Mystery Train[*1]

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

1　銀河鉄道の夜

先日メキシコのコリマという街で開かれた "International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications V" という国際学会に参加しました．次の問題（パズル）は，この学会での昼食の折に，学会の参加者で，プラハ大学の Petr Simon 先生のところで学位論文を書いている Jonathan Verner 君から教わったものです．

> **問題 1**　ω_1 個の駅のある路線の 0 番目の駅を（お客さんの乗っていない）列車が出発した．1 番目，2 番目，$\cdots$ の各駅に停車したとき列車に客が一人でも乗っているときにはそのうちの一人が降車し，ω 人の新しい客が列車に乗りこむとする．ω_1 番目の駅に列車が着くとき，列車には何人の客が乗っているか？

Verner 君は，ヴィーンからプラハに帰る列車の中で，やはり Simon 先生の門下の David Chodounský 君から，この問題を聞いたということです．一方，Chodounský 君は，ブダペスト工科経済大学の Barnabás Farkas 君からこの問題を聞いたということです[*2]．

この問題は，答を聞いてしまえば，それに証明をつけることはそれほど難しくないのですが，専門家でも正しい答を予想しそこなってしまうことが多いようで，コリマの郊外のレストランでも，一緒に食事をしていた何人かの集合論の研究者は僕を含めて全員すぐに答を出すことができませんでした．

すぐに思いつくのは，「この問題の答は各駅で列車を降りる人の選び方によって違ってくるのではないか」，ということですが，一端そう思ってしまうと，その考えにトラップされてしまって，うまく正しい答にたどりつけなくなってしまう，というのが，どうもこの問題の「ひっかけ」のようです．

僕自身は Verner 君からもらったヒントで証明をみつけることができたのですが，Verner 君の証明はよく知られた定理を応用するものだったのに対し，僕のものは，この定理を使わない，直接証明でした．**注意:** この問題を自分で考えてみたい人は，この次のページに進む前に，ここで考えてください．

[*1] October 28, 2021 (18:50 JST) 版．本稿は 2010 年数学基礎論若手の会での講演内容を整理したもので，基数や順序数についての基礎的な知識を学んだ人のための tutorial として書いています．若手の会でのスライドは `https://fuchino.ddo.jp/slides/wakatenokai10-slides-pf.pdf` また，本テキストの最新版は `https://fuchino.ddo.jp/misc/wakatenokai10-text.pdf` としてダウンロードできます．

[*2] 後日，Farkas 君の指導教官であるハンガリー科学アカデミーの Lajos Soukup 氏が神戸に遊びに (つまり数学の研究をしに) 来ました．そのとき彼に，この問題を知っているかどうか尋ねてみると，「それは $\cdots$ だろう」という答と，後で応用問題として述べるジョークが即座に返ってきました．

実は，この問題の正解は，

(1.1)　各駅で列車を降りる人の選び方によらず，列車が ω_1 番目の駅に着いたときの乗客の数は 0 人である． ❏

というものです．次の第 2 節で，この正解の僕の証明を示し，その次の第 3 節で，Fodor の定理の限定版を応用する証明を示します．第 2 節の証明は, ほとんど Fodor の定理の限定版の証明にもなっています．そこで，この節の後半でこの証明を見てみることにします．

通常 Fodor の定理と言ったときには，第 3 節で用いる形のものより，さらに強い定理を指すのですが，第 4 節では，closed unbounded sets や stationary sets の概念とそれに関する基本的なことがらを復習した後に，この Fodor の定理の一般形を証明します．

以上の節で出てきた証明をよく調べてみると，これらの証明の本質的な部分はすべて closure argument とよばれる，ある関数（族）に関して閉じている集合を考えることによる論法で行なわれていることがわかります．closure argument は，何に関しての closure をとるのかをうまく規定する必要があり，その部分が技巧的，かつ個別的になってしまうきらいがあるのですが，closure argument によって個別に示されている命題に統一的な別証明を与える方法として，elementary submodel による論法があります．第 5 節では，この elementary submodel の論法を用いた Fodor の定理の一般形の別証明を見てみることにします．

現代では，Fodor の定理はさらに一般化された形のものも知られています．最後の第 6 節と第 7 節では，それらの一般形を導入して，第 5 節で見た elementary submodel の論法の証明がそれらの一般化に対してもほとんどそのまま適用できることを見ることにします．

