初等部分構造の手法とその集合論での応用*

渕野 昌

August 14, 1999
slightly updated on: August 12, 2009

1　構造と充足関係

$\mathcal{A} = (A, R_1, R_2, \ldots)$ が**構造**とは,

(i)　A は集合（A を $\mathcal{A}$ のサポートとよぶことにする）;

(ii)　各 $i = 1, 2, \ldots$ に対し，$m_i \in \mathbb{N}$ があって，$R_i \subseteq A^{m_i}$ となっている．
（つまり，R_i は A 上の m_i-項関係）

となっていること．より一般には，構造は，A 上の関数や定数（特定された A の元）を含むこともあるものとして導入される．しかし，以下では，(A, E) という形の構造で，$E = \{(x, y) \in A^2 : x \in y\}$ となっているようなものが主に考察される．以下では，このような構造を考察するときには，簡単のために，これを $(A, \in)$ と記すことにする．

R_1, R_2,... に対応する記号 $\underline{R}_1$, $\underline{R}_2$,... を用意して，$L = \{\underline{R}_1, \underline{R}_2, \ldots\}$ を $\mathcal{A}$ **の言語とよぶ**．また $\mathcal{A}$ は L-**構造**であるともいう．以下では L は常に高々可算であると仮定する．

L-構造 $\mathcal{A} = (A, \ldots)$ に関する命題のうち，L-構造の一つ一つの元を調べることのみによって（たとえば，A の部分集合の全体を調べたりしなくても）その真偽の確

---

*本稿は，1997 年 8 月 4 日から 8 月 6 日にかけて静岡県三保東海大学研修館において開催された数学基礎論サマースクールで私の行なった講演に基づくものです．なお，このテキストの作製にあたっては，サマースクールに参加した北見工業大学一年の五十嵐真奈さんがとったノートを参考にさせてもらいました．彼女に感謝します．

[補筆 09.08.12(水 18:32(JST))] 筆者は，2009 年 9 月に筑波大学の大学院で，初等部分構造の手法に関する集中講義を行う予定です．内容は，1997 年の講義を大幅に拡張したものになる予定ですが，このための予稿／講義録は，

`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/notes/elementary09.pdf`

として upload される予定です．

定するようなものは,（一階の）述語論理の論理式と呼ばれるものを用いてあらわすことができるが，以下でこれを導入する．

まず，可算変数の無限集合 Var を固定しておき，これを用いて L-**論理式**を次のように帰納的に定義する:

(i) $x, y \in Var$ のとき，'$x = y$' は L-論理式である;

(ii) $\underline{R}$ が L の m 項関係記号で，$x_0,\dots,x_{m-1} \in Var$ のとき，'$\underline{R}(x_0,\dots,x_{m-1})$' は L-論理式である;

(iii) φ, ψ が L-論理式なら，'$(\varphi \wedge \psi)$', '$(\varphi \vee \psi)$', '$(\neg\varphi)$' '$(\varphi \rightarrow \psi)$', '$(\varphi \leftrightarrow \psi)$' も L-論理式である;

(iv) φ が L-論理式で $x \in Var$ のとき，'$\forall x\varphi$', '$\exists x\varphi$' も L-論理式である;

(v) 以上のみ[1].

L-論理式の帰納的定義に対応して，L-論理式に関する概念を帰納的に導入することができる．例えば，L-論理式 φ にあらわれるの**自由変数**の集合 $Free(\varphi)$ は次のようにして帰納的に定義することができる:

(i) φ が $x = y$ の形のときには，$Free(\varphi) = \{x, y\}$ とする．

(ii) φ が $\underline{R}(x_0,\dots,x_{n-1})$ のときには，$Free(\varphi) = \{x_0,\dots,x_{n-1}\}$.

(iii) φ が '$(\psi \wedge \eta)$', '$(\psi \vee \eta)$', '$(\neg\psi)$' '$(\psi \rightarrow \eta)$', または，'$(\psi \leftrightarrow \eta)$' の形をしているときには，$Free(\varphi)$ は，それぞれ，$Free(\psi) \cup Free(\eta)$, $Free(\psi) \cup Free(\eta)$, $Free(\psi)$, $Free(\psi) \cup Free(\eta)$, または，$Free(\psi) \cup Free(\eta)$ となる．

(iv) φ が '$\forall x\psi$' または '$\exists x\varphi$' の形をしているときには，$Free(\psi) \setminus \{x\}$ とする．

$Free(\varphi) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$ のとき，$x_1,\dots,x_n$ は φ の**自由変数**であるという．$Free(\varphi) = \emptyset$ のとき，φ は**閉論理式**であるという．

$\mathcal{A} = (A,\dots)$ を L-構造として，φ は L-論理式で，$Free(\varphi) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$ とする．このとき，"$x_1,\dots,x_n$ を $a_1,\dots,a_n \in A$ と解釈したときに φ は $\mathcal{A}$ で成り立つ" ということを，$\mathcal{A} \models \varphi[a_1/x_1,\dots,a_n/x_n]$ あるいはもっと簡単に $\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$ と書いて[2]，これを以下のように帰納的に定義する:

(i) φ が '$x_i = x_j$' のときには，$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow a_i = a_j$;

(ii) φ が $\underline{R}(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$ のときには，$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow (a_{i_1},\dots,a_{i_m}) \in R$; ただし R は $\underline{R}$ に対応する $\mathcal{A}$ の m-項関係.

