初等部分構造の集合論での応用

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

2009 年 10 月 (March 20, 2022 (21:29) 版)

目次

1 構造と充足関係

$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, R_1, ...\rangle$ が，**構造** (*structure*) であるとは， str-satisf

*本稿は，2009 年 9 月に筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻で開講された集中講義の講義録です．この講義の内容は，1997 年 8 月 4 日 – 6 日に静岡県三保の東海大学研修館において開催された数学基礎論サマースクールで行なった講義の講義録 (https://fuchino.ddo.jp/notes/elementary.pdf) をベースとして作成しました．本稿の，このヴァージョンはまだ最終稿ではなく，書きかけの部分や作成途中の “ゴミ” を含んでいる可能性もあります．間違いの指摘やコメントなど歓迎します．

このテキストの最新版は https://fuchino.ddo.jp/notes/elementary09.pdf としてダウンロードできます．

このテキストは，2009 年以降ほとんど修正なしに放置していたものです．筆者は，2020 年の暮に必要があって Python の勉強を始めたところ，2021 年 01 月に pyt erf 氏から，いくつかの質問／指摘を受け，これを期に，第 4 節と，第 6 節の一部で，前から気になっていた細部の修正と説明の補足を書き加えました．氏に感謝します．

(1.1)　A は集合（A を，$\mathfrak{A}$ のサポートとよぶことにする）; st-0

(1.2)　各 $i = 0, 1, ...$ に対し，$m_i \in \mathbb{N} \setminus 1$ があって，$R_i \subseteq A^{m_i}$（つまり，R_i は A 上の m_i-項関係） st-1

となっていること，とする．上のような構造は，relational structure と呼ばれ，より一般には，構造は，A 上の関数や定数（特定された A の元）を含むこともあるものとして導入される．しかし，このノートでは，主に，$\langle A, E, ...\rangle$ という形の（関係のみを構造として持つ） relational structure で，$E = \{\langle x, y\rangle \in A^2 : x \in y\}$ となっているようなものが考察される．以下では，このような構造を考察するときには，簡単のために，これを $\langle A, \in, ...\rangle$ と記すことにする． notation

R_0, R_1,... に対応する記号 $\underline{R}_0$, $\underline{R}_1$,... を用意して，$\mathcal{L} = \{\underline{R}_0, \underline{R}_1, ...\}$ を $\mathfrak{A}$ **の言語** (language) とよぶ．また $\mathfrak{A}$ は **$\mathcal{L}$-構造** ($\mathcal{L}$-*structure*) であるともいう．以下では，簡単のために $\mathcal{L}$ は常に高々可算であると仮定する．

$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ に関する命題のうち， $\mathcal{L}$-構造の一つ一つの元を調べることのみによって（たとえば，A の部分集合の全体を調べたりしなくても），その真偽が確定するようなものは，以下で導入する，（一階の）述語論理の論理式と呼ばれるものを用いて，表わすことができる．

まず，変数の可算無限集合 Var を固定しておき[1)]，これを用いて，**$\mathcal{L}$-論理式** ($\mathcal{L}$-*formulae or* $\mathcal{L}$-*formulas*) を，次のように帰納的に定義する:

(1.3)　x, $y \in Var$ のとき，‘$x \equiv y$’ は $\mathcal{L}$-論理式である; st-2

(1.4)　$\underline{R}$ が $\mathcal{L}$ の m 項関係記号で，x_0,..., $x_{m-1} \in Var$ のとき，‘$\underline{R}(x_0, ..., x_{m-1})$’ は $\mathcal{L}$-論理式である; st-3

(1.5)　φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式なら，“$(\varphi \wedge \psi)$”, “$(\varphi \vee \psi)$”, “$(\neg\varphi)$” “$(\varphi \rightarrow \psi)$”, “$(\varphi \leftrightarrow \psi)$” も $\mathcal{L}$-論理式である[2)]; st-4

(1.6)　φ が $\mathcal{L}$-論理式で，$x \in Var$ のとき，‘$\forall x\varphi$’, ‘$\exists x\varphi$’ も，$\mathcal{L}$-論理式である; st-5

(1.7)　以上のみ[3)]． st-6

(1.3) と (1.4) で導入される $\mathcal{L}$-論理式は，**原始論理式** (*atomic formulas*)，あるいは，**$\mathcal{L}$-原始論理式**とよばれる．

