このテキストの草稿に対する多くの有益なコメントをいただきました。感謝の意を表します。これらの方々との討論の内容は本稿に反映されていますが、もちろん文責は筆者にあります。

まず、不完全性定理の意味を理解するのに必要な最低限の背景知識の説明から始めたいと思います。

## 2. 証明の形式化と完全性定理

不完全性定理は、数理論理学の基礎を知っていれば、比較的容易に理解できます。ただし、ここで理解できる、と言ったのは、証明の技術的細部が理解できる、というような意味での理解です。これは、たとえばシェラハの pcf 理論をこの意味で理解するのに必要となる並大抵でない数学的体力(?)と比較すると、対照的です。

ただ、ここで問題になるのは、不完全性定理の理解に不可欠な数理論理学の基礎をきちんと勉強できる場所が、極端に少ないということでしょう。最近では、計算機科学に関連する学科で数理論理学の講義が開講されていることもありますが、計算機科学への応用を目標とした数理論理学の講義は、数学、あるいは数学の基礎付けを目標とした数理論理学の導入とは微妙に異なる場合もあり、不完全性定理の理解の基礎としては適当なものでない可能性もあります。

紙数の制限もあるので、本稿では、数理論理学については、不完全性定理の定理の意味の理解に必要な最低限の概論的な紹介にとどめ、詳細は数理論理学の適当な教科書に譲ることにします<sup>1)</sup>。

数学の基礎付けに関して、数理論理学が20世紀の前半に達成した大きな成果の1つは、数学(で扱う主張や証明)を形式的に(つまりコンピュータに乗せることさえできるような厳密な言語体系として)記述するのに必要な論理体系が定式化されたことでしょう<sup>2)</sup>。この論理体系は、**1階の論理 (first order logic)** あるいは、**述語論理 (predicate logic)** などとよばれているものですが、この論理体系をベースにして、公理的集合論(あるいは必要なら通常の公理的集合論のある拡張)をこの論理体系の上に展開すると、全数学(で扱う可能性のある命題とそれらの証明)をこの体系の中に(この体系での形式的命題と形式的証明に翻訳して)埋めこむことができます。

不完全性定理は、集合論の部分体系と看做せる自然数論の体系の上で考察されることになるのですが、この体系に対する1階の論理(これを“arithmetic”の頭文字を使って  $L_A$  とよぶことにします)での述語(数理論理学の用語では、**論理式**

---

<sup>1)</sup> 筆者は、現在、数理論理学の基礎から集合論の基礎への橋渡しをするような教科書の執筆にとりかかっていますが、書きあがるまでまだ少し時間がかかりそうです。参考資料の1つとしては、まだこれも書きかけの状態のものですが、筆者の行なった数理論理学の講義の講義録

<https://fuchino.ddd.jp/kobe/predicate-logic-ss11.pdf>

もあります。ここでは、1階の論理のより厳密な導入や、完全性定理の比較的完全な証明が書かれています。

[26.08.16(日)の補記] この原稿を書いた後に作成した上のもとは異なる講義録

<https://fuchino.ddd.jp/kobe/logic-ss13.pdf>

もあります。

<sup>2)</sup> 「コンピュータに乗せることさえできるような」はあながち誇張ではありません。実際、最近では Mizar, Isabelle などの自動証明プログラムが利用可能になっていますが、これらは、いずれも、すぐ後で述べる1階の論理の実装を含むものです。[26.08.16(日)の補記] 本稿が書かれた2012年以降、今日では数学とコンピュータに関する状況は大きく変わっています。しかし、ここではこれについての補筆はしないことにします。

