

数理情報学 6 演習問題

1. $L = \{<\}$ とするとき, すべての L -構造 \mathfrak{A} と解釈 I に対して

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \Leftrightarrow <^{\mathfrak{A}} \text{が最大元を持たない}$$

となる φ を求めよ.

2. L を任意の言語とする. このときすべての L -構造 \mathfrak{A} と解釈 I に対して

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{はちょうど2つの元を持つ}$$

となる φ を求めよ

3. L を任意の言語とする. このときすべての L -構造 \mathfrak{A} と解釈 I に対して

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{はちょうど} n \text{個の元を持つ}$$

となる φ を求めよ.

4. F を 1 変数関数記号とし, $L = \{<, \cdot, +, F, 0, 1\}$ とする. このときすべて関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と解釈 I に対して

$$((\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, f, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}), I) \models \varphi \Leftrightarrow \text{任意の } x \text{ に対して } 0 \leq f'(x) \leq 1$$

となる φ を求めよ. (但し F は f で解釈する.)

5. l を 3 変数の関係記号として, $L = \{l\}$ とする. $l(x, y, z)$ を「点 x, y を通る直線上に点 z がある」と読み下すことにするとき, 次に主張に対応する L -論理式を求めよ.

- (1) 2 直線は同一であるか, 一点で交わるか, どの点でも交わらないかのいずれかである.
- (2) 1 直線上にない点を取ったとき, その点を通りもとの直線と交わらないような直線がちょうど 1 つ引ける. (平行線公理)