---

[1] この最後の条件は，法律関係のテキストにでも出てきそうな感じがするが，その直観的な意味は，上の (i)–(iv) の構成法をくりかえし適用することによって得られる表現 <u>のみ</u> が L-論理式である，ということである．

[2] 早大の江田勝哉教授は，三保のサマー・スクールの彼の講演で，"$\models$" を "ゲタ記号" と呼んでいたが，それ以来，江田氏は我々のところではひそかに "ゲタさん" というニックネームで呼ばれている．

(iii) φ が '$(\psi \wedge \eta)$', '$(\psi \vee \eta)$', '$(\neg\psi)$' '$(\psi \rightarrow \eta)$', または，'$(\psi \leftrightarrow \eta)$' の形をしているときには，それぞれ，

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ かつ } \mathcal{A} \models \eta[a_1, \ldots, a_n] \quad (\varphi \text{ が } (\psi \wedge \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ または } \mathcal{A} \models \eta[a_1, \ldots, a_n] \quad (\varphi \text{ が } (\psi \vee \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ でないとき} \quad (\varphi \text{ が } (\neg\psi) \text{ のとき})$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ でないか，または } \mathcal{A} \models \eta[a_1, \ldots, a_n] \quad (\varphi \text{ が } (\psi \rightarrow \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \text{ と } \mathcal{A} \models \eta[a_1, \ldots, a_n] \text{ の両方とも成り立つか，あるいは両方とも成り立たないとき} \quad (\varphi \text{ が } (\psi \leftrightarrow \eta) \text{ のとき})$$

(iv) φ が '$\forall x\psi$' または l'$\exists x\varphi$' の形をしているときには，まず必要なら x の呼びかえをして，x は $x_1,\ldots,x_n$ に含まれていないとしてよいが，このとき:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \text{すべての } a \in A \text{ に対し } \mathcal{A} \models \psi[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n, a/x] \quad (\varphi \text{ が } \forall x\psi \text{ のとき})$$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \;\Leftrightarrow\; \text{ある } a \in A \text{ に対し } \mathcal{A} \models \psi[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n, a/x] \quad (\varphi \text{ が } \exists x\psi \text{ のとき}).$$

2　部分構造，初等的部分構造

$\mathcal{A} = (A, R_1, R_2, \ldots)$, $\mathcal{B} = (B, R'_1, R'_2, \ldots)$ を L-構造とする．このとき $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の**部分構造**である（これを $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ と書く）とは，$B \subseteq A$ かつ，$R'_i = R_i \cap B^{m_i}$ がすべての i に対し成り立つこととする．

$\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の**初等部分構造**である（これを $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ と書く）とは, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$で, すべての L-論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ と $b_1,\ldots,b_k \in B$ に対し, $\mathcal{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_k] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_k]$ が成り立つこと．

例 2.1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ と $(\mathbb{N}, \leq)$ を考える．このとき明らかに $(\mathbb{N}, \leq) \subseteq (\mathbb{Q}, \leq)$ である．$(\mathbb{N}, \leq) \models \exists x \forall y (x \leq y)$ だが，一方，$(\mathbb{Q}, \leq) \not\models \exists x \forall y (x \leq y)$ だから，$(\mathbb{N}, \leq)$ は $(\mathbb{Q}, \leq)$ の初等的部分構造ではない．一方，モデル理論で *elimination of quantifiers* と呼ばれている手法を用いると[3]，$(\mathbb{Q}, \leq) \prec (\mathbb{R}, \leq)$ が証明できる．

例 2.2. $(\mathbb{N}, \leq)$ と $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ を考える．このとき，明らかに $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq) \subseteq (\mathbb{N}, \leq)$ である．$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq) \models \forall y (x \leq y)[1/x]$ だが，$(\mathbb{N}, \leq)$ では 1 は最小元ではないか

[3]たとえば [1] を参照.