---

1) より厳密には，Var は，これから考えることになる構造や， ‘$\wedge$’, ‘$\vee$’ などの他の記号の全体の集合と共通部分を持たないようにとっておく必要がある．

2) “$(\varphi \wedge \psi)$” などとして “” で囲って表わしたのは，ここで考察している論理式が，たとえば $(\varphi \wedge \psi)$ は，記号 ‘(’, 記号列 φ, 記号 ‘$\wedge$’, 記号列 ψ, 記号 ‘)’ を繋げて得られる記号列である（にすぎない）ことを強調したかったからである．

3) この最後の条件の，より直観的な意味は，上の (1.3) 〜 (1.6) の構成法を，繰り返し適用することによって得られる表現<u>のみ</u>が，$\mathcal{L}$-論理式である，ということである．

上のような, $\mathcal{L}$-論理式の帰納的定義に対応して, $\mathcal{L}$-論理式に関する, 諸々の概念を帰納的に導入することができる．例えば，$\mathcal{L}$-論理式 φ に現れる**自由変数** (*free variables*) の全体の集合 $Free(\varphi)$ は，次のようにして帰納的に定義することができる:

(1.8) φ が $x \equiv y$ の形のときには，$Free(\varphi) := \{x, y\}$ とする; st-7

(1.9) φ が $\underline{R}(x_0, ..., x_{n-1})$ のときには，$Free(\varphi) := \{x_0, ..., x_{n-1}\}$; st-8

(1.10) φ が '$(\psi \wedge \eta)$', '$(\psi \vee \eta)$', '$(\neg\psi)$' '$(\psi \rightarrow \eta)$', または，'$(\psi \leftrightarrow \eta)$' の形をしているときには，$Free(\varphi)$ は，それぞれ，$Free(\psi) \cup Free(\eta)$, $Free(\psi) \cup Free(\eta)$, $Free(\psi)$, $Free(\psi) \cup Free(\eta)$, または，$Free(\psi) \cup Free(\eta)$ となる; st-9

(1.11) φ が '$\forall x\psi$' または '$\exists x\varphi$' の形をしているときには，$Free(\varphi) := Free(\psi) \setminus \{x\}$ とする． st-10

以下では，このような関数の定義を，φ **の構成に関する帰納的** (あるいは，**再帰的**) **定義**とよび，"すべての論理式 φ に関して，..." が成り立つという形の命題の，論理式の (1.3) ～ (1.7) に沿った証明を，φ **の構成に関する帰納法での証明**とよぶことにする．

$Free(\varphi) = \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ のとき，x_0,..., x_{n-1} は φ の**自由変数** (*free variables*) であるという．

$Free(\varphi) = \emptyset$ のとき，つまり φ が自由変数を持たないとき，φ は**閉論理式** (*closed formula*)，あるいは，**文** (*sentence*) であるという．閉論理式（あるいは文）が $\mathcal{L}$-論理式であるときには，**$\mathcal{L}$-閉論理式**（あるいは **$\mathcal{L}$-文**）という言い方もすることにする．また （矛盾しない[4]）$\mathcal{L}$-文の集合 T を **$\mathcal{L}$-理論** ($\mathcal{L}$-theory) という．

$Free(\varphi) \subseteq \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ のとき，このことを，$\varphi = \varphi(x_0, , ..., x_{n-1})$ と表わす．

$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ を，$\mathcal{L}$-構造として，φ は $\mathcal{L}$-論理式で，$\varphi = \varphi(x_0, , ..., x_{n-1})$ のとき，"x_0,..., x_{n-1} を a_0,..., $a_{n-1} \in A$ と解釈したときに，φ は，$\mathfrak{A}$ で成り立つ" ということを，$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0/x_0, ..., a_{n-1}/x_n]$, あるいは，もっと簡単に，$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}]$ と書く．これは，厳密には，以下のように帰納的に定義される:

(1.12) φ が '$x_i \equiv x_j$' のときには，$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] :\Leftrightarrow a_i = a_j$; st-11

(1.13) φ が $\underline{R}(x_{i_1}, ..., x_{i_m})$ のときには，$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] :\Leftrightarrow (a_{i_1}, ..., a_{i_m}) \in R$; ただし，$R$ は，$\underline{R}$ に対応する $\mathfrak{A}$ の m-項関係である; st-12

(1.14) φ が '$(\psi \wedge \eta)$', '$(\psi \vee \eta)$', '$(\neg\psi)$' '$(\psi \rightarrow \eta)$', または，'$(\psi \leftrightarrow \eta)$' の形をしてい st-13