以下はできるだけ self-contained になるように書いたつもりですが，基数や順序数に関するごく初歩的な知識は仮定しました．これについては，たとえば [3] に詳しい解説があります．また，elementary submodel の手法についての詳しい解説は [4] で読むことができます．

2　(1.1) の最初の証明

α 番目の駅 $(0 < \alpha < \omega_1)$ で列車に乗りこむ ω 人の乗客を $t_{\alpha,n}$, $n < \omega$ とよぶことにする．

関数 $f : \omega_1 \times \omega \to \omega_1$ を，

(2.1)
$$f(\alpha, n) = \begin{cases} \beta, & t_{\alpha,n} \text{ が } \beta \text{ 番目の駅で降りるとき} \\ 0, & t_{\alpha,n} \text{ がどの駅でも降りないとき} \\ 0, & \alpha = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義することにする．背理法で示すことにして，ある $0 < \alpha_0 < \omega_1$, $n_0 < \omega$ に対し，$f(\alpha_0, n_0) = 0$ となっていると仮定する．つまり乗客 t_{α_0,n_0} は α_0 番目の駅で乗車した後，ω_1 番目の駅までの間にどの駅でも降りないものとする．

$\alpha_0 < \alpha^* < \omega_1$ を f に関して閉じているようなものとする．つまり，すべての $\beta < \alpha^*$ と $n < \omega$ に対し，$f(\beta, n) < \alpha^*$ が成り立つようなものとする．列車が α^* 番目の駅についたときには，少なくとも t_{α_0, n_0} は列車に乗っているので，誰かは列車から降りなくてはいけないが，α^* の選び方から，このとき列車に乗っているのは ω_1 番目の駅まで列車を降りない乗客ばかりなので，これは不可能である． ❏

3　Fodor の定理の応用による別証

この節では Fodor の定理の制限された形のものを用いた，問題 1 の答 (1.1) の別証を見てみることにする．ここで「Fodor の定理の制限された形のもの」と言っているのは次の定理のことである．κ を基数として $S \subseteq \kappa$ とするとき，写像 $f : S \to \kappa$ が regressive であるとは，すべての $\alpha \in S \setminus 1$ に対し，$f(\alpha) < \alpha$ が成り立つこととする[*3]．

定理 2 (Fodor の定理の特殊形) $\kappa > \omega$ を正則基数として，$f : \kappa \to \kappa$ を regressive とするとき，ある $\beta^* < \kappa$ で，$\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ で cofinal になるようなものが存在する． ❏

定理 2 は，前節の証明と同様にできる．これについては本節の最後で述べる．まず，この定理を用いた問題 1 の答 (1.1) の別証を見ることにする．

(1.1) **の別証:** 写像 $f : \omega_1 \to \omega_1$ を，

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客が，列車に乗ったのが } \beta \text{ 番目の駅のとき} \\ 0, & \alpha \text{ 番目の駅で降りた乗客がいなかったとき（つまり列車が } \alpha \text{ 番目の} \\ & \text{駅に入ったとき誰も乗っていなかったとき）} \end{cases}$$

と定義する．f は regressive だから，定理 2 により，$\beta < \omega_1$ で，$S = \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) = \beta\}$ が ω_1 で cofinal になるものが存在する．もし $\beta > 0$ だとすると，S が非可算であることから，β 番目の駅で非可算人の乗客が乗りこんだことになってしまい，仮定に矛盾である．したがって，$\beta = 0$ とならなくてはならないが，このことから列車は ω_1 番目の駅に入るときには客を一人も乗せていないことがわかる[*4]． ❏

定理 2 は，第 2 節で与えた問題 1 の答の証明と類似のアイデアで示すことができる．以下でこの証明を見ることにする．

定理 2 の証明: $\kappa > \omega$ を正則基数として， regressive な写像 $f : \kappa \to \kappa$ が 定理 2 の反例になっていると仮定して，矛盾を導く．このときには，すべての $\beta < \kappa$ に対

[*3] $1 = \{0\}$ なので，$S \setminus 1 = S \setminus \{0\}$ である．0 を除外したのは，単に，条件 “$f(0) < 0$” が不可能だからである．

[*4] 各乗客 $t_{\alpha,n}$ に対し，$\alpha' \in S$ を $\alpha < \alpha'$ となるようにとると，α' 番目の駅に着くときに列車は空になっているのだから，$t_{\alpha,n}$ は α' 番目の駅より前の駅で下車していることがわかる．