ら，$(\mathbb{N}, \leq) \not\models \forall y(x \leq y)[1/x]$ となり，$(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ は $(\mathbb{N}, \leq)$ の初等的部分構造ではないことがわかる．

$\mathcal{A} = (A, R_1, R_2, \ldots)$ で，$X \subseteq A$ のとき，$\mathcal{A}\restriction X$ で構造 $(X, R_1 \cap X^{m_1}, R_2 \cap X^{m_2}, \ldots)$ をあらわす．$\mathcal{A}\restriction X \subseteq \mathcal{A}$ であるが，上の例でもわかるように，$\mathcal{A}\restriction X \prec \mathcal{A}$ となるとは限らない．

$\mathcal{A}\restriction X \prec \mathcal{A}$ となるような X の構成法については，命題 3.1 でとりあげる．

演習問題 2.3. $\prec$ は推移的である．つまり，$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ かつ，$\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ なら $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ が成り立つ． $\dashv$

定理 2.4. (union of chain)

γ を極限順序数として，$(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ を次の性質を満たす L-構造 $\mathcal{A}_\alpha = (A_\alpha, R_1^\alpha, R_2^\alpha, \ldots)$, $\alpha < \gamma$ の列とする：

(i) $\alpha < \beta < \gamma$ なら $\mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{A}_\beta$.
(ii) $\delta < \gamma$ が極限順序数なら，$A_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ となっている．

このとき $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, $R_1^\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} R_1^\alpha, \ldots$ として，$\mathcal{A}_\gamma = (A_\gamma, R_1^\gamma, R_2^\gamma, \ldots)$ とすれば，$\mathcal{A}_\gamma$ は L-構造となる．さらに

(A) すべての $\alpha < \gamma$ に対し，$\mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{A}_\gamma$ となる．

(B) $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{B}$ がすべての $\alpha < \gamma$ に対して成り立つような L-構造とするとき，$\mathcal{A}_\gamma \prec \mathcal{B}$ となる．

証明 $\mathcal{A}_\alpha \prec \mathcal{A}_\gamma$ となることは明らか．(A) の証明には，次の (*) が L-論理式 φ の構成に関する帰納法により示せれば十分である:

(*) すべての $\alpha < \gamma$ と，$a_1, \ldots, a_n \in A_\alpha$ に対し，

$$\mathcal{A}_\alpha \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A}_\gamma \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

が成り立つ．

φ が $x = y$ または $R(x_1, \ldots, x_n)$ の形をしているときには，(*) が成り立つことは明らか．また φ が $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \leftarrow \eta)$ または $(\psi \leftrightarrow \eta)$ の形をしていて，(*) が ψ と η に対して成立するときには，このことから (*) が φ に対しても成立することは容易に示せる（演習）．

φ が $\exists x\psi$ で ψ については (*) がすでに証明されているとして，(*) が φ についても成り立つことを示す:

“$\Rightarrow$”: $\mathcal{A}_\alpha \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ とすると，$a \in A_\alpha$ で $\mathcal{A}_\alpha \models \psi[a_1, , \ldots, a_n, a/x]$ となるものが存在する．このとき仮定から，$\mathcal{A}_\gamma \models \psi[a_1, , \ldots, a_n, a/x]$ となるから，$\mathcal{A}_\gamma \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ がわかる．

"$\Leftarrow$": $\mathcal{A}_\gamma \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$ とすると，$a \in A_\gamma$ で $\mathcal{A}_\gamma \models \psi[a_1,,\ldots,a_n,a/x]$ となるものが存在する．γ は極限順序数だったから，A_γ の定義から，ある $\beta < \gamma$ で $a \in A_\beta$ となるものがとれる．$\alpha < \beta$ となっているとしてよいが，このとき仮定から $\mathcal{A}_\beta \models \psi[a_1,,\ldots,a_n,a/x]$ となる．したがって，$\mathcal{A}_\beta \models \varphi[a_1,,\ldots,a_n]$ であるから，(i) により，$\mathcal{A}_\alpha \models \varphi[a_1,,\ldots,a_n]$ となる．

φ が $\forall x\psi$ の場合も同様に証明できる（演習）．

(B) は (A) と同様に証明できる．　$\dashv$ (定理 2.4)

3 Downward Löwenheim-Skolem 定理

$\mathcal{A} = (A, R_1, R_1, \ldots)$ をふたたび L-構造とする．f が $\mathcal{A}$ **上の関数**であるとは，ある $n \in \omega$ に対し，$f : A^n \to A$ となっていることとする．$\mathcal{A}$ 上の関数の族 $\mathcal{F}$ に対し，$X \subseteq A$ **が** $\mathcal{F}$ **に関して閉じている**とは，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し，f が n 変数として，$f[X^n] \subseteq X$ が成り立つこと．

命題 3.1. L-構造 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A}$ 上の関数族 $\mathcal{F}$ で以下の性質を持つものが存在する*:*