[4] 矛盾しない，というのは，ここでは，以下で述べる論理式の解釈の意味で T のすべての要素モデルとなっているような $\mathcal{L}$-構造が存在する，ということである．

るときには，それぞれ，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \ :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ かつ}, \mathfrak{A} \models \eta[a_0, ..., a_{n-1}]$$
$$(\varphi \text{ が，} (\psi \wedge \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \ :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ または}, \mathfrak{A} \models \eta[a_0, ..., a_{n-1}]$$
$$(\varphi \text{ が，} (\psi \vee \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \ :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ でないとき}$$
$$(\varphi \text{ が，} (\neg\psi) \text{ のとき})$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \ :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ でないか，または，} \mathfrak{A} \models \eta[a_0, ..., a_{n-1}]$$
$$(\varphi \text{ が，} (\psi \to \eta) \text{ のとき})$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \ :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ と } \mathfrak{A} \models \eta[a_0, ..., a_{n-1}] \text{ が，両方とも成り立つか，あるいは，両方とも成り立たないとき}$$
$$(\varphi \text{ が，} (\psi \leftrightarrow \eta) \text{ のとき})$$

(1.15) $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ が，'$\forall x\psi(x, x_1, ..., x_n)$' または，'$\exists x\varphi(x, x_1, ..., x_n)$' の形をしているときには，まず必要なら x の呼びかえをして，x は $x_1,...,x_{n-1}$ に含まれていないとしてよいが，このとき: st-14

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \ :\Leftrightarrow \text{ すべての } a \in A \text{ に対し，} \ \mathfrak{A} \models \psi[a/x, a_1/x_0, ..., a_n/x_n]$$
$$(\varphi \text{ が } \forall x\psi \text{ のとき})$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \ :\Leftrightarrow \text{ ある } a \in A \text{ に対し，} \ \mathfrak{A} \models \psi[a/x, a_1/x_1, ..., a_n/x_n]$$
$$(\varphi \text{ が } \exists x\psi \text{ のとき}).$$

演習問題 1.1. 上の '$\models$' の定義は *well-defined* なものになっている．特に，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ で，$Free(\varphi) = \{x_{i_0}, ..., x_{i_{m-1}}\}$ のとき，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0/x_0, ..., a_{n-1}/x_{n-1}] \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{A} \models \varphi[a_{i_0}/x_{i_0}, ..., a_{i_{m-1}}/x_{i_{m-1}}]$$

が，すべての $a_0,...,a_{n-1} \in A$ に対し成り立つ． ❏

$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$-構造として，T を $\mathcal{L}$-理論とするとき，$\mathfrak{A} \models T$ とは，T に属す，すべての閉論理式 φ について，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が，成り立つこととする．$\mathfrak{A} \models T$ が成り立つとき，構造 $\mathfrak{A}$ は T のモデルである，とも言う．

2　部分構造，初等的部分構造

$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, R_1, ...\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, R'_0, R'_1, ...\rangle$ を，$\mathcal{L}$-構造とする．$\mathfrak{B}$ が，$\mathfrak{A}$ の**部分構造** substr-ele- (*substructure*) である（このことを，$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ と書く）とは，$B \subseteq A$ かつ，$R'_i = R_i \cap B^{m_i}$ substr が，すべての i に対し成り立つこととする．

$\mathfrak{B}$ が，$\mathfrak{A}$ の**初等部分構造** (elementary substructure) または，**初等部分モデル** (*elementary submodel*) であるとは，$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ で，すべての $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{k-1})$ と $b_0,..., b_{k-1} \in B$ に対し，$\mathfrak{B} \models \varphi[b_0, ..., b_{k-1}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[b_0, ..., b_{k-1}]$ が，成り立つことである．$\mathfrak{B}$ が，$\mathfrak{A}$ の初等部分構造のとき，このことを，$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ と表わす．

例 2.1. $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ と $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ を考える．明らかに $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle \subseteq \langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ である．

$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle \models \exists x \forall y (x \leq y)$ だが，一方，$\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle \not\models \exists x \forall y (x \leq y)$ だから，$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ は $(\mathbb{Q}, \leq)$ の初等的部分構造ではない．一方，$\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle \prec \langle \mathbb{R}, \leq\rangle$ である（演習）．