(formulas)) の全体は、定数記号  $0, 1$  と変数記号  $x, y, z, \dots$  および、演算記号  $+$ ,  $\cdot$  (および補助記号  $(', ')$ ) から作ることのできる、たとえば  $((x+y) \cdot (x \cdot z)) + 0$  などの、項 (terms) を考え、それらの項のうちの2つを等号でつないで得られる形の原子論理式 (atomic formulas) の全体から出発し、表現  $\varphi, \psi$  から  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $\neg \varphi$  を作る操作と、 $\varphi$  と変数記号  $x$  から、( $\varphi$  での変数  $x$  を  $\exists$  で束縛して)  $\exists x \varphi$  を作る操作を繰り返し施して得られる表現 (記号列) の全体として得ることができます<sup>3)</sup>。このようにして導入された  $L_A$  論理式  $\varphi$  のうち、 $\varphi$  に現れるすべての変数記号が、その現れる  $\varphi$  のある部分論理式で ' $\exists$ ' によって「束縛されて」いるようなものは閉論理式 (closed formulas) あるいは、文 (sentences) とよばれ、これらが  $L_A$  で表現できる数学的主張に対応するものとなります。自然数論での概念や自然数論の定理のうち代数的に表現のできるものは、ほとんどすべて  $L_A$  の文として表現できます。簡単な例では、“ $x$  は  $y$  より真に大きい” は、 $(x \neq y \wedge \exists z x = (y + z))$  または、 $\exists z x = ((y + z) + 1)$  などによって表現できます<sup>4)</sup>。一方、たとえば、フェルマーの定理も  $L_A$  の文として表現できますが、そのような文を素手で作るのは至難の技です<sup>5)</sup>。ただし、ここでは、このような形式化の“実数学”での使いやすさを問題にしているのではなく、ある理論が、範囲の確定した形式的体系で厳密な意味で形式的に展開できるかどうかを問題としていることに注意してください。

以上は概念や命題のここでの体系  $L_A$  での (記号列による) 表現に関する形式化だったのですが、これを使って今度は  $L_A$  での (形式的な) 数学的証明の概念を、論理式の有限列で、ある特定の性質を持ったもの、として定義することを考えます。数学的証明の形式的体系は (互いに同値な) さまざまなやり方で導入することができますが、ここでは、定式化がいちばん簡単と思えるもの<sup>6)</sup>を採用することになります。

まず、等号  $=$  が反射律、推移律、対称律を満たすことを表わす論理式、互いに等しい2つの数の組をかけたり足したりした結果がまた等しくなることを表現する論理式、命題論理のトートロジーに論理式を代入することによって得られる論理式<sup>7)</sup>、それに、各論理式  $\varphi$  で変数  $x$  を含む部分論理式に現れる束縛変数と、項  $t$  のに現れる変数との衝突のないようなものについての  $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$  という形の

<sup>3)</sup>  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \exists$  は、それぞれ「…かつ…」、「…または…」、「…ならば…」、「…でない」、「ある…が存在して…」という論理結合や量化子に対応するものと想定されていますが、この解釈は、ここでの定義にはまだ反映されていません。論理式  $\varphi$  に対し、“すべての  $x$  に対し  $\varphi$  が成り立つ”という主張を表現すべき、 $\forall x \varphi$  という論理式の構成も考えるのが普通ですが、ここでは  $\forall x \varphi$  は  $\neg \exists x \neg \varphi$  の略記だと思って記号の節約をすることにします。

<sup>4)</sup> これらの論理式は、論理的には同値ではありませんが、たとえば、後で導入される基礎公理系  $Q$  の上では互いに同値になります。

<sup>5)</sup> 後述の  $\text{consis}(\cdot)$  が  $L_A$  の論理式として定式化できることを見るために必要になる道具のいくつかを使うと、一つの定式化が得られます。

<sup>6)</sup> ここでの体系は、[2] で用いられている体系に近いものとなっています。

<sup>7)</sup> たとえば、 $(A \rightarrow A)$  の命題変数  $A$  にある論理式  $\varphi$  を代入して得られる  $(\varphi \rightarrow \varphi)$  はそのような論理式です。ある論理式が与えられたとき、それが、このような形のものになっているかどうかは判定可能ですが、判定手続きは NP complete になってしまいます。ここでの体系とは別の体系で、論理式が体系の公理系に属すかどうか、もっとずっと簡単に判定できるようなものも存在します。

論理式<sup>8)</sup>のすべてを集めたものを  $L_A$  の論理的公理 (logical axioms) とします。また、

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{と} \quad \frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi}$$

