述語論理の形式的体系とその完全性

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

June 4, 2006

以下のテキストは，2005 年前期に名古屋大学情報文化学部で開講された数理情報学 6 の講義録である．現在のバージョンは，特に前半については，毎回の講義の準備で書いたメモの内容をそれほど編集を加えずにタイプしたものである．なお，このテキストを含む，講義関連の資料は

`http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/nagoya/logic05.html`

から downloadable である．

1　2005 年 4 月 8 日の講義

記号論理学 (symbolic logic)
数理論理学 (mathematical logic)
数学基礎論 (foundation of mathematics)

1. 数学を形式的に（記号の操作の体系として）展開できるような枠組が何かを調べる
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) の “夢”
Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925) ...

2. そのような体系が矛盾を含まないことを調べる．

3. そのような体系が数学を展開するときのベースとする論理体系として本当に十分か？
Yes: Kurt Gödel (1906 - 1978, 明治 39 年 – 昭和 53 年)
完全性定理 (Completeness Theorem, 1929)

4. そのような体系上での数学が矛盾を含まないことを調べる
David Hilbert (1862- 1943, 文久 2 年 – 昭和 18 年)
"Hilbert のプログラム"

5. 4. は厳密な意味では，完全には実行不可能:
Kurt Gödel (1906 - 1978) 不完全性定理 (Incompleteness Theorems, l931)

6. 4. の部分解 ... たとえば，古典的な解析学は，ある意味で矛盾を含まないことの保証ができる体系に含まれることが示せる（たとえば [5], [6] を参照）.

参考文献

[1] 倉田令二朗: 入門数学基礎論，河合文化教育研究所 (1996)
[2] 竹内外史，八杉満利子: 数学基礎論，共立出版 (1956/1974)
[3] 前原昭二: 数学基礎論入門，朝倉書店 (1977)
[4] H.-.D., Ebbinghaus J. Flum, W. Thomas: Einfürung in die mathematische Logik, Wissenschaftsverlag (1992, 英訳あり)
[5] G. Takeuti, Two applications of Logic, Iwanami Shoten & Princeton University Press (1978)
[6] 田中

例 1 φ を

$$\forall x \forall y((\exists z(z^2 + x \cdot z + y > 0) \land \exists z(0 > z^2 + x \cdot z + y) \ \rightarrow \ \exists z(z^2 + x \cdot z + y \equiv 0))$$

という "論理式 (formula)" とする．ここで現われる記号は

$$\begin{array}{rcl} \forall x \circ\circ\circ & : & \text{for all } x \circ\circ\circ \text{ holds} \\ \exists y \circ\circ\circ & : & \text{there exists } x \text{ such that } \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ \ \land \ \triangle\triangle\triangle & : & \circ\circ\circ \text{ and } \triangle\triangle\triangle \\ \circ\circ\circ \ \rightarrow \ \triangle\triangle\triangle & : & \circ\circ\circ \text{ implies } \triangle\triangle\triangle \end{array}$$

とうように解釈されるべきものとして導入されているとする．このような解釈をするとき，φ は $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0)$ では成り立つ（これを後では $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, 0) \models \varphi$ とあらわす）が，$(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0)$ では成り立たない（ つまり，$(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, 0) \not\models \varphi$ である）．なぜか？

2　2005年4月15日 + 22日 + 5月6日の講義 + $\cdots$

ここで導入したい“論理式”の体系は，たとえば前回の例であげた

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y(\exists z(z\cdot z + x\cdot z + y < 0) \land \exists z(0 < z\cdot z + x\cdot z + y)\\
&\rightarrow\ \exists z(z\cdot z + x\cdot z + y \equiv 0))
\end{aligned}
$$

というような記号列を論理式として含むものにしたいのであった．ここで用いられている記号を分析してみると，これらの記号は，それぞれの意図された意味に則して次のようなカテゴリーに分けることができることがわかる：

定数記号：0

演算記号（または関数記号）：$+, \cdot$

関係記号：$<$

等号：$\equiv$

変数記号：x, y, z

論理記号：$\land, \rightarrow$

量化子：$\forall, \exists$

括弧：‘(’, ‘)’,

上で導入された記号のカテゴリーのうち，等号，変数記号，論理記号，量化子，括弧は，どのような理論を考察する場合にも必要になりそうである．ただし，変数記号は，あらかじめいくつあれば十分か分らないので，無限個用意しておく必要がある．また，論理記号としては，一般にはここでは現われていない“... でない”, “または”をあらわす，$\neg$, $\lor$ という記号も必要になる．また括弧以外にもコンマ‘,’が補助記号として必要になる．

以上をまとめると，記述したい理論に依存せずに常に必要となる記号として：

等号：$\equiv$

変数記号：$x, y, z, x_0, x_1, \ldots,$ etc.

論理記号：$\neg, \land, \lor, \rightarrow$

量化子：$\forall, \exists$

括弧とコンマ：‘(’, ‘)’, ‘,’

を用意けばよいことがわかる．ただし変数記号については，実際にいくつ必要になるか事前に決められないため，無限個用意しておくものとする．これに対して，定数記号，関数記号，関係記号，としてどのようなものを用意しておく必要があるかは，これらを用いて記述したい（数学）理論に依存して決まるであろう．たとえば，

初等幾何の体系を記述したいときには,, “x, y, z が同一直線上にある”, という関係を表す記号が必要になるであろうが，これは，x, y, z の間の 3 項関係をあらわす関係記号でなくてはならないであろう．また $+$ や $\cdot$ のような二項演算をあらわす記号でなくて，3 項演算，4 項演算 etc. をあらわす関数記号が必要になる場合もあるであろう．このような状況を頭において，次の定義を行う：

記号の集合 L が言語 (language) であるとは，L に含まれる一つ一つの記号は，定数記号 (constant symbol) であるか，関数記号 (function symbol) であるか，関係記号 (relation symbol) であるかのいずれかで，L に含まれる関数記号と関係記号のそれぞれには，その記号の変数の数 (arity) が決まっているようなものとする．

言語 L が与えられたとき，数学的考察の対象となる領域の要素を表す L の記号による表現（例えば上の例では，‘$+$’ や ‘$\cdot$’ などの関数記号が L に含まれるときの $z\cdot z+x\cdot z+y$ など）を，L-項 (L-term) として次のように再帰的に定義する:

(2.1) 変数記号や，L の定数記号は L-項である; term-0

(2.2) f が L の n-変数関数記号で，$t_1,\ldots,t_n$ が L-項なら，$f(t_1,...,t_n)$ も L-項である. term-1

(2.3) L-項は (2.1) と (2.2) の繰り返し適用により得られるもののみとする. term-2

(2.3) に相当する規則は，このように書くと冗長なので，“以上のみ” などと書かれることも多い．f が 2 変数の関数記号の場合たとえば ‘$+$’ や ‘$\cdot$’ の場合，通常の慣習に合わせて，たとえば $+(t_1,t_2)$ と書かずに，(t_1+t_2) あるいは括弧も省略して t_1+t_2 などと書くこともある．ただし，これは読者が読みやすいように略記しているにすぎず，実際の形式としては上のような書き方が守られているものと考える．また上の例でのように括弧を省略して $z\cdot z+x\cdot z+y$ などと書いた場合には，$((z\cdot z)+(x\cdot z))+y$, $z\cdot(((z+x)\cdot z)+y)$ など複数の解釈が可能になるが，これも，‘$\cdot$’ の方が ‘$+$’ より結合力が強いという数学の通常の慣習での読みかた（ここでは $((z\cdot z)+(x\cdot z))+y$ という解釈）を採ることにする．これについても，単に，このような例の可読性のための略記にすぎないと考える．L-項 t が変数記号を含まないとき，t は閉項 (closed term) である，あるいは，閉じた L-項 (closed L-term) であるという．たとえば，L が定数記号 1 と 2 変数関数記号 $+$ を含むとき，

$$((\cdots((\underbrace{1+1)+1)+\ \cdots\ )+1}_{n\text{ 個の ‘1’}})$$

は L の閉項である．1 や $+$ が普通の算術でのように解釈されるときには，上の閉項は 数 n を表わすものと解釈できることに注意する（項の解釈については，以下を参照）.

L-項 t に含まれる変数記号が $x_1,\ldots,x_n$ のすべてに含まれるとき，このことを，

$$t=t(x_1,\ldots,x_n)$$

と表すことにする．ただし，$x_1,\ldots, x_n$ のうちには，実際には t に現われないものがあってもいいとする（ダミー変数）.

L-項や，以下で定義されることになる L-論理式は，それら自身は単に記号列にすぎないが，与えられた数学的対象で解釈することにより，これらに "数学的な意味" を付加したい．このために 言語 L に対応する数学的対象である L-構造 (L-structure) を次のように定義する: まず

$$L = \{c_i : i \in I\} \cup \{f_j : j \in J\} \cup \{r_k : k \in K\}$$

とする．ここに，c_i, f_j, r_k はそれぞれ，L の定数記号，関数記号，関係記号で，f_j は m_j-変数関数記号，r_k は n_k-変数関係記号であるとする．このとき，$\mathfrak{A}$ が L-構造であるとは，$\mathfrak{A}$ が

$$\mathfrak{A} = \langle A,\ c_i^{\mathfrak{A}},\ f_j^{\mathfrak{A}},\ r_k^{\mathfrak{A}}\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$$

という形をしており，A は空でない集合で，各 $c_i^{\mathfrak{A}}$, $i \in I$ は A の元， $j \in J$ に対し，$f_j^{\mathfrak{A}} : A^{m_j} \to A$, $k \in K$ に対し，$r_k^{\mathfrak{A}}$ は A 上の n_k-項関係 (つまり，$r_k^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{m_k}$) となることとする．$c_i\mathfrak{A}$, $f_j\mathfrak{A}$, $r_k\mathfrak{A}$ はそれぞれ，$\mathfrak{A}$ での c_i, f_j, r_k の "解釈" である．

$t = t(x_1,\ldots,x_n)$ を L-項とするとき，$t(x_1,\ldots,x_n)$ の $\mathfrak{A}$ での解釈 $t^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n) : A^n \to A$ を次のように再帰的に定義する．

(2.4)　t が定数記号 c_i のとき， term-3

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n) : A^n \to A\,;\ \langle a_1,\ldots,a_n\rangle \mapsto {c_i}^{\mathfrak{A}}$$

とする;

(2.5)　t が変数記号 x_i $(1 \le i \le n)$ のとき， term-4

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n) : A^n \to A\,;\ \langle a_1,\ldots,a_n\rangle \mapsto a_i$$

とする;

(2.6)　t が $f_j(t_1,\ldots,t_{m_j})$ という形をしているとき， term-5

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n) : A^n \to A\,;$$
$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \mapsto {f_j}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n)(a_1,\ldots,a_n),\ldots,t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n)(a_1,\ldots,a_n))$$

とする．

例 2 L を 2 変数関数記号 '$+$', '$\cdot$' を含む言語とする．$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \ldots\rangle$ とするとき，L-項 $t(x)$ を $x\cdot x + x + 1$ とると，$t^{\mathcal{R}}(x)$ は 2 変数関数

$$t^{\mathcal{R}}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ r \mapsto r^2 + r + 1$$