し，$S_\beta = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \beta\}$ は κ の bounded set になる．したがって $\beta < \kappa$ に対し $g(\beta) = \sup(S_\beta)$ とすると，$g(\beta) \in \kappa$ である．今，$\alpha^* < \kappa$ を g に関して閉じているようなものとすると，$\beta^* = f(\alpha^*)$ として $\beta^* < \alpha^*$ だから，α^* のとりかたから S_{β^*} は α^* の bunded subset となるが，$\alpha \in S_{\beta^*}$ だから，これは矛盾である．❏

4　Fodor の定理の一般形とその証明

一般には，“Fodor の定理” と言ったときには，定理 2 よりさらに強い，以下の定理 5 の形のものを指す．

　α を極限順序数とするとき，$C \subseteq \alpha$ が（α で）*closed unbounded* (*club*) であるとは，

(4.1)　すべての $\beta < \alpha$ に対し，$C \cap \beta$ が β で cofinal なら，$\beta \in C$ (closed);

(4.2)　すべての $\beta < \alpha$ に対し $\gamma \in C$ で $\beta < \gamma$ となるものが存在する (unbounded)

が成り立つことである．

　$S \subseteq \alpha$ が（α で）*stationary* であるとは，すべての closed unbounded な $C \subseteq \alpha$ に対し，$S \cap C \neq \emptyset$ が成り立つことである．

演習問題 3 (1)　$S \subseteq \alpha$ が stationary なら，S は α で cofinal である．

　(2)　$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ なら，$S \subseteq \alpha$ が stationary $\Leftrightarrow$ S は α の end-segment を含む．

　(3)　$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ で，$\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$ で $C_\xi, \xi < \lambda$ がすべて α の closed unbounded な部分集合なら，$\bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi$ も α の closed unbounded な部分集合になる．

　(4)　$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ なら α の closed unbounded な部分集合は stationary である．

演習問題 3, (3) により，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ なら，α の部分集合で α の closed unbounded な部分集合をふくむようなものの全体は $<\mathrm{cf}(\alpha)$-closed な $\mathcal{P}(\alpha)$ 上のフィルターになることがわかる．したがって，このような α に対し，α の closed unbounded な部分集合は (このフィルター (closed unbound filter または club filter) の意味で)，「補集合が無視できる」ような集合となっており，stationary な α の部分集合は，その「“大きさ” が無視できない」ような集合となっている，と解釈することができる．演習問題 3, (4) は 演習問題 3, (3) からすぐに出ることに注意する．

定理 4 κ を非可算な正則基数とする．$\alpha < \kappa$ に対し C_α が κ の closed unbounded な部分集合であるとき，$C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\beta < \kappa : \forall\alpha < \beta(\alpha \in C_\beta)\}$ も κ の closed unbounded な部分集合になる[*5]．

証明．　C が closed であることは明らかだから，C が κ で unbounded であることを示す．$\beta < \kappa$ を任意にとるとき，κ 未満の順序数の真の上昇列 $\langle \gamma_n : n \in \omega \rangle$ を，$\gamma_0 = \beta$, $\gamma_{n+1} \in \bigcap_{\alpha<\gamma_n} C_n$ となるようにとる．実際，演習問題 3, (3) により，

[*5] $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ は，$C_\alpha, \alpha < \kappa$ の diagonal intersection と呼ばれる．

$\bigcap_{\alpha<\gamma_n} C_n$ は closed unbounded だから，このような上昇列をとることができる．$\gamma = \sup_{n\in\omega}\gamma_n$ とすれば，$\beta < \gamma$ だが，すべての，$\xi < \gamma$ に対し，$\xi < \gamma_{n_0}$ となる $n_0 \in \omega$ をとると，$\gamma_n \in C_\xi$ がすべての $n \in \omega \setminus n_0$ に対して成り立つので，C_ξ が closed であることから，$\gamma \in C_\xi$ が成り立つ．よって，$\gamma \in C$ である．❏ **(定理 4)**

定理 5 (Fodor の定理, [1]) $\kappa > \omega$ を正則基数とする．すべての stationary な $S \subseteq \kappa$ と regressive な $f : S \to \kappa$ に対し，$\beta^* < \kappa$ で $S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ が κ の stationary な部分集合になるものが存在する．