の形のものを **推論図式 (deduction schema)** とよぶことにします。ただし、 $\varphi$  と  $\psi$  は任意の  $L_A$  の論理式で、2 番目の図式では、変数  $x$  は、 $\psi$  の中には、束縛されていない形では現れないものとします。

ここで、 $L_A$  での証明の概念が次のように定義できます。 $T$  を  $L_A$  の文の集まりとします。 $T$  は「公理系」と見ることもできるので、このような  $T$  を **理論 (theory)** とよぶことにします。 $\varphi$  を  $L_A$  の論理式とします。このとき、 $L_A$  の論理式の有限列  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  が  $\varphi$  の  $T$  からの **証明 (proof)** であるとは、

- (1)  $\varphi_{n-1}$  は論理式  $\varphi$  と一致し、
- (2) すべての  $i < n$  に対し、 $\varphi_i$  は、
  - (i)  $L_A$  の論理的公理であるか、
  - (ii)  $T$  に含まれる文の 1 つであるか、
  - (iii)  $j, k < i$  が存在して、

$$\frac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i} \quad \text{または} \quad \frac{\varphi_j}{\varphi_i}$$

が推論図式の 1 つとなっているか、  
のどれかが成り立つこと、とします。

上の「証明」の概念が、 $\wedge, \exists, \dots$  を「かつ」、「…が存在して…」、 $\dots$  と読む、という想定された解釈に対応した正しいものになっていることは、論理公理や推論規則の 1 つ 1 つを確認してみれば明らかです。しかし、この体系や同値な他の体系を初めて見るときの多くの人の感想は、「こんなちゃんな体系で数学的証明のすべてが形式化できているはずがない」というものではないかと思います。ところが、ゲーデルが 1929 年 (昭和 4 年) 不完全性定理を得る数年前に証明した **完全性定理** は、すべての数学的証明での論理的な推論が、ここでの体系での形式的証明に翻訳できることを、以下のような意味で保証しています<sup>9)</sup>。

ここでは、以下で扱うことになる、定数記号  $0, 1$  と演算記号  $+, \cdot$  を持つ数論の言語での体系に特化した議論をしましたが、証明の体系やその完全性は他の数学的対象の公理化のための言語に対してもまったく同様です。たとえば、集合論の形式的体系は、定数記号や関数記号はまったく用いず基本記号としては、等号 ' $=$ ' のほかに、集合の要素関係をあらわす述語記号 ' $\in$ ' のみを含めた言語の上に構築することができます。

**定理 1 (ゲーデルの完全性定理, 1929 (昭和 4))** 任意の言語<sup>10)</sup>  $L$  上の文の集まり

<sup>8)</sup>  $\varphi(t/x)$  は、論理式  $\varphi$  で束縛されていない変数  $x$  に  $t$  を代入することで得られる論理式です。

<sup>9)</sup> 後で述べるように不完全性定理 (の拡張形) は厳格な有限の立場での解釈が可能な定理ですが、完全性定理では、論理式の「解釈」を問題としなくてはならなくなるため、(素朴、あるいは公理的な) 集合論の枠組の中で議論をすることが必須となります。ここで考えているような可算な言語を扱っているときには、この枠組としては十分に弱い集合論の部分体系をとることができますが、非可算な言語 (もちろん非可算性を考えることで、さらにディープに集合論的 “フィクション” に足を踏み入れることになります) での完全性を考えるときには、その成立のためには選択公理 (から帰結されるある原理) を仮定する必要さえあります。

<sup>10)</sup> ここで言語と言っているのは、 $L_A$  のように用いる基本記号を固定したときに決まる体系のこ

$T$ , および  $L$  の論理式  $\varphi$  に対し,  $L$  のすべての記号の解釈を含む数学的構造で  $T$  に含まれる文をすべて満たすようなものが常に  $\varphi$  も満たすなら,  $\varphi$  の  $T$  からの形式的証明が存在する.