(i) $\mathcal{F}$ は可算*;*
(ii) 任意の $X \subseteq A$ に対し，X が $\mathcal{F}$ に関して閉じているなら $\mathcal{A}{\restriction}X \prec \mathcal{A}$ となる．

証明 $\sqsubseteq$ を A 上の整列順序として a^* を A の $\sqsubseteq$ に関する最小元とする．各 L-論理式 $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ に対し，$f_\varphi : A^n \to A$ を

$$f_\varphi(a_1,\ldots,a_n) = \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_n] \text{ となるような } a \in A \text{ で } \sqsubseteq \text{ に関し最初なもの;} \\ a^*, \quad \text{上のようなものが存在しないとき} \end{cases}$$

として定義する．ここで $\mathcal{F} = \{f_\varphi : \varphi \text{ は論理式}\}$ として，$\mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す．L は可算だったら，$\mathcal{F}$ も可算となることはよい．$\mathcal{F}$ が上の (ii) も満たすことを示す:

$X \subseteq A$ が $\mathcal{F}$ で閉じているとして，$\mathcal{B} = \mathcal{A}{\restriction}X$ とする．$\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ を示せばよい．このために,

(*) $b_1,\ldots,b_n \in X$ なら，$\mathcal{A} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n]$

がすべての φ に対し成り立つことを φ の構成に関する帰納法で示す.

φ が $x = y$ または $R(x_1,\ldots,x_n)$ の形をしているときには，(*) が成り立つことは明らか．また φ が $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \leftarrow \eta)$ または $(\psi \leftrightarrow \eta)$ の形をしていて，(*) が ψ と η に対して成立するときには，このことから (*) が φ に対しても成立することも，容易に示せる（演習）.

φ が $\exists x \psi$ で ψ については (*) がすでに証明されているとして，(*) が φ についても成り立つことを示す:

"$\Rightarrow$": $\mathcal{A} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ とする．つまり，$\mathcal{A} \models \exists x \psi[x, b_1, \ldots, b_n]$ となっているから，f_ψ の定義で，$b_1, \ldots, b_n$ に対しては一番目の場合が成立している．したがって，$\mathcal{A} \models \psi[f_\psi(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n]$ となるが，A に対する仮定から $f_\psi(b_1, \ldots, b_n) \in X$ となるから，帰納法の仮定により，$\mathcal{B} \models \psi[f_\psi(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n]$ となる．したがって，$\mathcal{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ である．

"$\Leftarrow$" は容易に示せる（演習）．また φ が $\forall \psi$ の場合も同様に示せる．

$\dashv$ (命題 3.1)

上の命題の系として次の Downward Löwenheim-Skolem の定理と呼ばれている定理が得られる．定理を一般的な形で述べるために，まずいくつかの用語を導入する．κ, λ を基数として，$\aleph_0 < \kappa \leq \lambda$ で κ は正則基数 とする．このとき，

$$[\lambda]^{<\kappa} = \{x \subseteq \lambda : |x| < \kappa\}$$

とする．$X \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ が *closed unbounded* であるとは，次の (i),(ii) が成立することであるとする:

(i) $\gamma < \kappa$ で $x_\alpha \in X$, $\alpha < \gamma$ が $\subseteq$ に関する上昇列であるとき[4], $\bigcup_{\alpha<\gamma} x_\alpha \in X$ が成り立つ．(closed)

(ii) 任意の $x \in [\lambda]^{<\kappa}$ に対し，$y \in X$ で $x \subseteq y$ となるものが存在する．(unbounded)

定理 3.2. $\mathcal{A} = (A, \ldots)$ を L-構造とする．λ, κ は上のような基数で $|A| = \lambda$ となっているとする．このとき

$$\mathcal{C} = \{X \in [A]^{<\kappa} : \mathcal{A} \restriction X \prec \mathcal{A}\}$$

は $[A]^{<\kappa}$ の *closed unbounded* な部分集合となる．

証明 $\mathcal{C}$ が closed unbounded の定義の (i) を満たすことは，定理 2.4 によりよい．定義の (ii) については，$\mathcal{F}$ を命題 3.1 でのようにとる．$x \in [A]^{<\kappa}$ に対し，$y \in [A]^{<\kappa}$ で $x \subseteq y$ かつ y は $\mathcal{F}$ に関して閉じているようなものがとれるが[5]，このとき，$\mathcal{A} \restriction y \prec \mathcal{A}$ だから $y \in \mathcal{C}$ である． $\dashv$ (定理 3.2)