となる．

いささか煩雑に思えるかもしれないが，厳密には，$t^{\mathfrak{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ の定義が変数のリスト $x_1\ldots x_n$ を余裕を持ってとったときにも本質的には同じものになることを示す次の補題を，L-項の構成 (2.1)〜(2.3) に関する帰納法により証明しておく必要がある:

term-a-i

補題 1 t を L-項として，$x_1,\ldots,$ x_n を変数記号とする．$\ell_1,\ldots,$ ℓ_k $(k\le n)$ を 1, $2,\ldots,n$ の部分列として，$t=t(x_{\ell_1},x_{\ell_2},...,x_{\ell_k})$ とする．このとき，$t=t(x_1,...,x_n)$ でもあるが，任意の L-構造 $\mathfrak{A}=\langle A,\ldots\rangle$ と $a_1,\ldots,$ $a_n\in A$ に対し，等式

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n)=t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_k})$$

が成り立つ．

証明． この補題はほとんど自明と言えるが，証明は，L-項の構成に関する帰納法の証明の一例となるため書き出してみることにする．

t を L-項として，$a_1,\ldots,a_n\in A$ とする．

t が定数記号 c_i のときには (2.4) により，

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n)={c_i}^{\mathfrak{A}}=t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_k})$$

となるからよい．

t が変数記号 x_i のときには，$t=t(x_{\ell_1},x_{\ell_2},...,x_{\ell_k})$ だから，i は $\ell_1,\ldots,$ ℓ_k のどれかである．したがって，このときには，(2.5) により，

$$t^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n)=a_i=t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_k})$$

となるからよい．

t が $f_j(t_1,...,t_{m_j})$ の形をしていて，$t_1,\ldots,$ t_{m_j} に対しては補題が成り立つときには，(2.6) により，

$$\begin{aligned}
&t^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n)\\
&\quad={f_j}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n),...,t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_1,...,x_n)(a_1,...,a_n))\\
&\quad={f_j}^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_k}),...,t_{m_j}^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_i}))\\
&\quad=t^{\mathfrak{A}}(x_{\ell_1},...,x_{\ell_k})(a_{\ell_1},...,a_{\ell_k})
\end{aligned}$$

となるからよい． **（証明終）**

L-論理式 (L-formula) を次のように再帰的に定義する:

(2.7) t_1, t_2 を L-項とするとき，$t_1\equiv t_2$ は L-論理式である; fml-0

(2.8) $t_1,\ldots,$ t_n が L-項で，r が L の n-変数関係記号のとき，$r(t_1,...,t_n)$ は L-論理式である; fml-1

(2.9) φ, ψ が L-論理式のとき，$\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ も L-論理式である; fml-2

(2.10) φ が L-論理式で，x が変数記号の 1 つのとき，$\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ は L-論理式である; fml-3

(2.11) 以上のみ. fml-4

$\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ は，それぞれ，“すべての x に対し φ が成り立つ”, “ある x が存在して，この x に対し φ が成り立つ” という解釈を付与することになるものであるが，このような解釈を前提とすると，ここでの x はたとえば定積分をあらわす $\int_a^b f(x)dx$ での x と同じように，普通の変数としては機能しないと考えられる．そこで，このような $\forall$ や $\exists$ で “縛られた” 変数のことを束縛変数 (bounded variable) とよび，束縛変数でない変数を自由変数 (free variable) とよぶ．1 つの変数は論理式の中で同時に束縛変数としても自由変数としても現われることもある．例えば，$(\forall x\ x \equiv y\ \wedge\ x \equiv z)$ という論理式では，赤で書いた x は束縛変数だが，緑の x は自由変数となっている．先程の定積分の例に戻ると，たとえば $\int_a^b f(x)dx$ に積分変数として現われる x の呼びかえを行なって，$\int_a^b f(t)dt$ などと書きかえることで変数名の衝突を避けることがある．我々の論理式でも，同様に，束縛変数の呼びかえによって，1 つの論理式の中で同じ変数が束縛変数としても自由変数としても現われるという状況を避けることができる．たとえば，上で考察した論理式では，束縛変数として現われる x を，u と呼びかえて $(\forall u\ u \equiv y\ \wedge\ x \equiv z)$ と書きかえることで，このような状況が避けられる．この場合，厳密には，束縛変数の呼びかえをきちんと定義して，そのような束縛変数の呼びかえによって得られた論理式をもとの論理式と同一視することを宣言しなくてはならないが，ここでは，時間の関係でこれに関した細部は省略する．以下では論理式と言ったときには，必要なら (2.8) ∼(2.11) で導入された論理式に上のような操作を行なって自由変数と束縛変数の衝突の含まれていないものを扱かっていると仮定する．

Fml_L で L-論理式の全体からなる集合をあらわすことにする．

$$Fml_L = \{\varphi : \varphi \text{ は } L\text{-論理式}\}$$

である．

ここで，L-論理式の真偽の L-構造での解釈を以下のように導入する．Var で変数記号の全体からなる集合をあらわすことにする．Var はここでの議論をはじめる前に（L を選ぶ前に）固定された無限集合とする．L-論理式 φ を L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ で解釈するとき，φ の自由変数は $\mathfrak{A}$ での L-項の扱いでもそうだったように，A の上を動くものとして解釈できるが，そのように解釈すると，L-論理式の真偽が一意に決まらないかもしれない．このような困難を回避するために，変数記号をの一つ

一つをとりあえず A の元で固定して解釈してしまうことにする．そのために，Var から A への関数 I を固定して I を Var の解釈 (interprepation) と呼ぶことにする．

L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ で論理式 φ が解釈 I のもとで成り立つことを表す "$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$" を以下のように再帰的に定義する: $I : Var \to A$ で，$x \in Var$ かつ $a \in A$ のとき，$I_{x,a} : Var \to A$ を，$v \in Var$ に対し，

$$I_{x,a}(v) = \begin{cases} I(v) & v \text{ は } x \text{ と異なるとき} \\ a & v \text{ が } x \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．

(2.12) ある L-項 $t_1 = t_1(x_1, ..., x_n), t_2 = t_2(x_1, ..., x_n)$ に対し φ が $t_1 \equiv t_2$ の形をしているとき，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; {t_1}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)) = {t_2}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n))$; fml-5

(2.13) ある k-変数関係記号 r と L-項 $t_1 = t_1(x_1, ..., x_n), \ldots, t_k = t_k(x_1, ..., x_n)$ に対し，φ が $r(t_1, ..., t_k)$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; r^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)), ..., {t_k}^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_n)))$; fml-6

(2.14) ある L-論理式 θ, η に対し， fml-7

(a) φ が $\theta \wedge \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ かつ $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(b) φ が $\theta \vee \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ または $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(c) φ が $\neg\theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ でない;

(d) φ が $\theta \to \eta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; (\mathfrak{A}, I) \models \theta$ ならば $(\mathfrak{A}, I) \models \eta$;

(2.15) ある L-論理式 θ に対し， fml-8

(a) φ が $\forall x \theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\;$ すべての $a \in A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \theta$;

(b) φ が $\exists x \theta$ の形をしているとき，
$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \;\Leftrightarrow\;$ ある $a \in A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \theta$.

次の補題は補題 1 と同様に証明できる:

formula-a-i

補題 2 $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式として，$\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ を L-構造とする．今，$I : Var \to A$, $I' : Var \to A$ で $I(x_1) = I'(x_1), \ldots, I(x_n) = I'(x_n)$ なら，

$$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{A}, I') \models \varphi$$

が成り立つ．

補題 2 により，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ に対し，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ が成り立つかどうかは，$I(x_1), \ldots, I(x_n)$ のみに依存する．そこで，$a_1, \ldots, a_n \in A$ として，$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$ を

(2.16) $I(x_1) = a_1, ..., I(x_n) = a_n$ となるような，ある（すべての）$I : Var \to A$ に対し，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ となること

として定義できる．特に，φ が L-文のとき，つまり，自由変数が含まれないような L-論理式であるときには，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ は全く I に依存しない．そこで，これがある（すべての）I に対し成り立つことを $\mathfrak{A} \models \varphi$ とあらわすことにする．

L-文からなる集合を L-理論とよぶ．T が L-理論で $\mathfrak{A}$ が L-構造のとき，$\mathfrak{A} \models T$ とは，T に属すすべての L-文 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．$\mathfrak{A} \models T$ のとき，$\mathfrak{A}$ は T のモデルである，という．

$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ が L-論理式のとき，$\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$ は L-文となるが，このような L-文を φ の $\forall$-閉包とよぶ．以下で，自由変数を含む論理式を並べて，「このような論理式からなる理論を T とする」というように言ったときには，常に，実際には，それらの論理式の $\forall$-閉包からなる 理論 T を考えることにする． forall-closure

例 3 L を任意の言語として，$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，L-文 $\varphi_{\geq n}$ を

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\equiv x_j \right)$$

とする．ただし，$x_i \not\equiv x_j$ は $\neg x_i \equiv x_j$ の略記で，L-論理式 $\varphi_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ に対し，$\left(\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_{i,j} \right)$ は，すべての $1 \leq i < j \leq n$ に対する $\varphi_{i,j}$ を（適当な順序で）$\wedge$ で結合して得られる論理式とする．このとき，L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は } n \text{ 個以上の元を持つ}$$

が成り立つ．したがって，L-理論 T_∞ を

$$T_\infty = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

とすると，すべての L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ は無限集合}$$

である．

A が無限集合であるような，構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ を無限（な）構造とよび，A と L が有限集合であるような L-構造 $\mathfrak{A}$ を有限（な）構造とよぶ．上の例の T_∞ は無限構造の理論となっている．これに対し，任意の言語 L で有限な L-構造の L-理論は存在しないことが後で示される．しかし，各々の n に対し，“構造 $\mathfrak{A}$ の領域 A が n 個の要素を持つ” をあらわすような文は容易に作れる:

例 4 L を任意の言語として，$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，L-文 $\varphi_{n!}$ を

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \not\equiv x_j\right) \wedge \forall x \left(\bigvee_{1\le i\le n} x \equiv x_i\right)\right)$$

とする．ただし，L-論理式 φ_i, $1 < i < n$ に対し，$\left(\bigvee_{1\le i\le n}\varphi_i\right)$ は $\bigwedge$ のときと同様に定義する．このとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{n!} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ はちょうど } n \text{ 個の元を持つ}$$

が成り立つ．

より一般的に，$\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ が論理式のとき，$x_1, \ldots, x_n$ を φ に表われない変数記号として，$\exists^{\ge n} x\varphi$ を，

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{1\le i<j\le n} x_i \not\equiv x_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{1\le i\le n} \varphi(x_i, y_1, \ldots, y_k)\right)\right)$$

のこと，とすると，L-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ と $a_1, \ldots, a_k \in A$ に対し，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \exists^{\ge n} x\varphi(a_1, \ldots, a_k)\\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_k) \text{ を満たすような } a \in A \text{ は } n \text{ 個以上存在する}\end{aligned}$$

が成り立つ．“$\varphi(a, a_1, \ldots, a_k)$ を満たすような $a \in A$ はちょうど n 個存在する” をあらわすような $\exists^{n!} x\varphi$ も同様に定義することができる．異なる $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し $\varphi_{n!}$, $\varphi_{m!}$ を上の例でのようにとると，$T = \{\varphi_{n!}, \varphi_{m!}\}$ はモデルを 1 つも持たない理論となる．理論 T がモデルを持たないとき，T は（意味論的に）矛盾する，という．T がモデルを持つとき，T は（意味論的に）無矛盾である，という．

$L = \{c_i : i \in I\} \cup \{f_j : j \in J\} \cup \{r_k : k \in K\}$ として，$\mathfrak{A} = \langle A,\ {c_i}^{\mathfrak{A}},\ {f_j}^{\mathfrak{A}},\ {r_k}^{\mathfrak{A}}\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$，$\mathfrak{B} = \langle B,\ {c_i}^{\mathfrak{B}},\ {f_j}^{\mathfrak{B}},\ {r_k}^{\mathfrak{B}}\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$ を L-構造とするとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同型であるとは，$g : A \to B$ で，次の性質を満たすものが存在することである:

(2.17) g は A からの B への 1 対 1 の上射である;

(2.18) すべての $i \in I$ に対し $g({c_i}^{\mathfrak{A}}) = {c_i}^{\mathfrak{B}}$;

(2.19) すべての $j \in J$ と a, $a_1, \ldots, a_{m_j} \in A$ に対し，${f_j}^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{m_j}) = a \Leftrightarrow {f_j}^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_{m_j})) = g(a)$;

(2.20) すべての $k \in K$ と $a_1, \ldots, a_{n_k}$ に対し，${r_k}^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_{n_k}) \Leftrightarrow {r_k}^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_{n_k}))$.