$L_A$  はもともと自然数の理論を記述するために導入された言語でしたが, 自然数の全体の満たす基本性質に対応する  $L_A$  の文のうち, 次のようなものからなる有限の公理系は Robinson の  $Q$  とよばれているもので, 後で見るような意味で, 自然数の満たす性質のミニマルセットのようなものになっています:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y ((x + 1) = (y + 1) \rightarrow x = y), \\ &\forall x \neg 0 = (x + 1), \quad \forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y x = (y + 1)), \\ &\forall x (x + 0) = x, \quad \forall x \forall y (x + (y + 1)) = ((x + y) + 1), \\ &\forall x (x \cdot 0) = 0, \quad \forall x \forall y (x \cdot (y + 1)) = ((x \cdot y) + x). \end{aligned}$$

これと対極にあるのは, 究極の数論の公理系とでも言うべき次の理論でしょう:

$$Th(\mathcal{N}) = \{\varphi : \varphi \text{ は } \mathcal{N} \text{ で成り立つ } L_A \text{ の文}\}.$$

ただし,  $\mathcal{N}$  は自然数の全体  $\mathbb{N}$  に数  $0, 1$  および通常の加法と乗法  $+, \cdot$  を合せた構造  $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$  のこと, とします.  $Th(\mathcal{N})$  の問題点は, これを定義するためには,  $\mathcal{N}$  がオブジェクトとして存在する理論 (たとえば集合論) の中で議論をしなくてはいけないことと,  $Th(\mathcal{N})$  の要素が実際には何なのかが, この定義からは (少なくとも直接的には) まったく分らないことでしょう<sup>11)</sup>.

無限個の公理からなるペアノの公理系 PA は,  $Q$  と  $Th(\mathcal{N})$  の間にあります.

### 3. ヒルベルトの<sup>プログラム</sup>計画と不完全性定理

まずいくつかの基本的な用語を用意しておきます. ここでも話を具体的に進めるために, 主に自然数論の言語  $L_A$  で議論しますが, 他の言語でも同様です. 記号列や, 記号列の有限列などの具体的な対象からなる集まり  $\Gamma$  が **判定可能 (decidable)** とは, すべての対象  $o$  に対し  $o$  が  $\Gamma$  に含まれるかどうかを判定するアルゴリズムが存在することとします. たとえば,  $L_A$  での論理式や文の全体, また論理的公理の全体は判定可能で,  $L_A$  での証明の全体も判定可能であることがこれらの定義からわかります. また, ここではその定義を書きませんでした, PA も判定可能です<sup>12)</sup>.

理論  $T$  が **矛盾する (inconsistent)**, とは,  $T$  からある文  $\varphi$  とその否定  $\neg\varphi$  の両方が証明できることです.  $T$  が矛盾するときには,  $T$  からすべての文が証明できてしまうことが容易に示せます. 逆に  $T$  からすべての文が証明できれば,  $T$  は明らかにここでの意味で矛盾します.  $L_A$  では, たとえば  $0 = 0$  が論理的公理から導けるので, 任意の  $L_A$  の理論  $T$  から証明できます. したがって, このような  $T$  が矛盾することは,  $T$  から  $\neg 0 = 0$  が証明できることと同値です. 理論  $T$  が矛盾

とです.

<sup>11)</sup> 実は, すぐ後に説明するように, は我々は  $Th(\mathcal{N})$  の要素が実際には何なのかは本質的に知りえない, ということが不完全性定理から帰結されます.

<sup>12)</sup> これに対し, 後で第1不完全性定理によって明らかになるように,  $Th(\mathcal{N})$  は判定可能ではありません! もちろん厳密な議論をするためには「アルゴリズム」の概念をきちんと規定する必要がありますが, ここでは, とりあえずこの問題には目をつむって先に進むことにします.

しないとき、 $T$  は**無矛盾 (consistent)** である、といいます。  $L_A$  の理論  $T$  が **完全 (complete)** とは、すべての  $L_A$  の文  $\varphi$  に対し、 $\varphi$  か  $\neg\varphi$  のどちらかが、必ず  $T$  から証明できることとします。以下で述べることになる不完全性定理の「不完全」は、この意味の「完全」の否定です。