$\mathcal{A} = (A, \ldots)$ を L-構造として，$\mathcal{F}$ を命題 3.1 でのようにとる．このとき，$X \subseteq A$ に対し $\tilde{h}_\mathcal{F}(X)$ で X を含む A の部分集合のうち $\mathcal{F}$ に関し閉じているもののうち $\subseteq$ に関し最小のものをあらわすことにする．$\tilde{h}_\mathcal{F}(X)$ は **X の $\mathcal{F}$ に関するスコーレム閉包**とよばれる．$\mathcal{A} \restriction \tilde{h}_\mathcal{F}(X) \prec \mathcal{A}$ となるが，簡単のために $\tilde{h}_\mathcal{F}(X)$ で L-構造 $\mathcal{A} \restriction \tilde{h}_\mathcal{F}(X)$ もあらわすことにする．

定理 3.2 と類似の次の結果はよく使われる:

[4]つまり任意の $\alpha < \beta < \gamma$ に対し，$x_\alpha \subseteq x_\beta$ が成立するとき．

[5]x_n, $n \in \omega$ を帰納的に，$x_0 = x$; $x_{n+1} = x_n \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in x_n, f \in \mathcal{F}\}$ととり，$y = \bigcup_{n \in \omega} x_n$ とすると $\mathcal{F}$ は可算だから，$|y| < \kappa$ となるが，y が $\mathcal{F}$ に関し閉じていることも容易に示せる．

補題 3.3. $\mathcal{A} = (A, \ldots)$ を L-構造として，$\kappa > \aleph_0$ を正則基数とし，$\kappa \subseteq A$ となっているとする．このとき，任意の $a \in [A]^{<\kappa}$ に対し，

$$C = \{\alpha < \kappa : \mathcal{B} = (B, \ldots) \prec \mathcal{A} \text{ で } a \subseteq B,\ B \cap \kappa = \alpha \text{ となるものが存在する }\}$$

は $[\kappa]^{<\kappa}$ の *closed unbounded* な部分集合となる．(特に $C \neq \emptyset$ である)

証明 $\mathcal{F}$ を命題3.1でのようにとる，このとき，$\alpha \in C$ なら，$B \subseteq A$ で，$\mathcal{B} = \mathcal{A} \restriction B$ として，$\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ かつ $B \cap \kappa = \alpha$ となるものが存在する．このとき，$\alpha \cup a \subseteq \tilde{h}_{\mathcal{F}}(\alpha \cup a) \subseteq B$ となるから，

したがって，

$$C = \{\alpha < \kappa : \tilde{h}_{\mathcal{F}}(\alpha \cup a) \cap \kappa = \alpha\}$$

となっているが，右辺が $[\kappa]^{<\kappa}$ で closed unbounded であることは容易に示せる（演習）．$\dashv$ (補題 3.3)

4 $\mathcal{H}(\chi)$

集合 x が**推移的**であるとは，任意の $y \in x$ と $z \in y$ に対し $z \in x$ が成り立つこと．集合 x の**推移的閉包 (transitive closure)** $trcl(x)$ を，

$$trcl(x) = \bigcap\{u : u \text{ は推移的で } x \subseteq u\}$$

として定義する[6].

補題 4.1. $x \in y$ なら，$trcl(x) \subseteq trcl(y)$ となる．

証明 $x \subseteq trcl(y)$ となるが，$trcl(y)$ は推移的だから，$trcl(x) \subseteq trcl(y)$ が帰結できる．$\dashv$ (補題 4.1)

χ を無限基数とするとき，$\mathcal{H}(\chi)$ を

$$\mathcal{H}(\chi) = \{x : |trcl(x)| < \chi\}$$

により定義する．次の補題から，$\mathcal{H}(\chi)$ は集合になることがわかる．

補題 4.2. χ を無限基数とするとき，$\mathcal{H}(\chi) \subseteq V_\chi$ となる．

[6] $trcl(x)$ の定義の右辺にあらわれるクラスが空集合でないことを見るためには，$trcl(x)$ が以下のようにして構成できることを示せばよい: $n \in \omega$ に対し，$tc_n(x)$ を帰納的に $tc_0(x) = x$, $tc_{n+1}(x) = tc_n(x) \cup \{z : \text{ある } y \in tc_n(x) \text{ に対し } z \in y\}$ としてとると，$trcl(x) = \bigcup_{n\in\omega} tc_n(x)$ となる（演習）．

証明 χ に関する帰納法で証明する．$\chi = \aleph_0$ のときには，$x \in \mathcal{H}(\chi)$ として，ある $n \in \omega$ に対し，$|trcl(x)| = n$ となるが，このときには，n に関する帰納法で $x \in V_\omega$ が証明できる（演習）．

$\chi > \aleph_0$ として，χ が極限基数で，χ より小さい無限基数に対しては補題が成り立っているとする．このときには,

$$\mathcal{H}(\chi) = \bigcup_{\substack{\kappa<\chi, \\ \kappa \text{ は基数}}} \mathcal{H}(\kappa) \quad \subseteq \quad \bigcup_{\substack{\kappa<\chi, \\ \kappa \text{ は基数}}} V_\kappa \quad = \quad V_\chi$$