上のような g を $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像という．同型写像の合成は同型写像で，同型写像の逆写像も同型写像だから，“$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は同型である” という関係は，L-構造間の同値関係になることがわかる．特に，恒等写像 $id_A : A \to A$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への同型写像となるから $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ 自身と同型である．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同値であるとき，これを $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ であらわす．同型な構造は，構造としては同一視できると考えられるが実際，そのような構造は論理式を用いて区別することができない:

補題 3 L を任意の言語として $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ と $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ を 同型な L-構造で $g : A \to B$ は $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像であるとする．このとき，任意の L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi(g(a_1), ..., g(a_n))$$

が成り立つ．

証明． φ の構成に関する帰納法で示せる． **（証明終）**

定理 4 L を任意の（有限な）言語とする．有限な L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，L-文 $\varphi_{\mathfrak{A}}$ で，任意の L-構造 $\mathfrak{B}$ に対し， finite-structures

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \quad \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$$

を満たすものが存在する．

上の定理で，$\mathfrak{A}$ が有限であることは本質的である: 無限の L-構造 $\mathfrak{A}$ に対しては，上のような性質を持つ $\varphi_{\mathfrak{A}}$ が存在しないことが後で示されることになる．

定理 4 の証明のスケッチ． 簡単のために L は 2 変数関係記号 r のみを含む場合を考える．$\mathfrak{A} = \langle A, r^{\mathfrak{A}} \rangle$ を有限な L-構造として， $A = \{a_1, ..., a_n\}$ とする．ただし，$a_1, ..., a_n$ はそれぞれ異なるとする．このとき，$R = \{\langle i, j \rangle : 0 \leq i, j \leq n,\, a_i\, r^{\mathfrak{A}}\, a_j\}$ として，次のような L-文 ψ を考える:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \cdots \exists x_n \Bigl(\Bigl(\textstyle\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\equiv x_j \Bigr) \wedge \forall x \Bigl(\textstyle\bigvee_{1 \leq i \leq n} x \equiv x_i \Bigr) \\ \wedge \Bigl(\textstyle\bigwedge_{1 \leq i, j \leq n, \langle i, j \rangle \in R} r(x_i, x_j) \Bigr) \wedge \Bigl(\textstyle\bigwedge_{1 \leq i, j \leq n, \langle ij \rangle \notin R} \neg r(x_i, x_j) \Bigr) \Bigr)\end{aligned}$$

この ψ の $\exists x_1 \cdots \exists x_n$ で縛られた部分を ψ_0 とよぶことにする．したがって ψ は $\exists x_1 \cdots \exists x_n \psi_0$ とあらわされる．ψ_0 の前半は，例 4 での $\varphi_{!n}$ でと同じ主張となっていることに注意する．今 $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ が L-構造で $\mathfrak{B} \models \psi$ とする．このとき，$b_1, ..., b_n \in B$ で，$\mathfrak{B} \models \psi_0(b_1, ..., b_n)$ となるものがとれるが，ψ_0 の前半により $B = \{b_1, ..., b_n\}$ となる．今 $g : A \to B$ を，$g(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$ で定義すると，ψ_0 の前半から，g 1 対 1 の上射となり，ψ_0 の後半から，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への同型写像となることが分る． **（証明終）**

3 2005 年 5 月 27 日〜の講義 — 理論の例

理論の例をいくつか与える．9 ページでも注意したように，以下で α_1, α_2 などとして与えられる論理式は，実際には，すべて，その $\forall$-閉包をとったものを考えている．

例 5 （稠密な線型順序の理論） $L = \{<\}$ とする．ここに，$<$ は 2 変数関係記号とする，稠密な線型順序 (dense linear order without end-points) の理論 T_{DLO} は，以下の $\alpha_1,...,\alpha_6$ により，$T_{DLO} = \{\alpha_1, ..., \alpha_6\}$ として与えることができる．

α_1: $x < y \wedge y < z \ \to\ x < z$

α_2: $\neg(x < x)$

α_3: $x < y \vee y < x \vee x \equiv y$

α_4: $x < y \ \to\ \exists z\,(x < z \wedge z < y)$

α_5: $\exists y\,(y < x)$

α_6: $\exists y\,(x < y)$.

たとえば，$\langle \mathbb{R}, <^{\mathbb{R}} \rangle$ や $\langle \mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}} \rangle$ は T_{DLO} のモデルである．

例 6 （Peano の公理系 – 初等数論の理論） $L = \{0, ', +, \cdot\}$ とする．ここに，0 は定数記号，$'$ は 1 変数関数記号で，$+$ と $\cdot$ は 2 変数関数記号である．直観的には，x' は数 x の次の数，つまり $x+1$ を与える関数である．以下に定義される $p_1, p_2, p_3,,$ 等により，

$$T_{\mathrm{PA}} = \{p_1, p_2, p_3, a_1, a_2, m_1, m_2\} \cup \{p_\varphi : \varphi(x, \overline{x}) \in Fml_L\}$$

として，T_{PA} を Peano の算術 (Peano arithmetic) と呼ぶ．T_{PA} は初等的な算術を公理化するものとなっている．

p_1: $x \not\equiv y \ \to\ x' \not\equiv y'$

p_2: $0 \not\equiv x'$

p_3: $x \not\equiv 0 \ \to\ \exists y\,(y' \equiv x)$

a_1: $x + 0 \equiv x$

a_2: $x + y' \equiv (x + y)'$

m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $x \cdot y' \equiv (x \cdot y) + x$

T_{PA} の定義の最後にある p_φ は φ の体現する性質に関する帰納法が成り立つことを主張する論理式で，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x}) \wedge \forall x\,(\varphi(x, \overline{x}) \to \varphi(x', \overline{x}))\ \to .\ \forall x\,\varphi(x, \overline{x})$

と定義される．$\langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +1, +, \cdot \rangle$ は T_{PA} のモデルである．

例 7 (Zermelo-Fraenkel の集合論) 以下のような集合の理論（この理論を，その初期の定式化を与えた E. Zermelo と A. Fraenkel の頭文字をとって ZF とよぶ）によって与えられる体系の中で，通常の数学すべてが展開できるようになる: $L = \{\varepsilon\}$ とする．ここに ε は 2 変数関係記号である．ZF は

$$\begin{aligned}\mathrm{ZF} = \{\ &\textbf{外延性公理}, \textbf{空集合公理}, \textbf{対の公理}, \textbf{和集の合公理}, \textbf{巾集合公理},\\ &\textbf{無限公理}, \textbf{基礎の公理}\ \} \cup \{\ \textbf{分出公理}_\varphi, \textbf{置換公理}_\varphi : \varphi \in Fml_L\}\end{aligned}$$

と与えられる．ここに **外延性公理** $\sim$ **基礎の公理** は以下の (**外延性公理**) $\sim$ (**基礎の公理**) に対応する L-文である．

外延性公理: $\forall z\,(z\varepsilon x \leftrightarrow z\varepsilon y) \;\rightarrow\; x \equiv y$

空集合公理: $\exists z \forall t\,(t \not\varepsilon z)$

対の公理: $\exists z \forall t\,(t\varepsilon z \;\leftrightarrow\; t \equiv x \vee t \equiv y)$

和集の合公理: $\exists s \forall t\,[t\varepsilon s \;\leftrightarrow\; \exists y\,(y\varepsilon x \;\wedge\; t\varepsilon y)]$

以下では "$z \subseteq x$" を "$\forall y\,(y\varepsilon z \;\rightarrow\; y\varepsilon x)$" の省略形とする． また，"$x \equiv \emptyset$" は "$\neg\exists y\,(y\varepsilon x)$" のこととする．$\{x\}$, $x \cup y$ 等についても同様に解釈する．

巾集合公理: $\exists p \forall t\,[t\varepsilon p \;\leftrightarrow\; t \subseteq x]$

無限公理: $\exists x\,[\exists y\,(y\varepsilon x \wedge y \equiv \emptyset) \;\wedge\; \forall t\,(t\varepsilon x \rightarrow t \cup \{t\}\varepsilon x)]$

基礎の公理: $\forall x\,[x \not\equiv \emptyset \;\rightarrow\; \exists y\,(y\varepsilon x \;\wedge\; \forall z\,(z\varepsilon y \rightarrow z \not\varepsilon x))]$

以下の公理では $\varphi(y, x_1, ..., x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ を L-論理式とする．

分出公理$_\varphi$: $\exists s \forall t\,[t\varepsilon s \;\leftrightarrow\; t\varepsilon x \wedge \varphi(t, \overline{x})]$

$\varphi(x, y, \overline{x}) \in Fml_L$ として，

置換公理$_\varphi$: $\forall x\,[x\varepsilon a \;\leftrightarrow\; \exists y\,\varphi(x, y, \overline{x})] \;\wedge\; \forall x \forall y \forall y'\,[\varphi(x, y, \overline{x}) \wedge \varphi(x, y', \overline{x}) \;\rightarrow\; y \equiv y']$
$\rightarrow\; \exists b \forall y\,[y\varepsilon b \;\leftrightarrow\; \exists x\,(x\varepsilon a \wedge \varphi(x, y, \overline{x}))]$.

ZF のモデルが何になるかは，ZF 自身が集合の全体の理論となっているため，微妙な問題となる．

4　2005年6月10日〜の講義 — 命題論理

命題論理 (propositional logic) とは，以下のようにして導入される記号列の体系である．

まず使われる記号として，次のものを用意しておく:

(4.1)　命題変数: 'A_1', 'A_2', . . . , 'B_1', 'B_2', . . . , etc.