$L_A$  の単純な形の文  $\varphi$  に限定した完全性を考えることもあります。たとえば、後述のヒルベルトのプログラムでは、単純な形の存在主張  $\varphi$  について、 $\varphi$  か  $\neg\varphi$  のどちらかが、必ず  $T$  に入っている、という意味の完全性が問題となります。このような意味での完全性を、ここでは**弱い意味で完全** である、と表現することになります。また、これの否定は、**強い意味で不完全** と言うことにします。

以上の用意で不完全性定理がきちんと定式化できるようになったのですが、ここでは、不完全性定理がどのような意味で「想定外」だったのかを見るために、時間を少し遡ってヒルベルトのプログラムの説明から始めたいと思います<sup>13)</sup>。

主に19世紀の終りから20世紀の前半にかけて、超越的 (非構成的) な推論を含む (ここで導入した1階の論理で形式化されるような) 論理を無制限に使う数学に対して懐疑や批判の声があがったとき、当時の世界の数学をリードしていた数学者のひとりだったヒルベルト (David Hilbert, 1862(文久2) – 1943(昭和18)) は、次のようなプログラム (研究計画) をかかげて、これが実行されれば、超越的な推論を含む数学は問題なく正当化される、と主張しました:

1. 数学のベースとなる論理体系を形式的体系  $\mathcal{L}$  として定式化する (これは上で述べた1階の論理に対応する体系の導入で実現されています)。

2. この論理体系上に数学を、ある判定可能な理論  $T$  として導入する (たとえば、 $T$  として集合論をとることで、これは達成できます。もちろん、数学が実際に展開できるためには  $T$  が具体的に何かを我々は知っている必要があるのですが、そのためには  $T$  は判定可能でなくては話になりません)。

3. この  $\mathcal{L}$  と  $T$  の組を、通常の数学の外で (つまり超越的な論法や無限集合の存在などを一切用いずに) 調べ、 $T$  が無矛盾で完全である、ないしは、弱い意味で完全であることを証明する。

上の3で「通常の数学の外で」調べると言ったのは、つまり、 $\mathcal{L}$  や  $T$  を実際に「紙」に書かれた記号列と、その記号列の変形や書き換え規則だと考えて、それに対して施すことのできる具体的な手続きについての具体的な (数学的) 議論を行なう、という意味です<sup>14)</sup>。このような議論の立脚点は **有限の立場** (ドイツ語では **der finite Standpunkt**) とよばれることもあり、ここでもこの用語を用いることにします。

上の1, 2, 3のうち、1は、1階の論理によって実現されていることが完全性定理により示せた、と言えます。2と3については、ヒルベルトは、まず、 $L_A$  での自然数論を拡張して古典的な解析学の展開できるような体系  $Z_2$  を考え<sup>15)</sup>、 $Z_2$  の

---

<sup>13)</sup> 以下の記述は、数学史のそれではなく、数学の内容を整理/簡略化して述べたものになっています。数学史、ないし数学思想史としてのより正確な記述は、たとえば、[3] を参照してください。ただし、[3] で表明されている、不完全性定理や、その数学や数学基礎づけへのインパクトについての解釈ないし考え方は、私のそれとは多少異なる点もあります。

<sup>14)</sup> もちろん「紙」といっても、際限のない大きさを持つ紙を考えているし、ここで考える手続きの実行が物理的に実行可能な時間枠におさまるかどうか度も外視するなど、数学的な理想化はしているわけですが。

<sup>15)</sup> このためにヒルベルトの考えたのは、2階の論理と呼ばれるここで導入した論理体系を拡張し

無矛盾性と完全性を証明することを当面の目標としました。

この目標に向けての研究は、アッカーマン、ベルナイス、フォン・ノイマンといった当時の第一線の若手研究者たちを動員して着々と進行し、1930年代初頭には、少なくとも解析学を含む体系の一部については、ほとんど証明が完了したと信じられていたようです。ゲーデルの不完全性定理は、この状況に対する「想定外」の結果として、多くの人達、特にヒルベルトと彼の周りの人達に大きな衝撃を与えることになったのでした。

