数理論理学と不完全性定理

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/nagoya/logic05.html

(このスライドの pdf 版も上のページから downloadable)

July 22, 2005 名古屋大学 情報文化学部 2005年度前期 数理情報学 6 最終回講義

定理 (健全性定理 + 完全性定理, K. Gödel 1929) $T \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{K^*} \varphi$

無矛盾な L-理論 T が完全とは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ が成り立つこと．

完全な理論の例． $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ として，代数閉体の理論T_{ACF} を，次のような論理式（の $\forall$-閉包）からなる理論とする:

$(x+y)+z = x+(y+z)$　$x+0=x$

$x+(-1\cdot x)=0$　$x+y=y+x$

$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$　$x\cdot 1 = x$

$x \not\equiv 0 \to \exists y\ x\cdot y \equiv 1$　$x\cdot y = y\cdot x$

$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$　$0 \not\equiv 1$

$\Phi_n,\ n \geq 1$

ただし，Φ_n は“すべての n 次多項式は根を持つ”を主張する L-論理式．たとえば，Φ_2 は:

$$y \not\equiv 0 \to \exists x(y\cdot x\cdot x\cdot + z\cdot x + w \equiv 0)$$

定理． T_{ACF} は完全である．

$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ とすると，$\mathfrak{A} \models T_{ACF}$ だから，

$\{\varphi : \varphi$ は L-文, $T_{ACF} \vdash_{K^*} \varphi\} \subseteq \{\varphi : \varphi$ は L-文$, \mathfrak{A} \models \varphi\}$

定理 (健全性定理 + 完全性定理, K. Gödel 1929) $T \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{K^*} \varphi$

無矛盾な L-理論 T が 完全 とは, すべての L-文 φ に対し, $T \vdash \varphi$ または $T \vdash \neg\varphi$ が成り立つこと.

完全な理論の例. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ として, 代数閉体の理論T_{ACF} を, 次のような論理式（の $\forall$-閉包）からなる理論とする:

$(x + y) + z = x + (y + z)$ $\quad x + 0 = x$

$x + (-1 \cdot x) = 0$ $\quad x + y = y + x$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\quad x \cdot 1 = x$

$x \not\equiv 0 \to \exists y\ x \cdot y \equiv 1$ $\quad x \cdot y = y \cdot x$

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ $\quad 0 \not\equiv 1$

Φ_n, $n \geq 1$

ただし, Φ_n は "すべての n 次多項式は根を持つ" を主張する L-論理式. たとえば, Φ_2 は:

$$y \not\equiv 0 \to \exists x(y \cdot x \cdot x \cdot + z \cdot x + w \equiv 0)$$

定理. T_{ACF} は完全である.

$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ とすると, $\mathfrak{A} \models T_{ACF}$ だから,
$\{\varphi : \varphi$ は L-文, $T_{ACF} \vdash_{K^*} \varphi\} = \{\varphi : \varphi$ は L-文$, \mathfrak{A} \models \varphi\}$ である.

完全な理論のもう1つの例． $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ して，実閉体の理論 T_{RCF} を次の L-文からなる L-理論とする:

$(x+y)+z = x+(y+z)$	$x+0=x$	$\neg x < x$
$x+(-1\cdot x)=0$	$x+y=y+x$	$x<y \to y<z \to x<z$
$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$	$x\cdot 1 = x$	$x<y \vee y<x \vee x \equiv y$
$x \not\equiv 0 \to \exists y\ x\cdot y \equiv 1$	$x\cdot y = y\cdot x$	$x<y \to x+z<y+z$
$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$	$0 \not\equiv 1$	$0<x \to 0<y \to 0<x\cdot y$
$0<x \to \exists y(y\cdot y = x)$	Φ_n, $n>0$, n は奇数	

定理 (A. Tarski (?)) T_{RCF} は完全である．

$\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <\rangle$ とすると，$\mathfrak{B} \models T_{RCF}$ である．したがって，前と同様に，

$$\{\varphi :\ \varphi \text{ は } L\text{-文},\ T_{RCF} \vdash_{K^*} \varphi\} = \{\varphi :\ \varphi \text{ は } L\text{-文}, \mathfrak{B} \models \varphi\}$$

初等ユークリッド幾何学は T_{RCF} の中で“自然に”解釈することができる．

系． 初等ユークリッド幾何の理論は完全である．

定理． T が，具体的に与えられた，無矛盾で完全な L-理論なら，任意の L-論理式 φ に対し，φ が T の定理か（つまり $T \vdash_{K^*} \varphi$ かどうか）を判定するアルゴリズムが存在する．

L での証明を $P_1, P_2, P_3, \ldots$ とならべておき，順番に $P_1, P_2, P_3, \ldots$ が φ の T からの証明になっているか，あるいは $\neg\varphi$ の証明になっているか調べてゆけばいい．

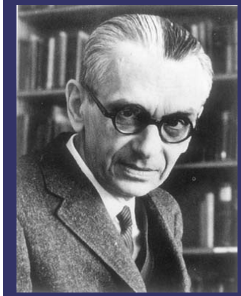
φ の証明になっている T からの証明 P_n が見つかれば φ は T の定理で，$\neg\varphi$ の証明になっている T からの証明 P_n が見つかれば φ は T の定理でない．

T が完全でなければ，φ も $\neg\varphi$ も T の定理でないようなものが存在するが，このような T と φ に対して上のようなアルゴリズムを適用すると，処理はハングアップしてしまう．

アルゴリズムが存在する，というのは，必ずしも使いものになるアルゴリズム（つまりコンピュータにのせることができて，それを実行したときに妥当な時間内で答を出してくれるアルゴリズム）が存在する，ということではない！

キーワード: P $\neq$ NP 問題

数学の体系（たとえば ZFC）は矛盾しないか? 完全か?
ZFC が矛盾しないことを証明できれば，数学の基礎づけの問題は安心して忘れられる (D. Hilbert, 1862–1943 [文久2年–昭和18年])


K. Gödel (1906–78)

定理 (ゲーデルの第一不完全性定理, Kurt Gödel, 1931 – 昭和6年) 任意の（具体的に与えられた，初等数論の体系を含む）理論 T は（それが無矛盾なら）**完全でない．** つまり，この理論の言語を L として，L-論理式 φ で，φ も $\neg\varphi$ も T から証明できないようなものが存在する．

定理 (ゲーデルの第二不完全性定理, 1931 – 昭和6年) T を任意の（具体的に与えられた，初等数論の体系を含む）公理系とするとき，T での数論により "公理系 T からの $\exists x(x \neq x)$ の証明は存在しない" という主張を数論的命題: $Consis(T)$ としてコードできる．T が矛盾しないなら，$Consis(T)$ は T から証明できないし，その否定も証明できない．つまり **T の無矛盾性は T で証明できない!**