(4.2)　論理記号: '$\wedge$', '$\vee$', '$\neg$', '$\rightarrow$'

(4.3)　補助記号: '(', ')'

以上のような記号の有限列の全体の部分集合として，命題論理の論理式の全体を，次のように再帰的に定義する．

(4.4)　命題変数は命題論理の論理式である;

(4.5)　φ, ψ が命題論理の論理式なら，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ も命題論理の論理式である;

(4.6)　以上のみ．

命題論理の論理式 φ に現われる命題変数がすべて命題変数のリスト $A_1,\ldots,A_n$ に含まれるとき，$\varphi=\varphi(A_1,\ldots,A_n)$ と書くことにする．

$\mathbb{2}=\{0,1\}$ とする．ここでの 1 と 0 はそれぞれ "真"(true) と "偽"(false) あるいは（電気回路などの）"on" と "off" などと解釈できる．f がブール関数とは，ある n に対して，$f:\mathbb{2}^n\to\mathbb{2}$ となること，つまり f は $\mathbb{2}$ から $\mathbb{2}$ への n 変数関数となっていること，とする．

命題論理の論理式 $\varphi=\varphi(A_1,\ldots,A_n)$ に対し，これの解釈 $f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}:\mathbb{2}^n\to\mathbb{2}$ を再帰的に定義する:

(4.7) φ が A_i $(1\le i\le n)$ なら，$p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{2}$ に対し，$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=p_i$ とする;

(4.8)

(a) φ が $(\psi_0\wedge\psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=\begin{cases}1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=1 \text{ かつ} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする;

(b) φ が $(\psi_0\vee\psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=\begin{cases}1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=1 \text{ または} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする;

(c) φ が $\neg\psi_0$ なら，$p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=\begin{cases}1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき;}\end{cases}$$

とする;

(d) φ が $(\psi_0\to\psi_1)$ なら，$p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{2}$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=\begin{cases}1, & f_{\psi_0(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=0 \text{ または} \\ & f_{\psi_1(A_1,\ldots,A_n)}(p_i,\ldots,p_n)=1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする．

上の定義は，$A_1,...,A_n$ の選択に関して整合性のとれたものになっている:

補題 5 $k \leq n$ として，$1 \leq i_1,...,i_k \leq n$ は互いに異なるものとする．このとき，命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_{i_1},...,A_{i_k})$ と任意の $p_1,...,p_n$ に対し，

$$f_{\varphi(A_1,...,A_n)}(p_1,...,p_n) = f_{\varphi(A_{i_1},...,A_{i_k})}(p_{i_1},...,p_{i_k})$$

となる．

prop-l-0

証明． φ の構成に関する帰納法による． **（証明終）**

I が（命題変数の）解釈であるとは，PropVar を命題変数の全体からなる集合として，$I : \mathrm{PropVar} \to \mathbb{2}$ となることとする．命題変数の解釈 I は 各命題変数 A に真偽値 $I(A)$ を付値するものとなっている．

命題変数の解釈 I と命題論理の論理式 $\varphi = \varphi(A_1,...,A_n)$ に対し，

$$I \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad f_{\varphi(A_1,...,A_n)}(I(A_1),...,I(A_n)) = 1$$

とする．補題 4 により，この定義は，$A_1,...,A_n$ の選び方に依存しない．

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{あすべての命題変数の解釈 } I \text{ に対し，} \ I \models \varphi$$

とする．$\models \varphi$ のとき φ は恒真 (universally valid) である，あるいは，トートロジー (tautology) であるという．

prop-l-1

補題 6 $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ を命題論理の論理式とする．また，L を任意の言語として $\varphi_1 = \varphi_1(x_1...x_m),...,\varphi_n = \varphi_n(x_1,...,x_m)$ を L-論理式とする．$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ を L-構造として，$a_1,...,a_m \in A$ とする．このとき，$0 < k < n$ に対し，

$$i_k = \begin{cases} 1 & \mathfrak{A} \models \varphi_k(a_1,...,a_m) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とすると，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\varphi_1,...,\varphi_n)(a_1,...,a_m) \quad \Leftrightarrow \quad f_{\varphi(x_1,...,x_n)}(i_1,...,i_n) = 1$$

prop-l-2

系 7 $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ を命題論理の論理式でトートロジーであるとする．L を任意の言語として，$\varphi_1 = \varphi_1(x_1...x_m),...,\varphi_n = \varphi_n(x_1,...,x_m)$ を L-論理式とするとき，任意の L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_m \varphi(\varphi_1,...,\varphi_n)$$

が成り立つ．

補題 6 の証明． φ の構成に関する帰納法による． **（証明終）**

上の系のような $\varphi(\varphi_1,...,\varphi_n)$ を，（述語論理の）トートロジーと呼ぶ．

5　2005 年 6 月 24 日〜の講義 — 形式的証明体系

L を言語として，T を L-理論とし，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式とする．すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ で $\mathfrak{A} \models T$ となるものに対し（つまり，すべての T のモデル $\mathfrak{A}$ に対し），$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ が成り立つとき，これを $T \models \varphi$ とあらわすことにし，“φ は T から（意味論的に）帰結される”．と読み下すことにする．

以下で，論理式 φ がある理論 T から帰結されるかどうかを，L-論理式の組合せ操作だけで判定できるような体系 K を導入することを試みる．より正確には，理論 T が与えられたとき，論理式 φ が T から（体系 K で）導出可能である（これを $T \vdash_K \varphi$ と書くことにする）という関係で次を満たすようなものがあることを示したい:

(5.1)　K は整合的 (correct) である[1]．つまり，$T \vdash_K \varphi$ なら $T \models \varphi$ である．　K-0

(5.2)　K は完全 (complete) である．つまり $T \models \varphi$ なら $T \vdash_K \varphi$ である．　K-1

(5.3)　$T \vdash_K \varphi$ は “φ の T からの証明 P が存在する” という性質により導入されており（このような P に対し，$T \vdash_K^P \varphi$ と書くことにする），T からの証明 P は，論理式の有限列で，ある論理式の有限列 P が T からの φ の証明であるかどうか（つまり $T \vdash_K^P \varphi$ であるかどうか）は（あるアルゴリズムにより）決定可能である．　K-2

このような体系 K が得られれば，$T \models \varphi$ のときには，$T \vdash_K^P \varphi$ となるような証明 P が存在し，しかも P が φ の T からの証明になっていることは（少なくとも原理的には）機械的に検証可能となる．

ここでは体系 K として次のような枠組を考える: K が述語計算の体系であるとは，すべての言語 L に対し，K の L での実現 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{A}_L, \mathbf{R}_L \rangle$ が，(L を固定するごとに L に関して一様に) 定義される．$\mathbf{A}$ は L-論理式の集合（論理的公理の集合）で，$\mathbf{R}$ は，$\langle p, \varphi \rangle$ の形の元からなる集合となるものとする．ただし，p は L-論理式の有限集合で φ は L-論理式である．$\varphi \in \mathbf{A}$ のとき，φ は K の公理であるという．また $p \in \mathbf{R}$ のとき，p は K の推論規則であるという．$\rho = \langle p, \varphi \rangle$ で，$p = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ のとき，これを

$$(\rho) \quad \frac{\varphi_1, ..., \varphi_n}{\varphi}$$

とも書く．

K が述語計算の体系で，$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ が言語 L に対する K の実現とするとき，L-論理式の集合 Γ, L-論理式の有限列 P と L-論理式 α に対し，“$\Gamma \vdash_K^P \varphi$” （$P$ は φ

[1] “K は健全 (sound) である，と言うこともある．

の Γ からの K での証明である）と "$\Gamma \vdash_K \varphi$"（φ は K で Γ から証明可能である）を次のようにして導入する:

L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K での証明である，とは次の (5.4) と (5.5) が成り立つこととする:

(5.4) $\varphi_n = \varphi$; K-3

(5.5) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次のいずれかが成り立つ: K-4

(a) $\varphi_i \in \mathbf{A} \cup \Gamma$ または,

(b) $(p, \psi) \in \mathbf{R}$ が存在して，$p \subseteq \{\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}\}$ かつ $\varphi_i = \psi$.

P が φ の Γ からの K での証明である，ということを $\Gamma \vdash_K^P \varphi$ と書くことにする．また $\Gamma \vdash_K \varphi$ とは．φ の Γ からの K での証明が存在すること，つまり $\Gamma \vdash_K^P \varphi$ となる証明 P が存在すること，とする．また，$\Gamma \vdash_K^P \varphi$ となるような，長さが n の証明 P が存在することを，$\Gamma \vdash_K^n \varphi$ と書くことにする．具体的に K が与えられたときに，$\vdash_K^n$ に対しての，n に関する帰納法，つまり証明 P の長さに関する帰納法は，$\vdash_K$ の性質を示すときの強力な（というより，むしろ，ほとんど唯一の）手段となる．

$\Gamma \vdash_K^P \varphi, \Gamma \vdash_K \varphi,...$ で Γ が空集合のときには，$\vdash_K^P \varphi, \vdash_K \varphi,...$ と書くことにする．また，$\Gamma \vdash_K^P \varphi, \Gamma \vdash_K \varphi,...$ が，言語 L を固定してそこで考えているものであることを強調する必要があるときには，$\Gamma \vdash_K^{P,L} \varphi, \Gamma \vdash_K^L \varphi,...$ などと書くことにする．

(5.3) は，言語 L に対し，L-論理式や L の論理式の有限集合と L-論理式の組が，$\mathbf{A}$ や $\mathbf{R}$ の要素となるかどうかを決定するアルゴリズムが存在すれば成り立つことは明らかである．

K と K' が共に (5.1), (5.2), を満たすような体系だとすると，すべての言語 L と L-理論 Γ と L-論理式 φ に対し，$\Gamma \vdash_K \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{K'} \varphi$ となるから，証明可能性に関して K と K' は同値になる．現在では，(5.1), (5.2), (5.3) を満たすような体系 K はいくつも知られているが，それらはすべて，この意味で同値な体系となっている．

以下で，体系 K^* を導入して，この体系が (5.1), (5.2), (5.3) を満たすことを示す．

論理式 $\varphi_1,...,\varphi_k, \varphi$ に対し，

$$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$$

は，$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ の略記のことと考える．

また，論理式を定義したところでは $\forall$ と $\exists$ を 2 つの独立した論理式として扱っていたが，$\mathfrak{A} \models \forall x \varphi$ は $\mathfrak{A} \models \neg \exists x \neg \varphi$ と同値になるような解釈がされていた—

(2.15)(a) を参照．そこで，以下では，$\forall x\varphi$ は $\neg\exists\neg\varphi$ の略記として扱うことにする．

言語 L を1つ固定する．このとき，K^* の論理的公理は3つのグループに分かれる:

1. **（トートロジー）** すべての（述語論理の）トートロジー $\in Fml_L$ は K^* の公理である．
2. **（等号の公理）** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式は K^* の公理である:

   (5.6) $x \equiv x\,;$ eq-a

   (5.7) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x\,;$ eq-b

   (5.8) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z\,;$ eq-b-0

   (5.9) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots x_n \equiv y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(y_1, \ldots, y_n)$, eq-c
   ただし f は L の n 変数関数記号;

   (5.10) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$, eq-d
   ただし r は L の n 変数関係記号.
3. **(代入公理)** $\varphi \in Fml_L$, $x \in Var$, t を L-項とする．φ に変数記号 x が自由変数として現われるすべての個所について，t に現われる，ある変数 y に対して $\exists y\psi$ という形の φ の部分論理式に含まれないとき — このことを t は φ で x に対し自由であるとい言う，$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x\varphi$ は K^* の公理である[2]．

K^* の推論規則は次のものである:

1. **(三段論法)** すべての $\varphi, \psi \in Fml_L$ に対し，$\dfrac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;
2. **(存在推論)** すべての $\varphi, \psi \in Fml_L$ と $x \in Var$ に対し，$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x\varphi \rightarrow \psi}$ は K^* の推論規則である．ただし，x は ψ には自由変数として現われないものとする．

K^* が (5.1), (5.2), (5.3) を満たすことを示したいわけであるが，いちいち $\vdash_{K^*}$ と書くのは煩雑なので，以下では，これを単に $\vdash$ と略すことにする．同様に，$\vdash^P, \vdash^n$ なども，それぞれ$\vdash^P_{K^*}, \vdash^n_{K^*}$ などの略である．

---

[2] $\varphi(t/x)$ で論理式 φ に自由変数として現われる x をすべて L-項 t で置き換えて得られる論理式をあらわす．ただし，この書き方をしたときには $\varphi = \varphi(x)$ は仮定せず，φ は x 以外の自由変数を含んでいてもよいとする．

以下では言語 L を1つ固定して考える．L は有限または可算とする．したがって，L-論理式は高々可算個しか存在しない．何も指定のない場合には，T は L-理論，φ, φ_0, φ_1,..., ψ, ψ_0,... などはすべて L-論理式とする．

定理 8 (健全性定理) $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$. soundness

証明． n に関する帰納法で，すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，

(5.11) $T \vdash^n \varphi$ なら $T \models \varphi$ soundness-0

となることが示せればよい．$n = 1$ のときは，φ は T に属すか，論理公理のうちのどれかである．

φ が T に属すときには，$T \models \varphi$ は明らかである．φ がトートロジーのときには，系 7 により $T \models \varphi$ である．φ が等号の公理のどれかのときにも，$T \models \varphi$ となることは明らかである．

φ が代入公理のときについて，$\models \varphi$ となることを確かめておく:
φ が $\alpha(t/x) \rightarrow \exists \alpha$ として，x は t に自由変数として現われないとする．このとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \text{すべての } I : Var \rightarrow A \text{ に対し,} (\mathfrak{A}, I) \models \alpha(t/x) \text{ なら } (\mathfrak{A}, I) \models \exists x \alpha$$

である．

$I : Var \rightarrow A$ で，$(\mathfrak{A}, I) \models \alpha(t/x)$ だったとする．$t = t(x_1, ..., x_k)$ とする．x は $\alpha(t/x)$ に自由変数として現われるすべての変数記号と 異なるとしてよいが，$a = t^{\mathfrak{A}}(I(x_1), ..., I(x_k))$ とすると，$(\mathfrak{A}, I_{x,a}) \models \alpha$ となるから，$(\mathfrak{A}, I) \models \exists x \alpha$ である．したがって，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が示せた．

次に，$n > 1$ で，すべての $1 \leq m < n$ に対しては (5.11)（で n を m で置き換えたもの）が成り立つことが既に示せていると仮定する．このときにも φ が T に属すか，論理公理のうちのどれかである場合は，$n = 1$ の場合と同様に $\mathfrak{A} \models \varphi$ となる．そうでない場合には，$\langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ を φ の証明として，$\varphi = \varphi_n$ は三段論法か存在推論によって φ_1,..., φ_{n-1} から導き出されている．

φ が三段論法によって導き出されている場合を考えてみる．このときには，i, $j < n$ で，$\varphi_j = \varphi_i \rightarrow \varphi$ となるものがあり，

$$\frac{\varphi_i,\, \varphi_i \rightarrow \varphi}{\varphi}$$

という推論がなされている．$\langle \varphi_1, ..., \varphi_i \rangle$ と $\langle \varphi_1, ..., \varphi_j \rangle$ がそれぞれ φ_i と φ_j の証明であることから，$T \vdash^i \varphi_i, T \vdash^j \varphi_j$ である．したがって，$\mathfrak{A} \models T$ とすると，帰納法の仮定から，

(5.12) $\mathfrak{A} \models \varphi_i$ かつ s-0

(5.13) $\mathfrak{A} \models \varphi_i \to \varphi$ s-1

である．$I : Var \to A$ なら，(5.13) により，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi_i$ なら $(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ だが，(5.12) により，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi_i$ だから，$(\mathfrak{A}, I) \models \varphi$ となることがわかる．$I : Var \to A$ は任意だったから，$\mathfrak{A} \models \varphi$ である．

φ が存在公理により導き出されている場合の証明は，演習とする． **（証明終）**

簡単な数学的証明を K^* での証明に書きなおしてみようとすると，これを直截的に行なうことは非常に困難なことに気付く．そこで，以下では，得られたいくつかの証明を編集して別の証明を作る手法をいくつか用意しておき，これらを活用ながら K^* での証明求める，という方法がとられる．このような手法を述べた定理は，普通の数学的定理とは異なり，普通には数学の外側にある "証明" を数学的対象として「上からながめる」視点から扱かう定理となっている．そこで，このような定理は，普通の数学的定理と区別してメタ定理 (meta-theorem) と呼ばれる．次の 補題 9 や， 演繹定理，補題 15, 代入定理はそのようなメタ定理である．

implication

補題 9 $T \vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ で，$T \vdash \varphi_1, \ldots, T \vdash \varphi_k$ なら，$T \vdash \varphi$ である．さらに，$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ と，$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ の T からの証明が与えられたとき，これらの証明から，φ の T からの証明を作るアルゴリズムが存在する．

証明． P_1 を $\varphi_1 \to \cdots \varphi_k \to \varphi$ の T からの証明として，P_2 を $T \vdash \varphi_1$ の T からの証明とする．$\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ は $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi)$ とも書けることに注意すると，$\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ は，φ_1 と $\varphi_1 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ から三段論法で得られることがわかる．したがって，

$$P_1 {}^\frown P_2 {}^\frown \langle \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi \rangle$$

は T からの $\varphi_2 \to \cdots \to \varphi_k \to \varphi$ の証明になっている[3)]．同様の議論を繰り返し証明をつなげてゆくことにより，最終的には $T \vdash \varphi$ の証明が得られる． **（証明終）**

$T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\} \vdash \varphi$ を $T, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \varphi$ とも書くことにする．

補題 10 (演繹定理 – Deduction Theorem) $T, \varphi \vdash \psi \iff T \vdash \varphi \to \psi$ である．さらに，P が ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明なら，P を変形して $\varphi \to \psi$ の T からの証明 P' を構成するアルゴリズムが存在し，逆も成り立つ．

証明． ($\Leftarrow$): $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ を $\varphi \to \psi$ の T からの証明とする．特に $\varphi_n = \varphi \to \psi$ である．このとき，$T, \varphi \vdash \varphi$ だから，$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \rangle$ は三段論法

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

3) 2 つの（有限）列 $S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$，$T = \langle t_1, \ldots, t_m \rangle$ に対し $S {}^\frown T$ で，これらの列の連接 $\langle s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \rangle$ をあらわす．

を最後の推論とする ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明になっている．

(⇒): すべての $n \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$ に対し，

(5.14) $T, \varphi \vdash^n \psi$ なら $T \vdash \varphi \to \psi$ となる．さらに，P が ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの長さ n の証明なら，P を変形して $\varphi \to \psi$ の T からの証明 P' を構成するアルゴリズムが存在する reduction-0

ことを，n に関する帰納法で示せばよい．

$n = 1$ なら，$\psi = \varphi$ か，ψ は T に属すか，ψ は論理的公理の1つか，のいずれかである．$\varphi = \psi$ なら $\varphi \to \psi$ はトートロジーとなるから，$T \vdash \varphi \to \psi$ は明らかである．ψ が T に属すか，論理公理である場合には，$\vdash$ の定義から， $T \vdash \psi$ である．$\psi \to (\varphi \to \psi)$ はトートロジーだから， $T \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ である．したがって，補題 9 により，$T \vdash \varphi \to \psi$ がわかる[4]．

$n > 1$ ですべての $1 \leq m < n$ に対して (5.14) が成り立つことがすでに示されているとする． $P = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ を ψ の $T \cup \{\varphi\}$ からの証明とする．もし，P で $\varphi_n = \psi$ の導出に三段論法も存在推論も用いられていなければ，長さが 1 の ψ の証明が得られることになり， $n = 1$ の場合の証明が適用できる．

もし，φ_n の導出に三段論法が適用されていれば，$i, j < n$ で，$\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$ となるものがある．帰納法の仮定から，$T \vdash \varphi \to \varphi_i$ で，$T \vdash \varphi \to \varphi_i \to \varphi_n$ である．したがって，$(\varphi \to \varphi_i) \to (\varphi \to \varphi_i \to \varphi_n) \to (\varphi \to \varphi_n)$ がトートロジーであることを用いると，補題 9 から， $\varphi \to \varphi_n$ $(= \varphi \to \psi)$ の T からの証明が得られる．

φ_n の導出に存在推論が用いられている場合の証明は演習とする． **（証明終）**

K^* が (5.3) を満たすことは明らかだが，このことから，次が言える:

endlichkeitssatz

補題 11 T を L-理論，φ を L-論理式とするとき，$T \vdash \varphi$ なら，有限な $T' \subseteq T$ で，$T' \vdash \varphi$ となるものが存在する．

証明． $T \vdash^P \varphi$ とする．このとき，P は有限列だから，P に現われる T の要素の全体を T' とすると，T' は有限である．T' のとり方から，$T' \vdash^P \varphi$ である． **（証明終）**

K^* は (5.2) も満たす:

定理 12 (完全性定理) T を L-理論として，φ を L-論理式とする．このとき，$T \models \varphi$ なら $T \vdash \varphi$ である． completeness

[4] ここでは補題 9 の $k = 1$ の場合を適用している．以下では，補題 9 は多用されることになるが，煩雑になるので「補題 9 により」という指摘はそれが明らかな個所ではいちいち行わないことにする．

以下で 定理 12 を証明する．L-理論 T が**矛盾**する，とは，すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つこととする．T が矛盾しないとき，T は **無矛盾** であるという．

補題 13 T が矛盾するなら，T はモデルを持たない．

証明． T を矛盾する L-理論とする．特に $T \vdash \exists x(x \not\equiv x)$ だから，定理 8 により，$T \models \exists x(x \not\equiv x)$ である．したがって，もし T がモデル $\mathfrak{A}$ を持つとすると，$\mathfrak{A} \models \exists x(x \not\equiv x)$ となるが，これは $\models$ の定義から矛盾である． **（証明終）**

inconsistent

補題 14 任意の L-理論 T について以下は同値である:

(a) T は矛盾する．

(b) ある L-論理式 φ について $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ が成り立つ．

(c) $T \vdash x \not\equiv x$.

証明． (a) $\Rightarrow$ (b) は T が矛盾することの定義から明らか．

(b) $\Rightarrow$ (c): ある L-論理式 φ について $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ が成り立つとする．このとき，$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to x \not\equiv x$ はトートロジーだから，補題 9 により $T \vdash x \not\equiv x$ となる．

(c) $\Rightarrow$ (a): $T \vdash x \not\equiv x$ とする．$x \equiv x$ は等号の公理 (5.6) で，$x \equiv x \to x \not\equiv x \to (x \equiv x \wedge x \not\equiv x)$ はトートロジーだから，$T \vdash (x \equiv x \wedge x \not\equiv x)$ である．したがって，“(b) $\Rightarrow$ (c)” の証明と同様に，任意の φ に対し，$T \vdash \varphi$ となることが示せる．
（証明終）

vdash-forall

補題 15 $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$.