証明． S を κ の stationary な部分集合として，regressive な $f : S \to \kappa$ が定理の主張の反例になっていること仮定して矛盾を導く．$f : S \to \kappa$ が定理の主張の反例であることから，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，closed unbounded な $C_\alpha \subseteq \kappa$ で $f[S \cap C_\alpha] \not\ni \alpha$ となるものがとれる．

$C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ とすると，定理 4 により，C は κ の closed unbounded な部分集合となる．特に $\alpha^* \in C \setminus 1$ がとれるが，すべての $\beta < \alpha^*$ に対し，$\alpha^* \in C_\beta$ だから，$f(\alpha^*) \neq \beta$ である．しかし f が regressive であることから，$f(\alpha^*) < \alpha^*$ とならなくてはならないので，これは矛盾である． ❏ **(定理 5)**

演習問題 3, (3) から，Fodor の定理は $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ となる順序数や特異基数でも成り立つのではないか，と考えてしまいがちかもしれないが，これは実はそうではなくて，κ が正則基数であることはここでは本質的である．

たとえば，$S = \{\omega_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ は $\kappa = \omega_{\omega_1}$ で closed unbounded で，$\mathrm{cf}(\kappa) = \omega_1$ だから，演習問題 3, (4) により，S は stationary でもあるが，$f : S \to \kappa$ を $f(\omega_\alpha) = \alpha$ とすると，f は regressive で one-to-one だから，Fodor の定理でのような β^* は存在し得ない．

5 elementary submodel の論法

補題 6 κ を非可算な正則基数として，θ を（κ と比べて）十分に大きな正則基数とする．M を $\mathcal{H}(\theta)$ の elementary submodel で，$\kappa \in M, \kappa \cap M = \sup \kappa \cap M \in \kappa$ となっているものとする[*6]．$\alpha^* = \kappa \cap M$ とする．

$S \subseteq \kappa$ で $S \in M$ とするとき，$\alpha^* \in S$ なら S は κ の stationary な部分集合である．

証明． $C \in M$ を κ の closed unbounded な部分集合とするとき，elementarity から $M \models$ “C は κ の closed unbounded subset である” が成り立つから，$C \cap \alpha^*$ は α^* で unbounded となる．したがって，C が closed unbounded であることから $\alpha^* \in C$ である．ふたたび M の elementarity を使うと，$M \models$ “$S \cap C \neq \emptyset$” が成り立つ．したがって，

$$M \models \text{“すべての closed unbounded な } C \subseteq \kappa \text{ に対し，} S \cap C \neq \emptyset\text{”}$$

[*6] $\mathcal{H}(\theta)$ で hereditary of cardinality $< \theta$ となる集合の全体をあらわす．

が成り立つが M の elementarity からこれは $\mathcal{H}(\theta)$ でも成り立つ．θ は十分に大きくとってあったので，このことから，S は stationary であることが帰結される．

❏ **(補題 6)**

定理 5 の elementary submodel の手法による別証: $S \subseteq \kappa$ を stationary として， $f : S \to \kappa$ を regressive とする．十分に大きな θ に対し $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を，κ, S, $f \in M$ で，$\kappa \cap M = \sup(\kappa \cap M) \in \kappa$ となるようにとる．$\alpha^* = \kappa \cap M$ として $\beta^* = f(\alpha^*)$ とすると，$\beta^* < \alpha^*$ だから $\beta^* \in M$ で，$S_0 = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta^*\}$ とすると，$S_0 \in M$ である．$\alpha^* \in S_0$ だから，補題 6 により， S_0 は stationary である．したがって，この β^* は求めるようなものである． ❏ **(定理 5)**

蛇足ではあるが，問題 1 の答 (1.1) の elementary submodel を用いた証明を書きだしておくことにする:

$f : \omega_1 \times \omega \to \omega$ を (2.1) のようなものとする．θ を十分に大きな正則基数として， $M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を 可算で，$f \in M$ となるようなものとする — $\omega_1 \in M$, $\omega_1 \cap M = \sup(\omega_1 \cap M) \in \omega_1$ は自動的に成り立つことに注意．$\alpha^* = \omega_1 \cap M$ とする．補題 6 により，列車が α^* 番目の駅に着いたときに客を乗せていないことが示せればよい．列車が α^* 番目の駅に着いたときに客が乗っていたとすると，そのうちの一人，たとえば $t_{\beta,n}$ が列車を降りなければならないが，このとき $M \models$ “$t_{\beta,n}$ は列車を降りる” が成り立つから，ある $\gamma < \alpha^*$ に対し，$f(\beta, n) = \gamma$ とならなくてはならないが，これは $f(\beta, n) = \alpha^*$ に矛盾である． ❏

