

# 連続体仮説と数学

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

<https://fuchino.ddo.jp/>

00.10.19(木), (21.01.05(火), 23.12.13(水) に付記を補筆)

*I root for CH.*

— Walter Rudin [13]

*Since my own intuition does not extend beyond ZFC, (or with ZFC + consistency of large cardinals), I look at all those theorems as very interesting implications.*

— Saharon Shelah [15]

筆者は 2000 年 10 月 10 日に北海道大学大学院理学研究科で「非可測集合は存在するか？」という題の講演を行なったが、その折に、「連続体仮説<sup>1</sup>の数学的な特徴付けはないのか？」という質問を受けた。その場では、このことについて詳しく説明する余裕がなかったので、この小文の第 1 節で、上の質問に答えて、Erdős, と Sierpiński による 2 つの特徴付け定理とその証明を紹介したいと思う。

これらの定理の命題は「可算, 非可算」という概念を含んでいるので、「数学的」という形容詞のとらえ方如何によって「純粋に数学的とは言えない」という意見も出てくるかもしれない。連続体仮説と同値ではないが、連続体仮説の仮定から証明できる（しかしそれなしには証明できない）ような命題で、より「数学的」と言えそうなものはいくつも知られている。第 2 節では、このような命題のうち、積分順序の交換に関する Sierpiński の定理、私自身による自己同型群に関する結果、Erdős–Sierpiński の定理として知られている測度とカテゴリーの双対定理を紹介する。

上記の北大の講演に基づく拙文 [9] でと同様に、この文章も集合論の非専門家を読者として想定している。そのため、集合論の特別な知識は仮定せずに読めるような記述になるように試みたつもりである。逆に、集合論の専門家は、ここで書かれていることは多少退屈に感じるかもしれない。

参考文献としては [2], [10] を挙げておく。[10] では CH に関する初等的な解説が与えられている。[2] は集合論と実解析学の交差するような問題について最近までの研究のサーベイであり、決定性公理に関連する最近の結果など、いくつかの重要なトピックスで全く触れられていないものがあることなどを除くと、良く書けているものと思う。

<sup>1</sup>以下では連続体仮説 (continuum hypothesis) を CH と略し、その否定を  $\neg$ CH と略す。また ZFC で通常の (選択公理を含む) 集合論の公理系を表すことにする。

$\omega_1$  で最小の非可算順序数を表す.  $\omega_1$  はそれ自身は非可算だが, どの始片も可算になるような順序を持っている. 連続体仮説は,  $\mathbb{R}$  (またはこれと等濃度の,  $[0, 1], \mathbb{C}$  etc.) の元を順序型が  $\omega_1$  になるように整列できる, という事と同値である.

## 1 連続体仮説の2つの数学的特徴付け

**定理 1** (Erdős [6]) 次の命題は CH と同値である:

*analytic functions* の非可算な族  $\mathcal{F}$  で, すべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し,  $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$  が可算になるようなものが存在する.

**証明.**  $\neg$ CH を仮定する.  $\mathcal{F}$  を *analytic functions* の非可算族とすると,  $z \in \mathbb{C}$  で  $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$  が非可算になるようなものが必ず存在することを示す.  $f_\alpha, \alpha < \omega_1$  を  $\mathcal{F}$  の互いに異なる元とする.  $\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$  に対し,  $S_{\alpha, \beta} = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$  とすれば,  $S_{\alpha, \beta}$  は可算となる [ $f, g$  を異なる *analytic functions* として,  $C$  を  $\mathbb{C}$  の 0 の回りのある一定の半径の円盤とすると  $\{z \in C : f(z) = g(z)\}$  は有限である — マクローリン展開を比較すればわかる]. したがって, 仮定から,  $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup \{S_{\alpha, \beta} : \{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2\}$  とすれば  $S \neq \emptyset$  となる.  $z^* \in S$  とすれば,  $f_\alpha(z^*), \alpha < \omega_1$  は互いに異なるから,  $\{f(z^*) : f \in \mathcal{F}\}$  は非可算になることがわかる.

次に, CH を仮定して, 非可算な *analytic functions* の族  $\mathcal{F}$  で, どの  $z \in \mathbb{C}$  に対しても  $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$  が可算になるようなものが存在することを示す.  $\mathbb{C} = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  として, *analytic functions* の列  $f_\alpha, \alpha < \omega_1$  を次を満たすように構成する:

(\*) すべての  $\beta < \alpha$  に対し,  $f_\alpha \neq f_\beta$  で,  $f_\alpha(v_\beta)$  は (複素) 有理数.