**定理 2 (ゲーデルの第 1 不完全性定理<sup>16)</sup>)**  $T$  を  $Q$  を含み  $Th(\mathcal{N})$  に含まれているような判定可能な理論とすると、 $T$  は完全ではない。

もし、 $Z_2$  を上で述べたような解析学を公理化する判定可能で完全な正しい理論とすると、 $Z_2$  中の  $L_A$  (に対応する  $Z_2$  の言語の部分) の文の全体は、 $Th(\mathcal{N})$  の部分となる理論の判定可能で完全な理論 (つまり  $Th(\mathcal{N})$  自身) になっていないといけないので、上の定理に矛盾します。さらに、不完全性定理の証明を見ると、ここで理論が完全でないことの反例として構成されている論理式は複雑さの度合の低い形をしているので、同じ議論で、 $T$  は弱い意味でも完全でないことが帰結できます。この議論は、 $Z_2$  よりさらに遠大な、数学全体の公理化に対しても当然同様に行なえるので、第 1 不完全性定理により、ヒルベルトの計画のうち公理系の完全性の目標は到達不可能であることがわかります。

第 1 不完全性定理の証明では、形式的体系での論理式や証明といったオブジェクトを数で実効的にコードする、というアイデアが大きな役割を果たします。ここで実効的と言ったのは、ある数が具体的に与えられたときに、それが、このコード化で、ある証明、あるいは論理式をコードしているかどうか、もしコードしているならそれは具体的には何なのか、を決定するアルゴリズムが存在する、ということです。コンピュータの内部では、コンピュータが扱う事象 (記号や入出力イベントの列やコンピュータ・プログラムなど) は数にコード化して<sup>17)</sup> 処理されていますが、不完全性定理の証明でのコード化はこのようなコンピュータの内部でのコード化の祖形になっています<sup>18)</sup>。  $L_A$  の判定可能な理論  $T$  が与えられると、“数  $n$  は  $T$  の要素となっている論理式をコードする” という主張に対応する数論の命題を書くことができ、 $Q$  を拡張した (正しい<sup>19)</sup>) 数論の公理系で扱うことができるようになります。このとき、“ $T$  からの  $\neg 0 = 0$  の証明をコードする数は存在しない” という命題が  $L_A$  の文として書けることになります。この文を  $consis(T)$  で表すことに

---

た体系での自然数論の理論だったのですが、この体系と同値なものは、言語  $L_A$  を適当に拡張すれば、ここで考えている 1 階の論理の理論としても導入することができます。

<sup>16)</sup> 厳密にはゲーデルの証明した不完全性定理のバージョンはここで述べたものよりさらに少し強いものになっています。

<sup>17)</sup> もうすこしマシン寄りの表現をすれば、この場合のコードは  $0,1$  の有限列ですが、 $0,1$  の有限列は、二進表示によって数そのものと同一視できます。

<sup>18)</sup> 現在フォン・ノイマン方式と呼ばれる現在のコンピュータの基本設計を確立したのが、不完全性定理を (ゲーデル以外で) 最初に深く理解したフォン・ノイマンその人であることを思い出すと、これらのアイデアの間に、ただのアナロジー以上のもっと深い関連があったことが理解できるでしょう。

<sup>19)</sup> つまり、 $Th(\mathcal{N})$  の部分になっている (と看做せる)

すると<sup>20)</sup>,

**定理 3 (ゲーデルの第 2 不完全性定理)**  $T$  を ( $Q$  を含む) 十分に強い (正しい) 数論の拡張となっているような、無矛盾で判定可能な理論とすると、 $T$  からの  $\text{consis}(T)$  の証明は存在しない。

上の「 $T$  から  $\text{consis}(T)$  の証明は存在しない」は、有限の立場と両立する言い方では、「すべてのこのような  $T$  に対して、 $T$  から  $\text{consis}(T)$  の証明が存在したとすると、その証明を編集改変して、 $T$  からの  $\neg 0 = 0$  の証明を作成するアルゴリズムが存在する」と表現することができて、第 2 不完全性定理の証明は実際そのようなアルゴリズムを与えるものとなっています。

第 2 不完全性定理は、ヒルベルトのプログラムのうち公理系の無矛盾性に関する部分も、少なくとも非常に厳格な有限の立場を守るかぎり実行不可能であることを示しています。もし  $T$  の無矛盾性が厳格な有限の立場で証明できたとすると、この証明から出発して、論理式や証明のコード化を用いて、 $T$  からの  $\text{consis}(T)$  の証明が得られてしまうからです。