例 2.2. $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ と $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq\rangle$ を考える．明らかに $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq\rangle \subseteq \langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ である．

$\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq\rangle \models \forall y (x \leq y)[1/x]$ だが，$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ では 1 は最小元ではないから，$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle \not\models \forall y (x \leq y)[1/x]$ となり，$\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq\rangle$ は $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ の初等的部分構造ではないことが，わかる．

$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, R_1, ...\rangle$ で，$X \subseteq A$ のとき，$\mathfrak{A} \restriction X$ で構造 $\langle X, R_0 \cap X^{m_0}, R_1 \cap X^{m_1}, ...\rangle$ をあらわす．$\mathfrak{A} \restriction X \subseteq \mathfrak{A}$ であるが，上の例でもわかるように，$\mathfrak{A} \restriction X \prec \mathfrak{A}$ となるとは限らない．

$\mathfrak{A} \restriction X \prec \mathfrak{A}$ となるような X の構成法については，命題 3.1 を参照．

$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}$-構造とするとき，すべての $\mathcal{L}$-文 φ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ が成り立つとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ は**初等同値** (*elementary equivalent*) であるといい，これを $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ であらわす．

演習問題 2.3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ で $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ だが，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ではないような例をあげよ．　❏

演習問題 2.4. $\prec$ は推移的である．つまり，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ かつ，$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ なら $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ が成り立つ．　❏

演習問題 2.5. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ で，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ なら，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ である．　❏ *baka*

定理 2.6. γ を，極限順序数として，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ を，次の (2.1), (2.2) を満たす $\mathcal{L}$- *union-of-* 構造 $\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, R_0^\alpha, R_1^\alpha, ...\rangle$, $\alpha < \gamma$ の列とする： *chain*

(2.1)　$\alpha < \beta < \gamma$ なら，$\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{A}_\beta$. *el-a-0*

(2.2)　$\delta < \gamma$ が極限順序数なら，$A_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ となっている[5)]．　*el-a-1*

このとき $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, $R_1^\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} R_1^\alpha, \ldots$ として，$\mathfrak{A}_\gamma = \langle A_\gamma, R_1^\gamma, R_2^\gamma, \ldots\rangle$ とすれば，$\mathfrak{A}_\gamma$ は $\mathcal{L}$-構造となる．さらに，次が，成り立つ:

(a)　すべての $\alpha < \gamma$ に対し，$\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{A}_\gamma$ となる．

(b)　$\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{B}$ が，すべての $\alpha < \gamma$ に対して成り立つような，$\mathcal{L}$-構造とするとき，$\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{B}$ となる．

証明． $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\gamma$ となることは明らか．(a) の証明には，次の (2.3) を，$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ の構成に関する帰納法により示すことができれば，よい:

(2.3)　すべての $\alpha < \gamma$ と，$a_0, \ldots, a_{n-1} \in A_\alpha$ に対し，　el-0

$$\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$$

が成り立つ．

φ が $x = y$ または $R(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}})$ の形をしているときには，(2.3) が成り立つことは明らか．また φ が $(\psi \wedge \eta)$, $(\psi \vee \eta)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \leftarrow \eta)$ または $(\psi \leftrightarrow \eta)$ の形をしていて，(2.3) が ψ と η に対して成立するときには，このことから (2.3) が φ に対しても成立することも容易に示せる（演習）．

φ が $\exists x\psi$ で ψ については (2.3) がすでに証明されているとして，(2.3) が φ についても成り立つことを示す:

"$\Rightarrow$": $\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ とすると，$a \in A_\alpha$ で，$\mathfrak{A}_\alpha \models \psi[a/x, a_0/x_0, \ldots, a_{n-1}/x_{n-1}]$ となるものが存在する．このとき帰納法の仮定から，$\mathfrak{A}_\gamma \models \psi[a/x, a_0/x_1, \ldots, a_{n-1}/x_{n-1}]$ となるから，$\mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ が，わかる．

"$\Leftarrow$": $\mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ とすると，$a \in A_\gamma$ で $\mathfrak{A}_\gamma \models \psi[a/x, a_0/x_0, \ldots, a_{n-1}/x_{n-1}]$ となるものが存在する．γ は，極限順序数だったから，A_γ の定義から，ある $\beta < \gamma$ で，$a \in A_\beta$ となるものがとれる．$\alpha < \beta$ となっているとしてよいが，このとき仮定から $\mathfrak{A}_\beta \models \psi[a/x, a_0/x_0, \ldots, a_{n-1}/x_{n-1}]$ となる．したがって，$\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ であるから，(2.1) により，$\mathfrak{A}_\alpha \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ となる．