応用問題 7 100 円を入れると 200 円出てくる自動販売機がある．この自動販売機に ω_1 回 100 円玉を入れ続けたとき，儲けはどれだけになるか？

6 stationarity の一般化と，さらに一般化された Fodor の定理

以下では，κ と λ を無限基数で，$\kappa \leq \lambda$ となるものとする．このとき，

(6.1) $\quad [\lambda]^\kappa = \{a \subseteq \lambda : |a| = \kappa\}$

とする．$[\lambda]^{\leq\kappa}$, $[\lambda]^{<\kappa}$ も同様に定義する．

$C \subseteq [\lambda]^\kappa$ が *closed unbounded* とは，

(6.2) すべての $\gamma \leq \kappa$ と C の要素の $\subseteq$ に関する上昇列 $\langle c_\xi : \xi < \gamma \rangle$ に対し，$\bigcup_{\xi<\gamma} c_\xi \in C$ となる (closed);

(6.3) すべての $a \in [\lambda]^\kappa$ に対し $c \in C$ で $a \subseteq c$ となるものが存在する (unbounded).

が成り立つことである．$S \subseteq [\lambda]^\kappa$ が *stationary* とは，すべての closed unbounded な $C \subseteq [\lambda]^\kappa$ に対し， $S \cap C \neq \emptyset$ が成り立つことである．

ここで定義した closed unbounded と stationary の概念は，第 4 節 での closed umbounded と stationary の概念のある意味での拡張になっている:

演習問題 8 $\lambda = \kappa^+$ とするとき，以下が成り立つことを示せ:

(a) $C \subseteq [\lambda]^\kappa$ が（ここでの意味で） closed unbouded なら， $C \cap \lambda$ は（第 4 節の意味で）closed unbounded な λ の部分集合になる．

(b) $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ が（ここでの意味で） stationary であることと，$S \cap \lambda$ が（第 4 節の意味で） λ の stationary な部分集合となることは同値である．

演習問題 9 演習問題 3, (3), (4) および，定理 4 に対応する $[\lambda]^\kappa$ の部分集合に関する命題を記述して，これを証明せよ．

演習問題 10 C を $[\lambda]^\kappa$ の closed unbounded な部分集合として，$C' \in [C]^{\leq\kappa}$ が $\subseteq$ に関して upward directed なら，$\bigcup C' \in C$ が成り立つ．

ヒント: C' の濃度に関する帰納法で示せる．

補題 11 $\aleph_0 \leq \kappa \leq \lambda$ とする． このとき，$S \subseteq [\lambda]^\kappa$ に対し，以下は同値である:

(a) S は（$[\lambda]^\kappa$ の部分集合として） stationary である．

(b) ある／すべての正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ とするとき[*7]，$M \prec \mathcal{M}$ で，

(6.4) $\quad | M | = \kappa$;

(6.5) $\quad \kappa \subseteq M$;

(6.6) $\quad \lambda \cap M \in S$

となるものが存在する．

証明． $\mathcal{M}$ を上のような構造とするとき，$\lhd$ が構造に入っていることから，$\mathcal{M}$ は built-in skolem functions を持つ．$x \subseteq \mathcal{M}$ に対して，$sk_{\mathcal{M}}(x)$ で x の skolem-hull を表すことにする．

(a) $\Rightarrow$ (b): $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ を stationary とする．$\theta > \lambda^\kappa$ を正則基数として，$\lhd$ と $\mathcal{M}$ を (b) でのようなものとする．

$$C = \{x \in [\lambda]^\kappa : \kappa \subseteq x,\, \lambda \cap sk_{\mathcal{M}}(x) = x\}$$

とすると，C は $[\lambda]^\kappa$ で closed unbounded になることが容易に確かめられるから，$S \cap C \neq \emptyset$ だが，$x \in S \cap C$ として， $M = sk_{\mathcal{M}}(x)$ とすると，$M \prec \mathcal{M}$ で，M は (6.4), (6.5), (6.6) を満たす．