これが可能であることは次のようにしてわかる:  $f_\beta, \beta < \alpha$  が構成されたとき,  $\{v_\beta : \beta < \alpha\}$  を  $\{w_n : n \in \omega\}$  と枚挙しなおす. これは  $\alpha < \omega_1$  により可能である. 複素有理数  $\varepsilon_n > 0, n \in \omega$  を十分に早く 0 に収束するように適当にとって,

$$f_\alpha(z) = \varepsilon_0(z - w_0) + \varepsilon_1(z - w_0)(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) + \dots$$

と定義することにより (\*) を満たすような  $f_\alpha$  が構成できる.  $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  とすれば,  $\mathcal{F}$  は求めるようなものとなっている. □ (定理 1)

**定理 2** (Sierpiński [16]) 次の命題は CH と同値である:

平面  $[0, 1]^2$  の分割  $[0, 1]^2 = A \dot{\cup} B$  で,

(i) すべての  $x \in [0, 1]$  に対し,  $A \cap (\{x\} \times [0, 1])$  は可算となり,

(ii) すべての  $y \in [0, 1]$  に対し  $B \cap ([0, 1] \times \{y\})$  は可算となる

ようなものが存在する.

**証明.** CH が成り立つとして,  $[0, 1] = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  とする. このとき,  $A = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha > \beta\}, B = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \leq \beta\}$  とすれば,  $[0, 1]^2 = A \dot{\cup} B$  で,  $A, B$  は定理の (i), (ii) を満たす.

次に  $\neg\text{CH}$  として,  $[0, 1]^2 = A \dot{\cup} B$  とする.  $A$  が (i) を満たすとして,  $r_\alpha \in [0, 1]$ ,  $\alpha < \omega_1$  を互いに異なるものとする. このとき,

$$\begin{aligned} C &= \{x \in [0, 1] : \text{ある } \alpha < \omega_1 \text{ に対し } \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \\ &= \bigcup \{\{x \in [0, 1] : \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} : \alpha < \omega_1\} \end{aligned}$$

の濃度は, 高々  $\leq \aleph_1$  である. したがって仮定により  $[0, 1] \setminus C$  は空でないから,  $x^* \in [0, 1] \setminus C$  をとれば,  $[0, 1]^2 = A \dot{\cup} B$  とすれば,  $B \cap ([0, 1] \times \{x^*\})$  は  $\{(x_\alpha, x^*) : \alpha < \omega_1\}$  を含まなくてはならないから, 可算ではありえない. □ (定理 2)

## 2 連続体仮説から証明できる 3 つの数学的命題

この章では, 連続体仮説の仮定のもとで成立する “数学的” な命題の例を見ることにする.

**定理 3** (Sierpiński [16]) 連続体仮説 CH を仮定する. このとき, 関数  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  で, 積分  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$  および  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$  は存在するが, それらの値が等しくならないようなものがとれる.

**証明.**  $A, B \subseteq [0, 1]^2$  を定理 2 でのようにとり,  $f$  を  $B$  の特性関数とする.  $y \in [0, 1]$  に対し,  $\{x \in [0, 1] : f(x, y) \neq 0\} = \{x \in [0, 1] : \langle x, y \rangle \in B\}$  は高々可算である. したがって,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

となる同様に, 各  $x \in [0, 1]$  に対し,  $\{y \in [0, 1] : f(x, y) \neq 1\} = \{y \in [0, 1] : \langle x, y \rangle \in A\}$  は高々可算だから,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 1 dy = 1.$$

となる. よって,  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$  である. □ (定理 3)

Tonelli の定理により,  $f$  が可測なら,  $\iint f dx dy$  と  $\iint f dy dx$  は両方とも存在する場合には等しくなる. 上の定理は, CH のもとでは, Tonelli の定理での  $f$  の可測性の条件が落とせないことを示している.

上の定理の命題は, 連続体仮説の否定  $\neg\text{CH}$  の下ではその真偽は決まらないことが知られている:

**定理 4** (Ciesielski and Laczkovich [3], Friedman [12], Freiling [11]) ZFC のモデル  $M$  で, すべての  $M$  での関数  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  に対し,  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$  と  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$  が  $M$  で存在するときにはこれらが等しいようなものがとれる.

一方, Sierpiński の定理の証明は, “実数の集合で連続体より濃度の低いものはすべて測度 0 になる” という命題が成り立てば同様に実行できることが分る. ところがこの命題は例えばマルティンの公理の下で成り立つので, 連続体仮説の否定と矛盾しない. 以上から, 定理 4 の命題は ZFC +  $\neg\text{CH}$  から独立であることが結論できる.