となるから，χ に対しても補題が成り立つことがわかる．

$\chi = \kappa^+$ のときには，$\mathcal{H}(\chi) \not\subseteq V_\chi$ だったとして，$x \in \mathcal{H}(\chi) \setminus V_\chi$ をこのようなもののうち $\in$-rank が最初のものとする．このとき，$y \in x$ なら，補題 4.1 により，$trcl(y) \subseteq trcl(x)$ だから，$y \in \mathcal{H}(\chi)$ となり，最小性から $y \in V_\chi$ となる．したがって，$x \subseteq V_\chi$ となるが，$|x| \leq |trcl(x)| < \kappa$ により，χ は正規基数だから，$\alpha < \chi$ で $x \subseteq V_\alpha$ となるものがある．したがって,

$$x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\chi$$

となるが，これは x のとりかたに矛盾する． $\dashv$ (補題 4.2)

補題 4.3. すべての無限基数 χ に対し，$\mathcal{H}(\chi)$ は推移的な集合となる．

証明 $x \in \mathcal{H}(\chi)$ で $y \in x$ とする．このとき，補題 4.1 により，$trcl(y) \subseteq trcl(x)$ となり，$|trcl(x)| \leq |trcl(y)| < \kappa$ により，$x \in \mathcal{H}(\chi)$ がわかる． $\dashv$ (補題 4.3)

次の補題は，次節で述べるような応用でよく用いられる．

補題 4.4. (a) χ を無限基数とする．$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ で $r \subseteq M$ が有限集合なら，$r \in M$ となる．

(b) χ を無限基数とする．$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ で $r \in M$ が有限集合なら，$r \subseteq M$ となる．

(c) χ を非可算な基数とする．$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ で，$r \in M$ が可算なら，$r \subseteq M$ となる．

証明 (a): $r = \{r_1, \ldots, r_n\}$ となっているとする．このとき,

$$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \exists x(\text{“}x = \{x_1, , \ldots, x_n\}\text{”})[r_1/x_1, \ldots, r_n/x_n]$$

となるから，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ で，$r_1, \ldots, r_n \in M$ により,

$$(M, \in) \models \exists x(\text{“}x = \{x_1, , \ldots, x_n\}\text{”})[r_1/x_1, \ldots, r_n/x_n]$$

が成り立つ．したがって，$s \in M$ で，

$$(M, \in) \models \text{“}x = \{x_1, , \ldots, x_n\}\text{”}[s/x, r_1/x_1, \ldots, r_n/x_n]$$

となるものが存在するが，明らかに $s = r$ である．

次に (c) を証明する．(b) は同様に証明できる．

$\omega \in \mathcal{H}(\chi)$ で，ω は定義可能だから，$\omega \in M$ がわかる．同様にすべての $n \in \omega$ に対し $n \in M$ である．r は可算だから，

$$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \exists x(\text{“}x : y \to z\text{”})[\omega/y, r/z]$$

となる．したがって，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，

$$(M, \in) \models \exists x(\text{“}x : y \to z\text{”})[\omega/y, r/z]$$

である．よって，$f \in M$ で

$$(M, \in) \models \text{“}x : y \to z\text{”}[f/x, \omega/y, r/z]$$

となるものがあるが，すべての $n \in \omega$ に対し，$n \in M$ から $f(n) \in M$ となることがわかる．したがって，$r = \{f(n) : n \in \omega\} \subseteq M$ である．　$\dashv$ (補題 4.4)

5　初等部分構造の集合論での応用

以上の準備を使うと，無限組合せ論的な命題 φ の可能な証明方針の一つとして，次のようなものが考えられるようになる: まず基数 χ を十分に大きくとり，φ であらわれる objects がすべて $\mathcal{H}(\chi)$ に含まれ，

$$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \varphi \text{ が（本当に）成り立つ}$$

となるようにする[7]．ここで，定理 3.2, あるいは，補題 3.3 などの定理 3.2 の変種を用いて，具合の良い性質を持つ $(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ をとり，$(M, \in) \models \varphi$ を $(M, \in)$ と $(\mathcal{H}(\chi), \in)$ の間を行き来して証明する．この際に，$\mathcal{H}(\chi) \setminus M$ の元を M 上 non-standard analysis における無限小元や無限大元のようなものとして用いることができる．$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ だから，$(M, \in) \models \varphi$ から $(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \varphi$ が帰結でき，さらに χ のとり方から φ が本当に成り立つことが，これから帰結できる．

