数理情報学 6 演習問題解答例

1. 「 x は $<$ に関する最大限である」は $\forall y(\neg x \equiv y \ \rightarrow \ y < x)$ と書ける．よって φ は次のようにすればよい．

$$\neg \exists x \forall y(\neg x \equiv y \ \rightarrow \ y < x)$$

2. φ は次にようにすればよい．

$$\exists x \exists y(\neg x \equiv y \ \wedge \ \forall z(z \equiv x \ \vee \ z \equiv y)\,)$$

3. 2 の答をそのまま n 個に拡張してやる．φ は次のようにすればよい．

$$\begin{aligned}\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \ (\ & \neg x_1 \equiv x_2 \ \wedge \ \neg x_1 \equiv x_3 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \neg x_1 \equiv x_{n-1} \ \wedge \ \neg x_1 \equiv x_n \\ & \wedge \neg x_2 \equiv x_3 \ \wedge \neg x_2 \equiv x_4 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \neg x_2 \equiv x_n \\ & \qquad \cdots \\ & \qquad \cdots \\ & \wedge \neg x_{n-1} \equiv x_n \\ & \wedge \forall z\,(z \equiv x_1 \ \vee \ z \equiv x_2 \ \vee \ \ldots \ \vee \ z \equiv x_n\,)\,)\end{aligned}$$

4. 「任意の x に対して $0 \leq f'(x) \leq 1$」はもう少し詳しく書くと，

($\star$) 「任意の x に対してある c が存在して，$0 \leq c \leq 1$ かつ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$ 」

となる．これを L-論理式で (つまり $<, \cdot, +, F, 0, 1$ のみを用いた論理式で) 書きたい．

問題は「$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$ 」の部分である．「$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$ 」は

「任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の h に対して $0 < |h| < \delta$
ならば $c - \epsilon < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < c + \epsilon$ 」

と書ける．(ϵ-δ 論法). L^* を L に個体記号 -1 を付け加えた言語とすると，これは L^*-論理式で

$$\begin{aligned}&\forall \epsilon\,(\epsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta\,(\delta > 0 \ \wedge \ \forall h\,(\\ &\qquad (\ 0 < h < \delta \quad \rightarrow \quad h \cdot (c + (-1 \cdot \epsilon)) \ < \ F(x+h) + (-1 \cdot F(x)) \ < \ h \cdot (c + \epsilon)\ ) \\ &\qquad \wedge (\ -1 \cdot \delta < h < 0 \quad \rightarrow \quad h \cdot (c + \epsilon) \ < \ F(x+h) + (-1 \cdot F(x)) \ < \ h \cdot (c + (-1 \cdot \epsilon))\ ) \\ &\quad)))\end{aligned}$$

と書ける．これから -1 を消去し L-論理式で書くには次のようにすればよい．(e が -1 の役割を果たす．)

$$\begin{aligned}&\exists e\,(e + 1 = 0 \ \wedge \ \forall \epsilon\,(\epsilon > 0 \ \rightarrow \ \exists \delta\,(\delta > 0 \ \wedge \ \forall h\,(\\ &\qquad (\ 0 < h < \delta \quad \rightarrow \quad h \cdot (c + e \cdot \epsilon) \ < \ F(x+h) + e \cdot F(x) \ < \ h \cdot (c + \epsilon)\ ) \\ &\qquad \wedge (\ e \cdot \delta < h < 0 \quad \rightarrow \quad h \cdot (c + \epsilon) \ < \ F(x+h) + e \cdot F(x) \ < \ h \cdot (c + e \cdot \epsilon)\ ) \\ &\quad))))\end{aligned}$$

この L-論理式を $\psi(x, c)$ とする．

ψ を使って，($\star$) は

$$\forall x \exists c\,(\,(0 < c < 1 \vee c \equiv 0 \vee c \equiv 1) \ \wedge \ \psi(x, c)\,)$$

と書ける．これを φ とすればよい．

5. 最初に，直線は異なる 2 点で決定されることに注意しておく．

(1) 「 x_1, y_1 と x_2, y_2 がそれぞれ異なる 2 点であるとき，x_1, y_1 を通る直線と x_2, y_2 を通る直線は，同一か，1 点で交わるか，交わらないかのいずれかである.」を L-論理式で表現してやればよい．次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (\, & (\neg x_1 \equiv y_1 \wedge \neg x_2 \equiv y_2) \ \rightarrow \ (\\
& \quad \forall z \, (\, l(x_1, y_1, z) \leftrightarrow l(x_2, y_2, z) \,) \\
& \vee \, \exists z \, (\, l(x_1, y_1, z) \wedge l(x_2, y_2, z) \wedge \forall w \, (\, l(x_1, y_1, w) \wedge l(x_2, y_2, w) \ \rightarrow \ w \equiv z) \,) \\
& \vee \, \neg \exists z (\, l(x_1, y_1, z) \wedge l(x_2, y_2, z) \,) \\
&) \,)
\end{aligned}
$$

(2) 以下を L-論理式で表現してやればよい.

> 「 x, y が異なる 2 点で z が x, y を通る直線上にないとき，異なる 2 点 a, b で次の (i) から (iii) を満たすものが存在する.
>
> (i) z は a, b を通る直線上にある.
>
> (ii) x, y を通る直線と a, b を通る直線は交わらない.
>
> (iii) 異なる 2 点 a', b' が (i) と (ii) を満たすなら，a, b を通る直線と a', b' を通る直線は同一である. 」

これを L-論理式で書いてやると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y \forall z \, (\, & (\neg x \equiv y \wedge \neg l(x, y, z)) \\
& \rightarrow \ \exists a \exists b \, (\, \neg a \equiv b \ \wedge \ l(a, b, z) \ \wedge \ \neg \exists w (l(x, y, w) \wedge l(a, b, w)) \\
& \qquad \wedge \, \forall a' \forall b' \, (\, (\, \neg a' \equiv b' \ \wedge \ l(a', b', z) \ \wedge \ \neg \exists w (l(x, y, w) \wedge l(a', b', w)) \,) \\
& \qquad\qquad \rightarrow \ \forall c \, (\, l(a, b, c) \leftrightarrow l(a', b', c) \,) \,) \,) \,)
\end{aligned}
$$