(b) $\Rightarrow$ (a): $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ として，θ, $\lhd$, M が，この S に対し (6.4), (6.5), (6.6) を満たすとする．このとき，任意の $C \in M$ に対し，$M \models$“C は $[\lambda]^\kappa$ の closed unbounded な部分集合” なら，$C \cap M$ は upward directed な濃度 $\leq \kappa$ の C の部分

[*7] κ, λ, S はすべて constants として（つまり対応する constant symbols の interpretations として）この構造に入っていると考える．

集合になるから[*8]，$\bigcup(C\cap M)\in C$ である（演習問題10 を参照）．(6.5) により，各 $a\in C\cap M$ に対し $a\subseteq M$ が成り立つから[*9]，$\bigcup(C\cap M)\subseteq\lambda\cap M$ である．一方 M の elementarity と C が closed unbounded であることから，$\bigcup(C\cap M)\supseteq\lambda\cap M$ も成り立つから，$\bigcup(C\cap M)=\lambda\cap M$ である．したがって，$\lambda\cap M\in S\cap C$ となり，M の elementarity により $M\models$ "$S\cap C\neq\emptyset$" となることがわかる．C は任意だったから，このことから $M\models$"S は $[\lambda]^\kappa$ の stationary な部分集合" となっていることが分るが，ふたたび M の elementarity と $\lambda^\kappa<\theta$ により，S は本当に $[\lambda]^\kappa$ の stationary な部分集合になっている． ❑ **(補題 11)**

上の補題の (a) ⇒ (b) は，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ の濃度が $\leq\kappa$ の任意の言語への任意の拡張 (expansion) で置き換えても同様に証明できる．このことを使うと実は次の補題が証明できることがわかる．

補題 12 $\aleph_0\leq\kappa\leq\lambda$ とする． このとき，$S\subseteq[\lambda]^\kappa$ に対し，以下は同値である:

(a) S は（$[\lambda]^\kappa$ の部分集合として） stationary である．

(b) ある／すべての正則基数 $\theta>\lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M}=\langle\mathcal{H}(\theta),\in,\lhd,\kappa,\lambda,S\rangle$ とするとき，$M\prec\mathcal{M}$ で，

(6.4) $|\,M\,|=\kappa$;

(6.5) $\kappa\subseteq M$;

(6.6) $\lambda\cap M\in S$

となるものが存在する．

(c) ある／すべての正則基数 $\theta>\lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M}=\langle\mathcal{H}(\theta),\in,\lhd,\kappa,\lambda,S\rangle$ とするとき，$\mathcal{M}$ の任意の濃度 $\leq\kappa$ の言語への拡張 $\mathcal{M}'$ に対し，$M\prec\mathcal{M}'$ で，(6.4), (6.5), (6.6) を満たすものが存在する． ❑

この補題を用いると，次の Fodor の定理の拡張が，第 5 節での Fodor の定理の証明とほとんど同じようにして示せる．

定理 13 $S\subseteq[\lambda]^\kappa$ を stationary として，$f:S\to\lambda$ を，すべての $a\in S$ に対し，$f(a)\in a$ が成り立つようなものとする．このとき，$\alpha^*\in\lambda$ で，$\{a\in S:f(a)=\alpha^*\}$ が stationary になるようなものが存在する．

証明． θ を十分に大きな正則基数として，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として $\mathcal{M}=\langle\mathcal{H}(\theta),\in,\lhd,\kappa,\lambda,S,f\rangle$ とする．このとき 補題 12 により，$M\prec\mathcal{M}$ で，$|\,M\,|=\kappa$, $\kappa\subseteq M$, $\lambda\cap M\in S$ となるものが存在する．$\alpha^*=f(\lambda\cap M)$ とすると，仮定から $\alpha^*\in\lambda\cap M$ だから，特に $\alpha^*\in M$ である．したがって，

[*8] upward directed であることは M の elementarity から，濃度 $\leq\kappa$ であることは，(6.4) からわかる．

[*9] $a\in C\cap M$ とすると，M の elementarity により $f\in M$ で κ から a への surjection となるものが存在するが，(6.5) により，$\kappa\subseteq M$ だから，$a=f''\kappa\subseteq M$ である．