上のような証明方針の良い応用例として，Δ-レンマと呼ばれる次の定理の証明を見てみよう．

定理 5.1. (Δ-レンマ) κ を非可算な正則基数として，a_α, $\alpha < \kappa$ を有限集合の列とする．このとき濃度 κ の集合 $X \subseteq \kappa$ と集合 r で，すべての異なる $\alpha, \beta \in X$ に対し，$a_\alpha \cap a_\beta = r$ が成り立つようなものが存在する．

[7] “$(\mathcal{H}(\chi), \in)$” という書きかたについては，1 ページを参照．

証明 一般性を失うことなく，各 $\alpha < \kappa$ に対し $a_\alpha \subseteq \kappa$ となっているとしてよい．χ を十分に大きくとって，$(a_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in \mathcal{H}(\chi)$ となるようにする．特にこのことから，$\kappa \in \mathcal{H}(\chi)$ $\kappa \subseteq \mathcal{H}(\chi)$ etc. となる．補題 3.3 により，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}, \in)$ で，$(a_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in M$ で $M \cap \kappa$ はある順序数 $\alpha_0 < \kappa$ となっているようなものが存在する．$r = a_{\alpha_0} \cap \alpha_0$ とする．このとき $r \subseteq M$ で r は有限だから，補題 4.4(a) により，$r \in M$ となっていることがわかる．α_0 は極限順序数となっているから，$\alpha_1 < \alpha_0$ で $r \subseteq \alpha_1$ となるものが存在する．すべての $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$ に対し，$(\mathcal{H}, \in) \models \exists\beta < \kappa(a_\beta \cap \alpha = r)$ が成り立つ（a_{α_0} がそのようなものになっている）から，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，$(M, \in) \models \exists\beta < \kappa(a_\beta \cap \alpha = r)$ となる．したがって，$(M, \in) \models \forall\alpha_1 < \alpha < \kappa\exists\beta < \kappa(a_\beta \cap \alpha = r)$ となるから，再び $(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，

$$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \forall\alpha_1 < \alpha < \kappa\exists\beta < \kappa(a_\beta \cap \alpha = r)$$

がわかる．したがって，上昇列 $\alpha^*_\xi \in \kappa, \xi < \kappa$ を，

(i) $a_{\alpha^*_\xi} \cap a_{\alpha^*_\xi} = r$;
(ii) $\alpha^*_\xi \geq \sup\{\alpha^*_\eta + 1 : \eta < \xi\}$

となるようにとることができる．この r と $X = \{\alpha^*_\xi : \xi < \kappa\}$ は明らかに定理での性質を満たす． $\dashv$ (定理 5.1)

上に与えた証明の利点の一つは，Δ-レンマの様々な拡張を同様の証明で示すことができることである．次にそのようなものの一つを示すが，そのためにさらに用語を導入する: κ, λ を基数として，$\kappa \leq \lambda$ で，κ は正則基数であるとする．このとき，$X \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ が *stationary* であるとは，すべての closed unbounded な $C \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ に対し，$X \cap C \neq \emptyset$ が成り立つこと．$X \subseteq \kappa$ が stationary であるとは，X が $[\kappa]^{<\kappa}$ の部分集合として，stationary であることとする．$X \subseteq \kappa$ が stationary となるのは，任意の closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ ($\subseteq [\kappa]^{<\kappa}$) に対し，$X \cap C \neq \emptyset$ となることと同値であることが容易に示せる（演習）．$X \subseteq \kappa$ が stationary なら $|X| = \kappa$ となることも容易に示せるから，次の定理は，定理 5.1 の拡張となっている:

定理 5.2. κ を非可算な正則基数として，a_α, $\alpha < \kappa$ を有限集合の列とする．このとき，*stationary* な κ の集合 $X \subseteq \kappa$ と集合 r で，すべての異なる $\alpha, \beta \in X$ に対し，$a_\alpha \cap a_\beta = r$ が成り立つようなものが存在する．

証明 定理 5.1 と同じように証明を進めて，$(\alpha^*_\xi)_{\xi<\kappa}$ をとるところで，$(\alpha^*_\xi)_{\xi<\kappa}$ は定理 5.1 の証明の条件 (i),(ii) の他に，

(iii) a^*_ξ は (i) と (ii) を満たすようなもののうち最小のものとなっている

という条件も満たしているとする．このような $(\alpha^*_\xi)_{\xi<\kappa}$ が存在することを主張する論理式は $\mathcal{H}(\chi)$ で成り立つから，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，性質 (i),(ii),(iii) を満たす M の元が存在することがわかる．したがって最初から $(\alpha^*_\xi)_{\xi<\kappa} \in M$ となっているとしてよい．このとき，(iii) により，$\alpha^*_{\alpha_0}$ は α_0 となることに注意する．$C \subseteq \kappa$ が closed unbounded で $C \in M$ なら，$C \cap \alpha_0$ は α_0 で unbounded と