証明． $n = 1$ のときについて示せば十分である．$\forall x\varphi$ は $\neg\exists x\neg\varphi$ の略記として扱かうことにしていたこと思い出しておく．

($\Rightarrow$): $T \vdash \varphi$ として，y を φ にあらわれない変数記号とする．このとき，$T, y \equiv y \vdash \varphi$ だから，演繹定理により，$T \vdash y \equiv y \to \varphi$ である．$(y \equiv y \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg y \equiv y)$ はトートロジーだから，$T \vdash \neg\varphi \to \neg y \equiv y$ である．したがって存在推論から．$T \vdash \exists x\neg\varphi \to \neg y \equiv y$ となる．ここで，$(\exists x\neg\varphi \to \neg y \equiv y) \to (y \equiv y \to \neg\exists x\neg\varphi)$ はトートロジーだから，$T \vdash y \equiv y \to \neg\exists x\neg\varphi$ となる．したがって，演繹定理により，$T, y \equiv y \vdash \neg\exists x\neg\varphi$ となる．$y \equiv y$ は等号の公理 (5.6) だから，$T \vdash \neg\exists x\neg\varphi$, つまり，$T \vdash \forall x\varphi$ である．

($\Leftarrow$): $T \vdash \forall x\varphi$ とする．このとき，y を任意の変数記号として，$T, y \equiv y \vdash \neg\exists\neg\varphi$ だから，演繹定理により，$T \vdash y \equiv y \to \neg\exists x\neg\varphi$ である．$(y \equiv y \to \neg\exists x\neg\varphi) \to (\exists x\neg\varphi \to \neg y \equiv y)$ はトートロジーだから，$T \vdash \exists x\neg\varphi \to \neg y \equiv y$ となる．したがって，代入公理 $\neg\varphi \to \exists x\neg\varphi$ とトートロジー $(\neg\varphi \to \exists x\neg\varphi) \to (\exists x\neg\varphi \to \neg y \equiv y) \to (\neg\varphi \to \neg y \equiv y)$ から，$T \vdash \neg\varphi \to \neg y \equiv y$. よって，トートロジー

$(\neg\varphi \to \neg y \equiv y) \to (y \equiv y \to \varphi)$ から，$T \vdash y \equiv y \to \varphi$ となり，演繹定理から，$T, y \equiv y \vdash \varphi$ となる．$y \equiv y$ は等号の公理 (5.6) だから，$T \vdash \varphi$ である． **（証明終）**

補題 16 (代入定理 — Substitution Theorem)$T \vdash \varphi$ で L-項 t は φ で x に対し自由なら， $T \vdash \varphi(t/x)$ である． subst-thm

証明． t に対する仮定から，$\neg\varphi$ に関する代入公理により，$\vdash \neg\varphi(t/x) \to \exists\neg\varphi$ である．

$$(\neg\varphi(t/x) \to \exists\neg\varphi) \to (\neg\exists x\neg\varphi \to \varphi(t/x))$$

はトートロジーだから，補題 9 により，

(5.15) $\vdash \neg\exists x\neg\varphi \to \varphi(t/x)$ subst-0

である．$T \vdash \varphi$ だから，補題 15 により，

(5.16) $T \vdash \neg\exists x\neg\varphi$ subst-1

したがって，ふたたび 補題 9 により，(5.15) と (5.16) から，$\vdash \varphi(t/x)$ である．**（証明終）**

次の 命題 17 も完全性定理と呼ばれることがあるが，実際，完全性定理 (定理 12) は，命題 17 の直接の帰結として導くことができる．

completeness'

命題 17 任意の L-理論 T について，T が無矛盾なら，T はモデルを持つ．

定理 12 の 命題 17 からの証明: $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ とする．$\models$ の定義から，

$$T \models \varphi \ \Leftrightarrow \ T \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

である．また補題 15 から，

$$T \vdash \varphi \ \Leftrightarrow \ T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$$

である．したがって，一般性を失なうことなく φ は L-文としてよい．

$T \not\vdash \varphi$ とすると，$T \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾である ［もし $T \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾するとすると，$T, \neg\varphi \vdash \varphi$ である．したがって，演繹定理から， $T \vdash \neg\varphi \to \varphi$ となるが，$(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ はトートロジーだから， 補題 9 により，$T \vdash \varphi$ となってしまい矛盾である］．よって，命題 17 により，$T \cup \{\neg\varphi\}$ はモデルを持つから，$T \not\models \varphi$ である．

以上で $T \not\vdash \varphi$ なら $T \not\models \varphi$ が示せたが，これは完全性定理の対偶命題となっている． **（証明終）**

以下では T を無矛盾な L-理論とする．命題 17 の証明には，T のモデルを構成すればよいが，これは，以下の 補題 20 と 補題 24 により実行される．

まず，次の準備をしておく: C を L に含まれない新しい定数記号の（可算）無限集合とする．L に C の記号を加えて得られる言語を L' と呼ぶことにする．

L-L'

補題 18 φ を L-論理式とするとき，

$$\begin{array}{ll} & T \vdash \varphi \text{ が } L \text{ 上で成り立つ (つまり } T \vdash^{L} \varphi \text{ である)} \\ \Leftrightarrow & T \vdash \varphi \text{ が } L' \text{ 上で成り立つ (つまり，} T \vdash^{L'} \varphi \text{ である).} \end{array}$$

証明． "$\Rightarrow$" は明らかである．"$\Leftarrow$": $P = \langle \varphi_1, ..., \varphi_n \rangle$ を φ の T からの L' での証明とする．特に $\varphi_n = \varphi$ である．$c_1,...,c_m$ をこの証明 P に現われる C の要素のすべてとして，$x_1,...,x_m$ を P に現われない m 個の変数記号とする．$\varphi_1, ..., \varphi_n$ に現われる $c_1,...,c_m$ をそれぞれすべて $x_1,...,x_m$ で置き換えて得られる論理式を $\varphi_1^*, ..., \varphi_n^*$ とする． $\varphi_n = \varphi$ は L-論理式だから $\varphi_n^* = \varphi$ となっている．同様に φ_i が T の要素である場合にも $\varphi_i^* = \varphi_i$ である．このことに注意すると，$P^* = \langle \varphi_1^*, ..., \varphi_n^* \rangle$ は L での φ の T からの証明となっていることがわかる． **（証明終）**

$$\mathbb{V}_L = \{\Gamma : \Gamma \text{ は } L\text{-理論で } \Gamma \text{ は無矛盾}\}$$

とする．$\mathbb{V}_{L'}$ も同様に定義する．補題 18 により， $\mathbb{V}_L \subseteq \mathbb{V}_{L'}$ である．

V-L'

補題 19 $\Gamma, \Gamma_i, i \in I$ を L'-理論とする．このとき，

(a) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ として， L'-文 φ に対し，$\Gamma \vdash \varphi$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

(b) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma' \subseteq \Gamma$ なら，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$.

(c) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'} \Leftrightarrow$ すべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$.

(d) $\Gamma_i \in \mathbb{V}_{L'}, i \in I$ で，すべての $i, j \in I$ に対し，$\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ または $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$ なら，$\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \in \mathbb{V}_{L'}$.

(e) $\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら $\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ または $\Gamma \cup \{\psi\} \in \mathbb{V}_{L'}$.

(f) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，任意の L'-文 φ に対し，$\Gamma \cup \{\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ または$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

(g) $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma \cup \{\exists x \varphi(x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．ただし c は $\Gamma \cup \{\varphi(x)\}$ に 現われない定数記号 ($\in C$) とする．さらに，このときには，$\Gamma \cup \{\exists x \varphi(x), \varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．

証明． (a): $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ で $\Gamma \vdash \varphi$ とする．もし $\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ である．$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash^{P} x \not\equiv x, \Gamma \vdash^{Q} \varphi$ とすれば，$Q \frown P$ は $x \not\equiv x$ の Γ からの証明となるが，補題 14 により，これは $\Gamma \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(b): 対偶を示す．もし $\Gamma' \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$\Gamma' \vdash x \not\equiv x$ だが，$\Gamma' \subseteq \Gamma$ により，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ となる．したがって，補題 14 により，$\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(c): "$\Rightarrow$" は (b) によりよいから，"$\Leftarrow$" を示す．すべての有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ に対し，$\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$ であるとする．もし $\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ だが，補題 11 に

より，有限な $\Gamma' \subseteq \Gamma$ で $\Gamma' \vdash x \not\equiv x$ となるものがとれる．しかし，補題 14 により，これは $\Gamma' \in \mathbb{V}_{L'}$ の仮定に矛盾する．

(d): もし $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i \notin \mathbb{V}_{L'}$ だったとすると，$x \not\equiv x$ の $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ からの証明 P が存在する．P は有限列だから，$i_0 \in I$ で P に現われる $\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ の公理がすべて Γ_{i_0} に含まれるようなものが存在する．このとき，$\Gamma_{i_0} \vdash^P x \not\equiv x$ となるが，これは，$\Gamma_{i_0} \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(e): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ かつ $\Gamma \cup \{\psi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすれば，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ かつ $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash x \not\equiv x$ である．したがって，演繹定理により，

$$(5.17) \quad \Gamma \vdash \varphi \to x \not\equiv x \ \text{ かつ } \ \Gamma \vdash \psi \to x \not\equiv x \qquad \text{bbdV-0}$$

である．一方

$$(5.18) \quad (\varphi \to x \not\equiv x) \to (\psi \to x \not\equiv x) \to (\varphi \vee \psi \to x \not\equiv x) \qquad \text{bbdV-1}$$

はトートロジーだから，(5.17), (5.18) と補題 9 により，$\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \to x \not\equiv x$ である．したがって，演繹定理により，$\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash x \not\equiv x$ となるから，$\Gamma \cup \{\varphi \vee \pi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(f): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ かつ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ かつ $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash x \not\equiv x$ となるから，演繹定理により，

$$(5.19) \quad \Gamma \vdash \varphi \to x \not\equiv x \ \text{ かつ } \ \Gamma \vdash \neg\varphi \to x \not\equiv x \qquad \text{bbdV-2}$$

である．一方

$$(5.20) \quad (\varphi \to x \not\equiv x) \to (\neg\varphi \to x \not\equiv x) \to x \not\equiv x \qquad \text{bbdV-3}$$

はトートロジーだから，(5.19), (5.20) と補題 9 により，$\Gamma \vdash x \not\equiv x$ である．したがって，$\Gamma \notin \mathbb{V}_{L'}$ である．

(g): 対偶を示す．$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ とすると，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \vdash x \not\equiv x$ となる．したがって，演繹定理により，$\Gamma \vdash \varphi(c/x) \to x \not\equiv x$ である．P を $\varphi(c/x) \to x \not\equiv x$ の Γ からの証明として，z を P に現われない変数記号とするとき，P に含まれる論理式のすべてに現われる c を z で置き換えて得られる論理式の列を P' とすると，P' は $\varphi(z/x) \to x \not\equiv x$ の Γ からの証明になる．したがって，$P' {}^\frown \langle \exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x\rangle$ は存在推論を最後の推論とするような Γ からの証明となっている．このことと演繹定理から，

$$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x\} \vdash x \not\equiv x$$