自然数の全体  $\mathbb{N}$  の巾集合  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  は、半順序  $\subseteq$  に関してブール代数となる ( $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  のブール演算は、それぞれ和集合、共通部分、 $\mathbb{N}$  での補集合をとる演算である).  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  上の同値関係  $\sim_{fin}$  を、 $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  に対し、

$$x \sim_{fin} y \iff x \text{ と } y \text{ の対称差 } x \Delta y \text{ は有限}$$

で定義すると、 $\sim_{fin}$  は  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  のブール演算と congruent な同値関係となる. したがって、 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  を  $\sim_{fin}$  で割ってできる商ブール代数 (これを通常  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  とあらわす) が考えられる.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  の双対位相空間は位相空間論でよく知られたものである.  $\beta\mathbb{N}$  で  $\mathbb{N}$  を離散位相で考えたものの Stone-Čech コンパクト化を表すことにする.  $\mathbb{N}$  は  $\beta\mathbb{N}$  の稠密な部分空間と見られるが、 $\beta\mathbb{N}$  からこれを除いた  $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  を考えると、これが  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  の双対位相空間になっているのである.

群  $G$  が単純であるとは、 $G$  は trivial なもの以外には正規部分群を持たないことであつた.

**定理 5** (S. Fuchino [7, 8]) CH を仮定する.

このとき、ブール代数  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  の自己同型群  $Auto(\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin)$  は単純群になる.  $\square$

もちろん  $Auto(\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin)$  の単純性はこの群と反同型な  $\mathbb{N}^*$  の自己同相群  $Auto(\mathbb{N}^*)$  の単純性と同値である. 上の定理の命題は、連続体仮説の否定  $\neg CH$  とは独立であることが知られている:

**定理 6** ZFC の無矛盾性を仮定する. このとき、

(a) (S. Fuchino [7, 8]) ZFC +  $\neg CH$  のモデルで、「 $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  の自己同型群は単純群になる」を満たすようなものが存在する.

(b) (S. Shelah [14], E. van Douwen [4] も参照) ZFC +  $\neg CH$  のモデルで、「 $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  の自己同型群は単純群になる」を満たさないようなものが存在する.  $\square$

$\mathcal{N} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ は零集合}\}$ ,  $\mathcal{M} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ は疎集合}\}$  とする.

**定理 7** (Erdős–Sierpiński, [5, 17]) CH を仮定する. このとき  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  で次の性質を持つものが存在する:

$$X \in \mathcal{N} \iff f[X] \in \mathcal{M};$$

$$X \in \mathcal{M} \iff f[X] \in \mathcal{N}.$$

$\square$

$X \subseteq \mathbb{R}$  がルベーク可測とは、 $X$  との対称差  $X \Delta Y$  が零集合になるようなボレル集合  $Y \subseteq \mathbb{R}$  が存在することだつた. 同様に  $X \subseteq \mathbb{R}$  がベールの性質を持つとは、 $X$  との対称差  $X \Delta Y$  が疎集合になるようなボレル集合  $Y \subseteq \mathbb{R}$  が存在することである. 上の定理から、連続体仮説のもとでは、ルベーク可測な集合の全体とベールの性質を持つ集合の全体の間には非常に強い双対性が成立することが分る.

この定理の命題も連続体仮説が成り立たない場合には、その真偽は独立となることが知られている.

ルベーク可測な集合の全体とベールの性質を持つ集合の全体の間の双対性は戦前のポーランド学派の中心テーマの1つであったが、ルベーク可測な集合の全体とベールの性質を持つ集合の全体の集合論的性質の研究は1960年代のコーエンによる強制法の発明以降質的發展をとげ、現在では「実数の集合論」と呼ばれる集合論の中の研究分野として確立されている。この分野で活躍している研究者は現在でも東欧、特にポーランド出身の人が多く、[18]での記述から受ける、ポーランド学派は二次大戦を契機に完全に消滅しまった、という印象とは逆に、その伝統は現代にまで強く受けつがれていることが分る。

ちなみに、 $\neg\text{CH}$ のもとでの Erdős–Sierpiński の定理の命題の成立条件に関するより精密な議論をはじめ、実数の集合論のより現代的な研究成果は、この分野の本格的な教科書である [1] で学ぶことができるが、この本の著者の Tomek Bratoszyński 教授もポーランドのワルシャワ大学の出身である。