$S' = \{a \in S : f(a) = \alpha^*\}$ は M の元のみをパラメタとして定義できるから，M の elementarity から，$S' \in M$ である．α^* の定義から，$\lambda \cap M \in S'$ だから，ふたたび 補題 12 により，S' は $[\lambda]^\kappa$ で stationary であることがわかる．したがって，α^* は求めていたようなものであることが示せた． ❑ **(定理 13)**

7 weak stationarity と Fodor の定理

$S \subseteq [\lambda]^\kappa$ が *weakly stationary* とは，すべての $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ に対し，$a \in S$ で F に関して閉じたもの（つまり $F''[a]^{<\omega} \subseteq a$ となるもの）が存在することとする．weak stationarity は，実際に stationarity を弱めた概念となっている:

定理 14 $\aleph_0 \le \kappa \le \lambda$ とする． このとき，$S \subseteq [\lambda]^\kappa$ に対し，以下は同値である:

(a) S は（$[\lambda]^\kappa$ の部分集合として） weakly stationary である．

(b) ある／すべての正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ とするとき，$M \prec \mathcal{M}$ で，

(6.4) $|\,M\,| = \kappa$;

(6.6) $\lambda \cap M \in S$

となるものが存在する．

(c) ある／すべての正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ とするとき，$\mathcal{M}$ の任意の可算言語への拡張 $\mathcal{M}'$ に対し，$M \prec \mathcal{M}'$ で，(6.4), (6.6) を満たすものが存在する．

証明． (a) $\Rightarrow$ (c): $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ を weakly stationary として，正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ と $\mathcal{H}(\theta)$ 上の well-ordering $\lhd$ をとり，$\mathcal{M}'$ を $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ の任意の可算言語への任意の拡張とする．$M^* \prec \mathcal{M}'$ を，$|\,M^*\,| = \lambda$, $\lambda \subseteq M^*$ となるものとして，$f : \lambda \to M^*$ を bijection とする．$\tilde{M}^* = \langle M^*, f \rangle$ とする[*10]．$\tilde{M}^*$ は $\lhd$ の M^* への制限を relation として持つから，built-in skolem functions を持つが，それらを $\langle h_n : n \in \omega \rangle$ と enumerate して，特に enumeration が

(7.1) すべての $n \in \omega$ に対し，h_n は $k_n \le n$ 変数関数;

(7.2) すべての $\tilde{M}^*$ の skolem function h に対し，$\{n \in \omega : h_n = h\}$ は無限集合

となるようにする．

$\langle f_n : n \in \omega \rangle$ を ω から ω への partial functions の列で，

[*10] この notation は Shelah の論文でしばしば見られるが，これは，ordered $n+1$-tuple が $\bar{a}^\frown c = \langle\langle \bar{a} \rangle, a \rangle$ として導入されていると思ったときの記法である．つまり，$\tilde{M}^* = \langle M^*, f \rangle = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S, f \rangle$ である．ただし，この書き方は，もとの M^* がすでに無限列である場合にも適用されたりするのであるが．記法の意識的な misuse は，他の数学の分野でよりは少ないとは言え，集合論でも多少は必要悪として許容しなくてはいけないこともあるのだろう．

(7.3)　すべての $\tilde{M}^*$ の skolem function h に対し，h が k-変数で，$n \in \omega$ が $h_n = h$ を満たすなら，$dom(f_n) = k$, $f_n{}''k \subseteq n$;

(7.4)　すべての $\tilde{M}^*$ の k 変数の skolem function h と，すべての $f \in {}^k\omega$ に対し，$n \in \omega$ で，$h_n = h$ かつ $f_n = f$ となるものが存在する

となるものをとる．(7.4) は (7.2) により問題なく実現できることに注意する．

ここで，$F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ を，$\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-1} < \lambda$ に対し，

(7.5)　$F(\{\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}\}) = f^{-1}(h_n(f_{\alpha_{f_n(0)}}, ..., f_{\alpha_{f_n(k_n-1)}}))$

として定義する．F は $\tilde{M}^*$ 上の skolem functions を完全にコードするものになっていることに注意する．仮定により，$a \in S$ で，F に関して閉じたものが存在するが，M を $sk_{\tilde{M}^*}(a)$ の $\mathcal{M}'$ の言語への制限とすると，$M \prec \mathcal{M}'$ で，$|\,a\,| = \kappa$ より $|\,M\,| = \kappa$ である．また，a が F に関して閉じていることから，$\lambda \cap M = a \in S$ となり，この M が求めていたようなものであることがわかる．