となり，したがって，補題 14 により

$$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x) \to x \not\equiv x\} \notin \mathbb{V}_{L'}$$

である．主張の後半は，次のようにして見ることができる: 代入公理により，$\Gamma \vdash \varphi(c/x) \to \exists x\varphi(x)$ だから，演繹定理により，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \vdash \exists x\varphi(x)$ である．したがって，$\Gamma \cup \{\varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら，(a) により，$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x), \varphi(c/x)\} \in \mathbb{V}_{L'}$ である． **(証明終)**

補題 20 $\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$, $T \subseteq \tilde{T}$ で，次の (5.21) ∼ (5.23) を満たすものが構成できる: Henkin-extension

(5.21) すべての L'-文 φ に対し，$\varphi \in \tilde{T}$ または $\neg\varphi \in \tilde{T}$; Henkin-0

(5.22) すべての L'-文 φ に対し， $\tilde{T} \vdash \varphi$ なら，$\varphi \in \tilde{T}$ となる; Henkin-1

(5.23) $\exists x\varphi \in \tilde{T}$ なら，ある $c \in C$ に対し $\varphi(c/x) \in \tilde{T}$ となる． Henkin-2

上の (5.21) ∼ (5.23) を満たすような $\tilde{T}$ を **Henkin 理論** (Henkin theory) とよぶ． $T \subseteq \tilde{T}$ で $\tilde{T}$ が Henkin 理論のとき，$\tilde{T}$ を T の **Henkin 拡大** (Henkin extension) という．

補題 20 の証明． L'-文の全体は可算なので，L'-文を $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2,\ldots$ と枚挙しておく．ただし，

(5.24) すべての L'-文 φ はこのリストの中に無限回あわれる Henkin-2-0

ようにしておく．

$\mathbb{V}_{L'}$ の要素の ($\subseteq$ に関する) 上昇列 $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \cdots$ で次の (5.25) ∼ (5.28) を満たすようなものを帰納的にとる:

(5.25) $T_0 = T$; Henkin-3

(5.26) すべての $i \in \mathbb{N}$ に対し，T_i にあらわれる新しい定数記号 ($\in C$) は高々有限個である; Henkin-4

(5.27) $T_i \cup \{\varphi_i\} \in \mathbb{V}_{L'}$ なら， Henkin-5

(a) もし φ_i が $\exists x\psi(x)$ という形をしているなら，c を $T_i \cup \{\varphi_i\}$ にあらわれない最初の C の元として，$T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i, \psi(c)\}$;

(b) φ_i が $\exists x\psi(x)$ という形をしていないときには，$T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i\}$

(5.28) $T_i \cup \{\varphi_i\} \notin \mathbb{V}_{L'}$ なら，$T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\varphi_i\}$. Henkin-6

まず，上のような帰納的構成が可能であることを見る．このためには上のようにして構成された T_i, $i \in \mathbb{N}$ が，実際に (5.26) を満たし，$\mathbb{V}_{L'}$ の要素になることを確かめればよい:

補題 18 により，$T \in \mathbb{V}_{L'}$ だから，(5.25) はよい．(5.26) は，T_0 に対して成り立つことは (5.25) により明らかだが，(5.27) と (5.28) での T_{i+1} の T_i からの構成

でも，T_{i+1} に新しく現われる C の元は高々有限個だから，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し (5.26) が成り立つことがわかる．(5.27), (a) で構成された T_{i+1} が $\mathbb{V}_{L'}$ に属することは 補題 19, (g) から，(5.28) で構成された T_{i+1} が $\mathbb{V}_{L'}$ に属することは 補題 19, (f) からわかる．

$\tilde{T} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ とすると，補題 19, (d) により，$\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$ である．したがって $\tilde{T}$ が (5.21) $\sim$ (5.23) を満たすことが示せれば，証明が完了する．

(5.21): φ を L'-文として，$\varphi \notin \tilde{T}$ だったとする．$\varphi = \varphi_{i_0}$ となる $i_0 \in \mathbb{N}$ をとると，$\varphi_{i_0} \notin T_{i_0+1}$ だから，T_{i_0+1} の構成では (5.28) が適用されていなくてはならない．したがって $\neg\varphi = \neg\varphi_{i_0} \in T_{i_0+1} \subseteq \tilde{T}$ である．

(5.22): φ を L'-文として，$\tilde{T} \vdash \varphi$ とする．このときには，補題 11 により，$i_0 \in \mathbb{N}$ で $T_{i_0} \vdash \varphi$ となるものがとれる．(5.24) により， $i_1 \geq i_0$ で，$\varphi = \varphi_{i_1}$ となるようなものがとれるが， $T_{i_1} \vdash \varphi_{i_1}$ だから，$T_{i_1} \cup \{\varphi_{i_1}\} \in \mathbb{V}_{L'}$ となり，T_{i_1+1} の構成では，(5.27) が適用されていることがわかる．したがって，$\varphi = \varphi_{i_1} \in T_{i_1+1} \subseteq \tilde{T}$ である．

(5.23): $\exists x\varphi(x) \in \tilde{T}$ なら，$i_0 \in \mathbb{N}$ で $\exists x\varphi(x) \in T_{i_0}$ となるものがあるが，$i_1 \geq i_0$ を $\exists x\varphi(x) = \varphi_{i_1}$ となるようにとると，(5.27), (a) により，$\varphi(c) \in T_{i_1+1} \subseteq \tilde{T}$ となるような $c \in C$ が存在する． **（証明終）**

補題 24 で Henkin 理論 $\tilde{T}$ のモデルが存在することを示すが，補題 22 はそこで用いるモデルの構成のための準備である．まず 補題 22 のための準備として，次の K^* に関する一般的な補題を示しておく:

terms

補題 21 L を任意の言語として，$t, t', t'', t_1,\ldots, t_n, t'_1,\ldots, t'_n$ を L-項とする．このとき，

(a) $\vdash t \equiv t$;

(b) $\vdash \exists x(x \equiv t)$ ただし，x は t に現われない変数記号とする;

(c) $\vdash t \equiv t' \to t' \equiv t$;

(d) $\vdash t \equiv t' \to t' \equiv t'' \to t \equiv t''$.

(e) L の n-変数関数記号 f に対し，

$$\vdash t_1 \equiv t'_1 \to \cdots t_n \equiv t'_n \to f(t_1,\ldots,t_n) \equiv f(t'_1,\ldots,t'_n)\,;$$

(f) L の n-変数関係記号 r に対し，

$$\vdash t_1 \equiv t'_1 \to \cdots t_n \equiv t'_n \to r(t_1,\ldots,t_n) \to r(t'_1,\ldots,t'_n).$$

証明． (a): 等号の公理 (5.6) と代入定理 (定理 16) によりよい．

(b): $\varphi =$ “$x \equiv t$” に対する代入公理から，$\vdash t \equiv t \to \exists x(x \equiv t)$ だが，(a) により $\vdash t \equiv t$ なので，補題 9 により，$\vdash \exists x(x \equiv t)$ である．

(c),(d), (e), (f): それぞれ，等号の公理 (5.7), (5.8), (5.9), (5.10), および，代入定理 (定理 16) によりよい． **（証明終）**

補題 22 $\tilde{T}$ を Henkin 理論とする．このとき，　Henkin-theory

(a)　$c \in C$ なら，“$c \equiv c$” $\in \tilde{T}$ である．

(b)　t, t', t'' を閉じた L'-項とするとき，“$t \equiv t'$”, “$t' \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ なら，“$t \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ である．

(c)　t を閉じた L'-項とするとき，$c \in C$ で “$c \equiv t$” $\in \tilde{T}$ となるものが存在する．また $c, c' \in C$ に対し，“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t$” $\in \tilde{T}$ なら，“$c \equiv c'$” $\in \tilde{T}$ である．

(d)　$c, c' \in C$ で t, t' を閉じた L'-項とする．“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t'$” $\in \tilde{T}$ なら，

$$\text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T} \ \Leftrightarrow\ \text{“}t \equiv t'\text{”} \in \tilde{T} \text{ である．}$$

(e)　$t_1,\ldots,\ t_n,\ t'_1,\ldots,\ t'_n$ を閉じた L-項として，f を n-変数関数記号とするとき，

$$\text{“}t_1 \equiv t'_1\text{”} \in \tilde{T},\ldots,\ \text{“}t_n \equiv t'_n\text{”} \in \tilde{T} \ \Rightarrow\ \text{“}f(t_1,\ldots,t_n) \equiv f(t'_1,\ldots,t'_n)\text{”} \in \tilde{T}.$$

(f)　$t_1,\ldots,\ t_n,\ t'_1,\ldots,\ t'_n$ を閉じた L-項として，r を n-変数関係記号とするとき，

$$\text{“}t_1 \equiv t'_1\text{”} \in \tilde{T},,\ldots,\ \text{“}t_n \equiv t'_n\text{”} \in \tilde{T} \ \Rightarrow\ \text{“}r(t_1,\ldots,t_n) \rightarrow r(t'_1,\ldots,t'_n)\text{”} \in \tilde{T}.$$

(g)　φ を L'-文とするとき，$\varphi \in \tilde{T} \Leftrightarrow$ “$\neg\varphi$”$\notin \tilde{T}$ である．

(h)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \vee \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$) である．

(i)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \wedge \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \in \tilde{T}$ かつ $\psi \in \tilde{T}$) である．

(j)　φ, ψ を L'-文とするとき，“$\varphi \rightarrow \psi$” $\in \tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi \notin \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$) である．

証明．　(a): 補題 21,(a) により，$\vdash c \equiv c$ である．したがって，(5.22) により，“$c \equiv c$” $\in \tilde{T}$ である．

(b): 等号の公理 (5.8) と代入定理により，$\vdash t \equiv t' \rightarrow t' \equiv t'' \rightarrow t \equiv t''$ だから，“$t \equiv t'$”, “$t' \equiv t''$” $\in \tilde{T}$, なら，$T \vdash t \equiv t'$, $T \vdash t' \equiv t''$ により，補題 9 から，$T \vdash t \equiv t''$ となる．したがって，(5.22) により，“$t \equiv t''$” $\in \tilde{T}$ である．

(c): 補題 21,(b) と (5.22) により，“$\exists x(x \equiv t)$” $\in \tilde{T}$ である．したがって，(5.23) により，$c \in C$ で “$c \equiv t$” $\in \tilde{T}$ となるものが存在する．補題 21,(c),(d) により，$\vdash c \equiv t \rightarrow c' \equiv t \rightarrow c \equiv c'$ だから，“$c \equiv t$”, “$c' \equiv t$” $\in \tilde{T}$ なら，補題 9 により，$T \vdash c \equiv c'$ となり，(5.22) により，“$c \equiv c'$” $\in \tilde{T}$ である．

(d): (c) の後半と同様に示せる．

(e): 補題 21,(e), 補題 9 および (5.22) によりよい．

(f): 補題 21,(f), 補題 9 および (5.22) によりよい．

(g) $\varphi \notin \tilde{T}$ なら (5.21) により $\neg\varphi \in \tilde{T}$ である．$\varphi \in \tilde{T}$ として，$\neg\varphi \in \tilde{T}$ なら，$\tilde{T} \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ となるが，これは 補題 14 により $\tilde{T} \in \mathbb{V}_{L'}$ に矛盾である．