φ が $\forall x\psi$ の場合も同様に証明できる（演習）．

(b) は，(a) と同様に証明できる（演習）．　❑ (定理 2.6)

[5)] 構造の列 $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ が，(2.1),(2.2) を満たすとき，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ は，**連続な初等的連鎖** (*continuous elementary chain*) であるという．

同様に $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ が，

(2.1)'　$\alpha < \beta < \gamma$ なら $\mathfrak{A}_\alpha \subseteq \mathfrak{A}_\beta$

と (2.2) を満たすとき，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ は（$\subseteq$ に関する）**連続な上昇列** (*continuously increasing sequence*) である，という．

系 2.7. $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ を，$\mathfrak{A}$ の部分構造の，連続な上昇列で， *union-of-chain2 el-1*

(2.4) $\mathfrak{A}_{\alpha+1} \prec \mathfrak{A}$ が，すべての $\alpha + 1 < \gamma$ となる α に対して，成り立つ

とする．このとき，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ は，連続な初等的連鎖となり，$\mathfrak{A}_\gamma$ を，定理 2.6 でのように定義すると，$\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}$ が成り立つ．

証明． 定理 2.6 を用いて，γ に関する帰納法で，

(2.5) $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ が，(2.4) を満たす，$\mathfrak{A}$ の部分構造の連続な上昇列なら，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ は，$\mathfrak{A}$ の初等部分モデルの，連続な初等的連鎖となる．

を，証明すれば，よい． □ (系 2.7)

3 Downward Löwenheim-Skolem 定理

再び，$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, R_1, ... \rangle$ を，$\mathcal{L}$-構造とする．f が，$\mathfrak{A}$ **上の関数**であるとは，ある $n \in \omega$ に対し，$f : A^n \to A$ となっていることとする．$\mathfrak{A}$ 上の関数の族 $\mathcal{F}$ に対し，$X \subseteq A$ **が** $\mathcal{F}$ **に関して閉じている** ($X \subseteq A$ *is closed with respect to* $\mathcal{F}$) とは，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し，f を，n 変数として，$f''X^n \subseteq X$ が，成り立つこととする． downw-losko

命題 3.1. $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A}$ 上の関数族 $\mathcal{F}$ で，以下の (3.1), (3.2) を満たすものが，存在する*:* *skolem*

(3.1) $\mathcal{F}$ は可算*;* *dls-0*

(3.2) 任意の $X \subseteq A$ に対し，X が，$\mathcal{F}$ に関して閉じているなら，$\mathfrak{A} \restriction X \prec \mathfrak{A}$ となる． *dls-1*

証明． $\sqsubseteq$ を，A 上の整列順序として，a^* を，A の $\sqsubseteq$ に関する最小元とする．各 $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(x_0, x_1, ..., x_n)$ に対し，$f_\varphi : A^n \to A$ を

$$(3.3)\quad f_\varphi(a_1, ..., a_n) = \begin{cases} \mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, ..., a_n] \text{ となるような } a \in A \text{ で，} \\ \sqsubseteq \text{ に関し最小なもの，} \quad \text{そのようなものが存在するとき；} \\ a^*, \quad \text{上のようなものが存在しないとき} \end{cases}$$ dls-1-0

として定義する．ここで $\mathcal{F} = \{ f_\varphi : \varphi \text{ は } L\text{-論理式} \}$ とすると，この $\mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す．

$\mathcal{L}$ は可算だったから，$\mathcal{F}$ が，可算になることは，よい．$\mathcal{F}$ が，(3.2) も満たすことを，示す:

$X \subseteq A$ が，$\mathcal{F}$ で閉じているとして，$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction X$ とする．$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ が，示すべきことだが，このために，

(3.4) $b_0,\ldots,b_{n-1}\in X$ なら，$\mathfrak{A}\models\varphi[b_0,\ldots,b_{n-1}]\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi[b_0,\ldots,b_{n-1}]$ dls-2

が，すべての $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi=\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})$ に対し成り立つことを，φ の構成に関する帰納法で示す．