## 4. 不完全性定理ショックと想定外から出た想定外

不完全性定理のヒルベルト・スクールに与えた衝撃は小さくありませんでした。フォン・ノイマンは第 1 不完全性定理をいち早く理解して、第 2 不完全性定理をゲーデルと独立に証明していますが、この後、数学基礎論の研究をまったくやめてしまっています。ヒルベルトとアッカーマンとの確執も不完全性定理に関連する諸事情がその背景にあったのではないかと邪推したくなってしまう<sup>21)</sup>。しかし、ここで想定外だったのは、むしろ、不完全性定理がまったく想定外の結果だったのに、それが非常にすんなりと当時の数理論理学のコミュニティに受け入れられたことでしょう。たとえば、集合論の矛盾性証明を目指していた、当時 60 歳代にさしかかっていたツェルメロのように不完全性定理を (情動的に?) どうしても認められない、という人もいたのですが、このツェルメロでさえ、後には不完全性定理を理解するために自分のセミナーで取り上げたりしています ([1])。このことの背景として、ヒルベルト・スクールの人々が不完全性定理をいち早く理解してその普及に務めたことが挙げられます。1939 年 (昭和 14 年) に初版の出た、ヒルベルトとベルナイスの『数学の基礎』第 II 巻では、不完全性定理の証明の細部が丁寧に解説されています。この本はドイツ語で書かれていたため英語圏やフランス語圏などの一般の数学者への影響はそれほど大きくはなかったかもしれませんが<sup>22)</sup>、不完全性定理が数理論理学の基礎知識の一つである、という位置付けは、この本によって既に 1930 年代に確立されていた、と言えると思います。

不完全性定理はヒルベルトのプログラムの可能性を葬った、というのが広く流布している見方ようです。数学の完全性を持つ公理系への公理化に関しては、有

<sup>20)</sup> “consis” は consistent (無矛盾) に由来する記号でしょう。

<sup>21)</sup> 筆者は、ゴシップ的茶飲み話数学史には断乎として批判的です。ここでの「邪推」は数学史的コメントではなく、あくまでオフレコ発言と考えてください。念のため。

<sup>22)</sup> ちなみにゲーデルの原論文もドイツ語で書かれています。



限の立場での解釈も可能な、次の第1不完全性定理の拡張からも、(どのような軌道修正を施したとしても)ほとんど望みがないように思えます<sup>23)</sup>。

#### 定理 4 (ゲーデル-ロッサーの不完全性定理, J.B.

Rosser, 1937 (昭和 12))  $T$  を  $Q$  を含む任意の無矛盾で判定可能な理論とするとき、 $T$  は完全ではない。

しかし、数学の無矛盾性に関する議論では、不完全性定理が最終通告にはなっていない可能性が残されています。ゲーデル自身も、1931 年の論文で既に言っていることですが、 $T$  での証明には翻訳できないが、有限の立場の自然な拡張となっているような論法で  $T$  の無矛盾性の証明ができないとは限らないからです。実際、ゲンツェンによる次の結果は、そのような意味での無矛盾性証明になっています：

定理 5 (G. Genzen, 1936 (昭和 11)) 厳格な有限の立場を  $\varepsilon_0$  までの超限帰納法 (に対応する論法<sup>24)</sup>) で強めた立場から  $L_A$  でのペアノの公理系の無矛盾性が証明できる。

ペアノの公理系と無矛盾等価 (つまり矛盾するかどうかに関して同値になるような) 理論で、古典的な解析学を含む数学の展開できる体系 (たとえば、 $ACA_0$  として知られる体系<sup>25)</sup>) があることが知られているので、「 $\varepsilon_0$  までの超限帰納法」という附帯条件つきで、そのような数学の無矛盾性の保証が得られたことになります。このような研究は現在まで続いていて、無矛盾性の保証の (付帯条件の) グラデュエーションのいくつかのレベルのどこかに (日常的な) 数学がほとんど含まれてしまう、という意味での数学の無矛盾性証明ができつつあります。ヒルベルトが最初に思い描いたような直球の解決は不可能としても、彼のプログラムは、このように修正された形で現代の数学の基礎の研究に継承され、肯定的な成果をあげてきているのです。