(h): $\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$ だとする．たとえば，$\varphi \in \tilde{T}$ とすると，$\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ はトートロジーだから，補題 9 により $\tilde{T} \vdash \varphi \vee \psi$ となり，(5.22) により “$\varphi \vee \psi$” $\in \tilde{T}$ である．

もし,「$\varphi \in \tilde{T}$ または $\psi \in \tilde{T}$」 でないとすると，$\varphi \notin \tilde{T}$ かつ $\psi \notin \tilde{T}$ だから，(5.21) により，“$\neg\varphi$” $\in \tilde{T}$ かつ “$\neg\psi$” $\in \tilde{T}$ である．ここで，$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$ がトートロジーであることから，補題 9 により，$\tilde{T} \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ である．したがって，(g) により，“$\varphi \vee \psi$”$\notin \tilde{T}$ である．

(i), (j): (h) と同様に示せる． **(証明終)**

$c, c' \in C$ に対し，

$$c \sim c' \quad \Leftrightarrow \quad \text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T}$$

とする．補題 22,(a),(b) により，$\sim$ は C 上の同値関係となる．$c \in C$ の $\sim$ に関する同値類を $[c]$ と書くことにする．

$$A = \{[c] \,:\, c \in C\}$$

として，A 上に自然に導入される L'-構造 $\mathfrak{A}$ を次のようにして定義する．

L の定数記号の全体，関数記号の全体，および，関係記号の全体を，それぞれ D F, R とする．各 $c \in C$ に対し，$c^{\mathfrak{A}} = [c]$ とする．$d \in D$ に対しては，補題 22,(c),(d) により，“$c \equiv d$” $\in \tilde{T}$ となるような $c \in C$ が $\sim$ に関する同値を除いて一意に決まるから，そのような c をとり，$d^{\mathfrak{A}} = [c]$ とする．

$f \in F$ を n-変数関数記号とするとき，各 $\langle c_1, ..., c_n\rangle \in C^n$ に対し，補題 22,(c) により，“$c \equiv f(c_1, ..., c_n)$” $\in \tilde{T}$ となるものがある．補題 22,(d), (e) から，このような c をとり，

$$f^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = [c]$$

とすることで，$f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ が定義できる．

$r \in R$ を n-変数関係記号とするとき，

$$r^{\mathfrak{A}} = \{\langle [c_1], ..., [c_n]\rangle \,:\, \text{“}r(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T}\}$$

とする．ここで，

(5.29) $\quad \mathfrak{A} = \langle A, c^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, r^{\mathfrak{A}}\rangle_{c \in D \cup C, f \in F, r \in R}$

とすると，$\mathfrak{A}$ は L'-構造となる．$\mathfrak{A}$ は（$\tilde{T}$ に対する）**Henkin モデル** (Henkin model) と呼ばれる．

Henkin-terms

補題 23 $\tilde{T}$ を T の Henkin 拡大として，$\mathfrak{A}$ を上のようにして構成された Henkin モデルとする．

(a) $\quad t = t(x_1, ..., x_n)$ を L-項として $c, c_1, ..., c_n \in C$ とするとき，

(5.30) $\quad$ “$c \equiv t(c_1, ..., c_n)$” $\in \tilde{T} \;\Leftrightarrow\; [c] = t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n])$ Henkin-7

である．

(b) $t_1 = t_1(x_1, ..., x_m)$,..., $t_n = t_n(x_1, ..., x_m)$ を L-項，c_1,..., $c_m \in C$, $r \in R$ を n-変数関係記号とするとき，

$$\text{(5.31)} \quad \text{“}r(t_1(c_1, ..., c_m), ..., t_n(c_1, ..., c_m))\text{”} \in \tilde{T} \qquad \text{Henkin-8}$$
$$\Leftrightarrow \ \langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m]), ..., t_n^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m])\rangle \in r^{\mathfrak{A}}$$

となる．

証明． (a): t の構成に関する帰納法で示す．t が定数記号 $\in D$ か変数記号のときには，(5.30) は $\sim$ と $\mathfrak{A}$ の定義から明らかである．

ある m-変数の $f \in F$ に対し，t が $t = f(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$ という形をしていて，$t_1(x_1, ..., x_n)$,..., $t_m(x_1, ..., x_n)$ は (5.30) を満たすとする．このとき，補題 22, (c) により，c_1^*,..., $c_m^* \in C$ で，

$$\text{(5.32)} \quad \text{“}c_i^* \equiv t_i(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T}, \ \ i = 1, ..., m \qquad \text{Henkin-9}$$

となるものがとれる．(5.32) と 補題 21,(e), 補題 9, (5.22) により，

$$\text{(5.33)} \quad \text{“}t(c_1, ..., c_n) \equiv f(c_1^*, ..., c_m^*)\text{”} \in \tilde{T} \qquad \text{Henkin-10}$$

である．(5.32) と帰納法の仮定から，

$$\text{(5.34)} \quad t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = [c_i^*], \ \ i = 1, ..., m \qquad \text{Henkin-11}$$

となるから，

$$\text{(5.35)} \quad t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]), ..., t_m^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n])) = f^{\mathfrak{A}}([c_1^*], ..., [c_m^*]) \qquad \text{Henkin-12}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} &\text{“}c \equiv t(c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T} \\ \Leftrightarrow \ \ &\text{“}c \equiv f(c_1^*, ..., c_m^*)\text{”} \in \tilde{T} && ;\ \text{(5.33) と 補題 22,(b) による} \\ \Leftrightarrow \ \ &[c] = f^{\mathfrak{A}}([c_1^*], ..., [c_m^*]) && ;\ f^{\mathfrak{A}}\ \text{の定義} \\ \Leftrightarrow \ \ &[c] = t^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_n]) && ;\ \text{(5.35) による} \end{aligned}$$

となる．

(b): 補題 22, (c) により，$c_i^* \in C$, $i = 1, ..., n$ を

$$\text{(5.36)} \quad \text{“}c_i^* \equiv t_i(c_1, ..., c_m)\text{”} \in \tilde{T}, \ i = 1, ..., n \qquad \text{Henkin-13}$$

となるようにとれる．このとき，(a) により，

$$\text{(5.37)} \quad [c_i^*] = t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], ..., [c_m]), \ \ i = 1, ..., n \qquad \text{Henkin-14}$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\text{“}r(t_1(c_1,...,c_m),...,t_n(c_1,...,c_m))\text{”} \in \tilde{T} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}r(c_1^*,...,c_n^*)\text{”} \in \tilde{T} && \text{; (5.36) と補題 22, (f)} \\
\Leftrightarrow\ &\langle [c_1^*],...,[c_n^*] \rangle \in r^{\mathfrak{A}} && \text{; } r^{\mathfrak{A}} \text{ の定義による} \\
\Leftrightarrow\ &\langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1],...,[c_m]),...,t_n^{\mathfrak{A}}([c_1],...,[c_m]) \rangle \in r^{\mathfrak{A}} && \text{; (5.37) による}
\end{aligned}
$$

である． **（証明終）**

次の補題により 命題 17 の証明が完了する:

補題 24 $\tilde{T}$ を T の Henkin 拡大として，$\mathfrak{A}$ を上のようにして構成された Henkin モデルとする．このとき，任意の L'-文 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi \ \Leftrightarrow\ \varphi \in \tilde{T}$ である．特に $\mathfrak{A}$ から C の元の解釈を取り去ることで得られる L-構造 $\mathfrak{A} \restriction L$ は T のモデルである． Henkin-model

証明． L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ の構成に関する帰納法で，

(5.38) すべての $c_1, \ldots,\ c_n \in C$ に対し， Henkin-15

$$\mathfrak{A} \models \varphi([c_1],...,[c_n]) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(c_1,...,c_n) \in \tilde{T}$$

となることを示せばよい．

φ が $t(x_1,...,x_n) \equiv t'(x_1,...,x_n)$ という形をしているときには，$c, c' \in C$ を

(5.39) “$c \equiv t(c_1,...,c_n)$”, ‘$c' \equiv t'(c_1,...,c_n)$ ” $\in \tilde{T}$ Henkin-16

となるようにとると，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1],...,[c_n]) \\
\Leftrightarrow\ &t^{\mathfrak{A}}(c_1,...,c_n) = t'^{\mathfrak{A}}(c_1,...,c_n) && \text{; } \models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow\ &[c] \equiv [c'] && \text{; (5.39) と補題 23, (a) による} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}c \equiv c'\text{”} \in \tilde{T} && \text{; } \sim \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}t(c_1,...,c_n) \equiv t'(c_1,...,c_n)\text{”} \in \tilde{T} && \text{; 補題 22, (d) による} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}\varphi(c_1,...,c_n)\text{”} \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

となるからよい．

φ が，ある m-変数の $r \in R$ に対し，$r(t_1(x_1,...,x_n),...,)t_m(x_1,...,x_n)$ という形をしているときには，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1],...,[c_n]) \\
\Leftrightarrow\ &\langle t_1^{\mathfrak{A}}([c_1],...,[c_n]),...,t_m^{\mathfrak{A}}([c_1],...,[c_n]) \rangle \in r^{\mathfrak{A}} && \text{; } \models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}r(t_1(c_1,...,c_n),...,t_m(c_1,...,c_n))\text{”} \in \tilde{T} && \text{; 補題 23, (b) による} \\
\Leftrightarrow\ &\text{“}\varphi(c_1,...,c_n) \in \tilde{T}
\end{aligned}
$$

によりよい．

$\varphi = \neg\psi$ で ψ に対しては (5.38) が成立するとき．このときには，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], ..., [c_n]) \\
\Leftrightarrow\quad & \mathfrak{A} \not\models \psi([c_1], ..., [c_n]) && ;\models \text{ の定義} \\
\Leftrightarrow\quad & \psi(c_1, ..., c_n) \notin \tilde{T} && ;\text{帰納法の仮定による} \\
\Leftrightarrow\quad & \neg\psi(c_1, ..., c_n) \in \tilde{T} && ;\text{補題 } 22, (\mathrm{g}) \text{ による} \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(c_1, ..., c_n) \in \tilde{T}
\end{aligned}$$

となるからよい．

φ が $(\psi \vee \eta)$, $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \to \eta)$ の形をしていて，ψ, η に対しては (5.38) が成立している場合の証明も，それぞれ 補題 22, (h), (i), (j) を用いて上と同様に行なえる．

φ が $\exists x\psi(x, x_1, ..., x_n)$ の形をしていて，ψ に対しては (5.38) が成立しているときには，

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models \varphi([c_1], ..., [c_n]) \\
\Leftrightarrow\quad & \text{ある } c \in C \text{ に対し，} \mathfrak{A} \models \psi([c], [c_1], ..., [c_n]) && ;\models \text{ の定義による} \\
\Leftrightarrow\quad & \text{ある } c \in C \text{ に対し，} \psi(c, c_1, ..., c_n) \in \tilde{T} && ;\text{帰納法の仮定による} \\
\Leftrightarrow\quad & \text{“}\exists x\psi(x, c_1, ..., c_n)\text{”} \in \tilde{T}
\end{aligned}$$

となるからよい．最後の “$\Leftrightarrow$” については，“$\Rightarrow$” は，代入公理と補題 9 により，“$\Leftarrow$” は (5.23) によりよい． **（証明終）**