なり，したがって C が closed であることから，$\alpha_0 \in C$ がわかる．一方上の注意により $\alpha_0 \in X = \{\alpha^*_\xi : \xi < \kappa\}$ だから，$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models C \cap X \neq \emptyset$ となり，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，$(M, \in) \models C \cap X \neq \emptyset$ がわかる．したがって，

$$(M, \in) \models \text{“}X \text{ は } \kappa \text{ の stationary な部分集合”}$$

となるが，ふたたび $(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ により，このことから，

$$(\mathcal{H}(\chi), \in) \models \text{“}X \text{ は } \kappa \text{ の stationary な部分集合”}$$

わかり，χ が十分に大きくとってあったことから[8]，X は本当に κ の stationary な部分集合となっていることが帰結できる． $\dashv$ (定理 5.2)

同様の応用例をもう一つ見ておくことにする．このために，まず補題 3.3 をさらに一般化した次の補題を用意しておく．証明は補題 3.3 とまったく同様にできる．

補題 5.3. $\mathcal{A} = (A, \ldots)$ を L-構造として，$\lambda \subseteq A$, $\kappa \leq \lambda$ は正則基数とする．また $a \in [A]^{<\kappa}$ とする．このとき，

$$\mathcal{C} = \{x \in [\lambda]^{<\kappa} : \mathcal{B} = (B, \ldots) \text{ で } \mathcal{B} \prec \mathcal{A},\ a \subseteq B,\ B \cap \lambda = x \text{ となるものが存在する}\}$$

は *closed unbounded* となる． $\dashv$

定理 5.4. (Fodor の定理) $\aleph_0 < \kappa \leq \lambda$ で κ は正則基数とする．$A \subseteq [\lambda]^\kappa$ を *stationary* として，$f : A \to \lambda$ を $x \in A$ で $x \neq \emptyset$ なら $f(x) \in x$ が常に成り立つようなものとする．このとき，ある $\beta < \lambda$ に対し，$\{x \in A : f(x) = \beta\}$ は $[\lambda]^{<\kappa}$ の *stationary* な部分集合となる．

証明 そうでないとすると，各 $\beta \in \lambda$ に対し，closed unbounded な $C_\beta \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ で，$x \in C_\beta \cap A$ なら，$f(\beta) \neq \beta$ となっているようなものがとれる．χ を十分大きくとる．補題 5.3 により，$(M, \in) \prec (\mathcal{H}(\chi), \in)$ で，$(C_\beta)_{\beta < \lambda}, f, \ldots \in M$ かつ $\lambda \cap M \in A$ となるようなものが存在する．補題 5.3 をさらに改良することで，M は，$x \in M \cap [\lambda]^{<\kappa}$ なら，$x \subseteq M$ となるようにとることができる（演習）．このとき，$\lambda \cap M = \bigcup (M \cap [\lambda]^{<\kappa})$ となるから，この集合を x_0 とすると，$x_0 \in C_\beta$ がすべての $\beta \in \lambda \cap M$ で成り立つ．したがって，$f(x_0) \neq \beta$ がすべての $\beta \in x_0$ で成り立つが，これは f に関する仮定に矛盾する． $\dashv$ (定理 5.4)

6 さらに勉強を進めたい人のために

より詳しい議論，特に “$\mathcal{H}(\chi) \models \varphi \Leftrightarrow \varphi$ は本当に成り立つ” という同値が成り立つことの判定などについては，たとえば [3] を参照されたい．

[8] 例えば $\chi > 2^\kappa$ とすると，$\mathcal{P}(\kappa) \in \mathcal{H}(\chi)$ とできてここでの議論がうまく行なえる．

初等的部分構造の一般論を含むモデル理論の標準的な入門書としては，[1] があげられる．[5], [6] は集合論の標準的な教科書である．初等的部分構造の集合論的位相空間論での様々な応用は [2] で見ることができる．初等的部分構造は proper forcing とよばれる強制法での近代的な理論で縦横に用いられることになるが，その入門としては，[4] などが良いであろう．

References

[1] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Hooland, Amsterdam, 1973.

[2] A. Dow, *An introduction to applications of elementary submodels to topology*, Topology Proceedings, 13, 17–72, (1988).

[3] S. Fuchino, *Set-theoretic aspects of nearly projective Boolean algebras*, appendix to: L. Heindorf and L. Shapiro, *Nearly Projective Boolean Algebras*, Springer lecture note of mathematics 1596, 165–194, (1994).

[4] M. Goldstern, *Tools for your forcing constructions*, in: H. Judah (ed.), *Set Theory of the Reals*, Israel Mathematical Conference Proceedings, 305–360, Bar Ilan University, (1992).

[5] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, Springer (2001/2006).

[6] K. Kunen, *Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1980.