**23.12.13(水 01:17(JST)) の付記:** このテキストは、文章の最初の説明にもあるように、私が2000年に書いたもので、その後、2009年の夏ごろまで、何回か小さな修正がなされた後、放置されていました。

連続体仮説の特徴付けとしては、ここに書かれているものの他にも、Péter Komjáth による、cloud と呼ばれる構造での平面の被覆に関する命題 [21] ([23] も参照) や、Michał Morayne による half differential な曲線による平面の埋めつくしに関する命題 [22] などがあり、今この作文の続きを書くとしたら、これらの話題もぜひ加えたいところです。

私自身の連続体の研究では、その後、ある種の、自然な、強い反映原理が成り立つべきである、という要請のもとでは、連続体の濃度は、 $\aleph_1$  か  $\aleph_2$  か、あるいは非常に大きなものになる、という結果が得られており、この結果を足掛りに連続体問題に関する更なる貢献の可能性をさぐっているところです。これに関しても、ここでは、この研究結果についての概説を述べている [19], [20] を引用するにとどめ、子細の説明は、次の機会に譲ろうと思います。

なお、本稿の最新版は、<https://fuchino.ddo.jp/notes/ch.pdf> として download できます。

## 参考文献

- [1] T. Bartoszyński and H. Judah, Theory: on the structure of the real line, A K Peters, (1995), i–ix,1–546.
- [2] K. Ciesielski, Set Theoretic Real Analysis, J. Appl. Anal. 3(2) (1997), 143–190.
- [3] K. Ciesielski and M. Laczko, Strong Fubini properties for measure and category, Fund. Math. 178(2) (2003), 171–188;
- [4] E. van Douwen, The automorphism group of  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$  need not be simple, Top. Appl., 34 (1990), 97–103.
- [5] P. Erdős, Some remarks on set theory, Ann. of Math. (2)44 (1943), 643–656.

- [6] —, An interpolation problem associated with the continuum hypothesis, *Michigan Math. J.*, 11 (1964), 9–10.
- [7] S. Fuchino, On the automorphism group of  $\mathcal{P}(\mathbb{N})/fin$ , Dissertation, Berlin (1989).
- [8] —, On the simplicity of the automorphism group of  $\mathcal{P}(\omega)/fin$ , *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 31 (1992), 319–330.
- [9] 渕野 昌, 非可測集合は存在するか? (2000).
- [10] —, ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説, *数学セミナー*, vol.37, no.5 (1998), 50–53.
- [11] C. Freiling, Axioms of Symmetry: throwing darts at the real number line, *J. Symbolic Logic* 51 (1986), 190–200.
- [12] H. Friedman, A consistent Fubini-Tonelli theorem for non-measurable functions, *Illinois J. Math.* 24 (1980), 390–395.
- [13] W. Rudin, The way I remember it, *History of Mathematics*, Vol.12, AMS, London Math. Soc. (1997).
- [14] S. Shelah, Proper Forcing, *Lecture notes in Mathematics* 940, Springer Verlag (1982).
- [15] —, The future of set theory, in: *Set theory of reals*, ed.: H. Judah, IMCP (1993).
- [16] W. Sierpiński, Sur les rapports entre l'existence des intégrales  $\int_0^1 f(x, y)dx$ ,  $\int_0^1 f(x, y)dy$  et  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$ , *Fund. Math.* 1 (1920), 142–147. Reprinted in *Oeuvres Choisies*, vol. II, 341–345.
- [17] —, Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, *Fund. Math.* 22, (1934), 276–280.
- [18] 志賀 浩二, 無限からの光芒, 日本評論社 (1988).

## 付記で引用した文献

- [19] Sakaé Fuchino and André Ottenbreit Maschio Rodrigues, [Reflection principles, generic large cardinals, and the Continuum Problem](#), to appear in the Proceedings of the Symposium on Advances in Mathematical Logic 2018.
- [20] Sakaé Fuchino, Reflection and Recurrence, preprint.  
[https://fuchino.ddo.jp/papers/reflection\\_and\\_recurrence-Janos-Festschrift-x.pdf](https://fuchino.ddo.jp/papers/reflection_and_recurrence-Janos-Festschrift-x.pdf)

- [21] Péter Komjáth, Three clouds may cover the plane. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol.109 (2001), 71–75.
- [22] Michał Morayne, On differentiability of Peano type functions I, II, *Colloquium Mathematicum* Vol.53, (1987), 129–132, 133–135.
- [23] James H. Schmerl, How many clouds cover the plane? *Fundamenta Mathematicae* 177 (2003), 209-211.