本稿では、不完全性定理の挑戦に答える、数学 (特に数理論理学と関連する数学) の研究でのその後の想定外の展開についても議論するつもりでいたのですが、既に予定の紙数を大幅に越えてしまったため、これについては、本稿の続編をインターネット上にアップロードして、そこで議論しようと思っています<sup>26)</sup>。

ここでは、筆を擱く前に、もう 1 つ別の「想定外」についてぜひ触れておきたいと思います。それは、不完全性定理が発表されてから、81 年も経とうとしているわけですが、未だに不完全性定理にまつわるネット上や学会発表や啓蒙書、論文などでの「とんでも」発言が後を絶たない、という想定外の事実です。

---

<sup>23)</sup> 「ほとんど」と書いたのは、初等幾何学の理論やプレスブルガー算術のように、 $Q$  を部分理論として含まない数学のある部分体系をうまく定式化したときに、それが有限の立場で無矛盾なことが証明できて、しかも完全になる場合さえあるからです。

<sup>24)</sup> ゲンツェンの証明で用いられている超限帰納法の原理が、厳格な有限の立場での言葉で表明できることは、たとえば [4] に詳しい説明があります。

<sup>25)</sup>  $ACA_0$  はペアノの公理系と無矛盾等価であるだけでなく、これの保守拡大でもあります。

<sup>26)</sup> [26.08.17(月) の 補記] 当時書き始めて、何らかの理由で放棄してそのままになってしまっている作文が、

<https://fuchino.ddo.jp/misc/susemi2012-01x.pdf>  
に置いてあります。

筆者は、最近、「ビックバン直後の宇宙のイメージを曲にした」というオーケストラ曲の初演を含むコンサートに行ってきました。科学が芸術的なインスピレーションを触発していて、しかもその芸術的なアウトプットが価値のあるものなら、それはとりあえずは笑って受け流しておくべきでしょう<sup>27)</sup>。しかし、学術的な出版物などでの発言では話は別です。そして、不完全性定理の関連で、どうしてもなくおかしいことを言っているものが異常に多いように思えるのです。

東北大学の田中一之先生が最近翻訳された [5] は、不完全性定理の「とんでも」解釈につながりかねないような誤解をリストアップして、それらの子細な解説を行っている本ですが、そのようなテーマで一冊の本ができてしまう、というところに根の深さが見てとれます。

本稿の初めの方にも書いたような事情から、独学でこの分野の勉強を始めて誤解や曲解の黒々とした樹海に迷い込んでしまう人が少なくないことも、このような「とんでも」の原因の1つになっているのかもしれませんが。日本には、それほど数は多くはないとはいえ、数理論理学やその周辺の研究に真摯に携っている（「とんでも」ではない）研究者もいます。もし、不完全性定理に関連する分野の専門的な勉強／研究を志すなら、独学で森の奥に迷い込んでしまう前に、そのような研究者のどなたかとコンタクトをとって、何らかのアドバイスを受けることを強くお勧めします。

## References

- [1] John W. Dawson, Logical Dilemmas: the life and work of Kurt Gödel, A K Peters, (2005).
- [2] Herbert B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition, Academic Press (2001).
- [3] K. ゲーデル, 不完全性定理, 林 晋／八杉 満利子 訳・解説, 岩波文庫 (2006).
- [4] G. Takeuti, Proof Theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 81 (Second ed.), Amsterdam: North-Holland Publishing Co. (1987).
- [5] トルケル・フランセーン, ゲーデルの定理 – 利用と誤用の不完全ガイド, 田中一之 訳, みずす書房 (2011).

[ふちの さかえ]

---

<sup>27)</sup> ただし、このビックバンの音楽について言えば、これは、1960年代のヨーロッパの「ゼンエイオンガク」の粗悪なパロディーとでもしか言いようなない支離滅裂な作品だったので、笑って受け流す、というより苦笑するしかなかったのですが。