φ が，$x_{i_0}\equiv x_{i_1}$ または，$R(x_{i_0},\ldots,x_{i_{m-1}})$ の形をしているときには，(3.4) が成り立つことは，明らかである．また，φ が，$(\psi\land\eta)$, $(\psi\lor\eta)$, $(\neg\psi)$, $(\psi\leftarrow\eta)$ または $(\psi\leftrightarrow\eta)$ の形をしていて，(3.4) が，ψ と η に対して成立するときには，このことから (3.4) が，φ に対しても成立することも，容易に示せる（演習）．

$\varphi=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ が，ある $\mathcal{L}$-論理式 $\psi=\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ に対して，$\exists x\psi$ と書け，ψ については，(3.4) が成り立つことが，すでに判っているとして，φ についても，(3.4) が成り立つことを，示す:

(3.4) の "$\Rightarrow$": $\mathfrak{A}\models\varphi[b_0,\ldots,b_{n-1}]$ とする．つまり，$\mathfrak{A}\models\exists x\psi[b_0,\ldots,b_{n-1}]$ とする．このときには，$b_0,\ldots,b_{n-1}$ に対して，f_ψ の定義 (3.3) で，一番目の場合が成立している．したがって，$\mathfrak{A}\models\psi[f_\psi(b_0,\ldots,b_{n-1})/x,b_0/x_0,\ldots,b_{n-1}/x_{n-1}]$ となる．X に対する仮定から，$f_\psi(b_0,\ldots,b_{n-1})\in X$ となるから，帰納法の仮定により，

$$\mathfrak{B}\models\psi[f_\psi(b_0,\ldots,b_{n-1})/x,b_0/x_0,\ldots,b_{n-1}/x_{n-1}]$$

となる．したがって，$\mathfrak{B}\models\varphi[b_0,\ldots,b_{n-1}]$ である．

(3.4) の "$\Leftarrow$" は容易に示せる（演習）．φ が $\forall\psi$ の場合も，同様に示せる（演習）．

❑ (命題 3.1)

命題 3.1 の系として，次の Downward Löwenheim-Skolem の定理と呼ばれている定理が得られる．定理を一般的な形で述べるために，まず，いくつかの用語を導入する．κ を非可算な正則基数として，X を集合とする．このとき，

$$[X]^{<\kappa}=\{x\subseteq X\,:\,|\,x\,|<\kappa\}$$

とする．$[X]^{\leqq\kappa}$, $[X]^{\kappa}$, も同様に定義する[6]．

$\mathcal{C}\subseteq[X]^{<\kappa}$ が *closed unbounded* （略して *club*）であるとは，次の (3.5), (3.6) が成立することとする:

(3.5) $\gamma<\kappa$ で $x_\alpha\in\mathcal{C}$, $\alpha<\gamma$ が $\subseteq$ に関する上昇列であるとき[7], $\bigcup_{\alpha<\gamma}x_\alpha\in\mathcal{C}$ が成り立つ (closed); dls-3

(3.6) 任意の $x\in[X]^{<\kappa}$ に対し，$y\in\mathcal{C}$ で，$x\subseteq y$ となるものが，存在する (unbounded). dls-4

---

[6] $[X]^{\leqq\kappa}=[X]^{<\kappa^+}$, $[X]^{\kappa}=[X]^{<\kappa^+}\setminus[X]^{<\kappa}$ である．

[7] つまり，任意の $\alpha<\beta<\gamma$ に対し，$x_\alpha\subseteq x_\beta$ が成立するとき．

$[X]^{\leqq\kappa}$ や $[X]^\kappa$ の club な部分集合についても，同様に定義する．

補題 3.2. (a) $\mathcal{C}$ が，$[X]^\kappa$ の *club* な部分集合であるとき，$\mathcal{C}$ は，$[X]^{\leqq\kappa}$ の *club* な部分集合でもある．

(b) $\mathcal{C}$ が，$[X]^{\leqq\kappa}$ の *club* な部分集合のとき，$\mathcal{C}\cap[X]^\kappa$ は，$[C]^\kappa$ の *club* な部分集合である．

証明． 演習． ❏ (補題 3.2)

定理 3.3. (Downward Löwenheim-Skolem 定理) $\mathfrak{A}=\langle A,...\rangle$ を，（非可算な）$\mathcal{L}$-構造として，$\kappa\leqq|A|$ を，非可算な正則基数とする．このとき downward-losko

$$\mathcal{C}=\{x\in[A]^{<\kappa}\,:\,\mathfrak{A}\restriction x\prec\mathfrak{A}\}$$