(c) $\Rightarrow$ (b) は明らかである．

(b) $\Rightarrow$ (a): θ, $\lhd$, $\mathcal{M}$, M を (b) でのようにとる．任意の $F \in M$, $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ に対し，$\lambda \cap M$ は F で閉じているから，M の elementarity により，$M \models$“$a \in S$ で F で閉じているものが存在する” が成り立つ．したがって，$M \models$“S は weakly stationary” である．したがって，ふたたび M の elementarity と θ が十分に大きいことから，S は本当に weakly stationary であることがわかる．　❑ **(定理 14)**

系 15 $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ が stationary なら，S は weakly stationary である．

証明．　補題 12 と 定理 14 によりよい．　❑ **(系 15)**

定理 14 の証明のアイデアを用いると，補題 12 は次の定理にさらに拡張できることがわかる:

定理 16 $\aleph_0 \leq \kappa \leq \lambda$ とする．このとき，$S \subseteq [\lambda]^\kappa$ に対し，以下は同値である:

(a)　S は（$[\lambda]^\kappa$ の部分集合として） stationary である．

(b)　すべての $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ に対し，$a \in S$ で，$\kappa \subseteq a$ で，F に関して閉じているようなものが存在する．

(c)　ある／すべての正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ とするとき，$M \prec \mathcal{M}$ で，(6.4), (6.5), (6.6) を満たすものが存在する．

(d)　ある／すべての正則基数 $\theta > \lambda^\kappa$ に対し，$\lhd$ を $\mathcal{H}(\theta)$ の任意の well-ordering として，$\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}(\theta), \in, \lhd, \kappa, \lambda, S \rangle$ とするとき，$\mathcal{M}$ の任意の濃度 $\leq \kappa$ の言語への拡張 $\mathcal{M}'$ に対し，$M \prec \mathcal{M}'$ で，(6.4), (6.5), (6.6) を満たすものが存在する．　❑

上の (d)　で，「任意の可算な言語への拡張 $\mathcal{M}'$ に対し」ではなく，「任意の濃度 $\leq \kappa$ の言語への拡張 $\mathcal{M}'$ に対し」とできるのは，(6.5) により，M に含まれる

ことが要請されている κ の各元を用いて κ 個の skolem functions を “コード” できるからで，逆に，定理 14，で「任意の濃度 $\leq \kappa$ の言語への拡張」とできないのは，このように拡張された言語では，$\kappa \subseteq M$ を要請する条件が書けてしまうからである．

定理 14 により，次の形の Fodor の定理が，定理 13 と同様に示せる:

定理 17 $S \subseteq [\lambda]^\kappa$ を weakly stationary として，$f : S \to \lambda$ を，すべての $a \in S$ に対し，$f(a) \in a$ が成り立つようなものとする．このとき，$\alpha^* \in \lambda$ で，$\{a \in S : f(a) = \alpha^*\}$ が weakly stationary になるようなものが存在する．❑

定理 14 と 定理 16 により，$\kappa = \omega$ のときには，weak stationarity と stationarity は一致する．正則基数 $\kappa > \omega$ に対しては，weak stationarity と stationarity が一致しない，という主張は large cardinal property である．Q. Feng は [2] で，$0^\#$ が存在しないならすべての 正則で非可算な κ で weakly stationary sets と stationary sets は一致すること，weakly stationary, non stationary set $\subseteq [\omega_2]^{\aleph_1}$ が存在すれば，Chang's Conjecture が成り立つこと，などを示している*11．

References

[1] G. Fodor, Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, Acta Sci. Math. (Szeged) 17 (1956), 139-142.

[2] Q. Feng, On weakly stationary sets, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.105, (3), (1989), 727–735.

[3] 渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，in: “ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック） 第 4 巻，集合論とプラトニズム”，東京大学出版会 (2007).

[4] 渕野 昌，初等部分構造の集合論での応用，2009 年 9 月に筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻で行なった集中講義の講義録,
https://fuchino.ddo.jp/notes/elementary09.pdf

*11 このへんの話なども，もっと色々と盛り込んだ拡張版をそのうち作りたいと思っています．なお，名古屋大学高等研究院の薄葉季路氏にはいくつかのタイプミスや書きあやまりを指摘していただきました．ここに感謝の意を表します．