は，$[A]^{<\kappa}$ の *closed unbounded* な部分集合となる．

証明． $\mathcal{C}$ が，(3.5) を満たすことは，定理 2.6 によりよい[8)]．$\mathcal{C}$ が (3.6) も満たすことを示すために，$\mathcal{F}$ を命題 3.1 でのようにとる．$x\in[A]^{<\kappa}$ に対し，$y\in[A]^{<\kappa}$ で，$x\subseteq y$ かつ，y は，$\mathcal{F}$ に関して閉じているようなものがとれるが[9)]，このとき，$\mathfrak{A}\restriction y\prec\mathfrak{A}$ だから $y\in\mathcal{C}$ である． ❏ (定理 3.3)

$\mathfrak{A}=\langle A,...\rangle$ を，$\mathcal{L}$-構造として，$\mathcal{F}$ を命題 3.1 でのようにとる．このとき，$x\subseteq A$ に対し，$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(x)$ で，x を含む A の部分集合のうち $\mathcal{F}$ に関し閉じているもののうち $\subseteq$ に関し最小のものを表わすことにする．$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(x)$ は，**x の $\mathcal{F}$ に関するスコーレム閉包** (*Skolem closure of X with respect to $\mathcal{F}$*) とよばれる．$\mathfrak{A}\restriction\tilde{h}_{\mathcal{F}}(x)\prec\mathfrak{A}$ となるが，簡単のために，$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(x)$ で，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}\restriction\tilde{h}_{\mathcal{F}}(x)$ も表わすことにする．

定理 3.3 と類似の次の結果も，よく使われることになる:

補題 3.4. $\mathfrak{A}=\langle A,...\rangle$ を，$\mathcal{L}$-構造として，$\kappa>\aleph_0$ を正則基数とし，$\kappa\subseteq A$ となっているとする．このとき，任意の $a\in[A]^{<\kappa}$ に対し， downward-losko-a

$$C=\{\alpha<\kappa\,:\,\mathfrak{B}=\langle B,...\rangle\prec\mathfrak{A}\text{ で，}\ a\subseteq B,\,B\cap\kappa=\alpha\text{ となるものが存在する}\}$$

は，$[\kappa]^{<\kappa}$ の *closed unbounded* な部分集合を含む（特に $C\neq\emptyset$ である）．

---

8) 演習問題 2.5 に注意する．

9) x_n, $n\in\omega$ を帰納的に，$x_0=x$; $x_{n+1}=x_n\cup\{f(a_1,...,a_n)\,:\,a_1,...,a_n\in x_n,\,f\in\mathcal{F}\}$ ととり，$y=\bigcup_{n\in\omega}x_n$ とすると，$\mathcal{F}$ は，可算だから，$|y|<\kappa$ となるが，y が $\mathcal{F}$ に関し閉じていることは容易に示せる．

証明． $\mathcal{F}$ を，命題 3.1 でのようにとる，このとき，

$$C \supseteq \{\alpha < \kappa : \tilde{h}_{\mathcal{F}}(\alpha \cup a) \cap \kappa = \alpha\}$$

となるが，右辺が $[\kappa]^{<\kappa}$ で closed unbounded であることは容易に示せる（演習）.

❑ (補題 3.4)

$\mathfrak{A} = \langle A, ..., \lhd \rangle$ で，$\lhd$ が A の well-ordering のとき，命題 3.1 の証明での $\sqsubseteq$ として $\lhd$ をとると，命題 3.1 の $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{A}$ 上定義可能な関数からなるものとなる．このようなとき，$\mathcal{F}$ は，built-in Skolem functions である，という．

定理 3.5. $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ を，*built-in Skolem functions* $\mathcal{F}$ を持つ構造とするとき，すべての $X \subseteq A$ に対し，$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{B} = \langle B, ... \rangle$ として，$X \subseteq B$ となるようなもののうち，$\subseteq$ に対して最小のものが，存在する．

証明． $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ で，$\mathfrak{B} = \langle B, ... \rangle$, $X \subseteq B$ とすると，$\mathfrak{B}$ の elementarity から，B は，$\mathcal{F}$ に関して閉じているので，$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(X) \subseteq \mathfrak{B}$ が，成り立つ[10)]．したがって，$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(X)$ は X を含む $\mathfrak{A}$ の初等部分構造のうち，最小のものである．❑ (定理 3.5)

4 $\mathcal{H}(\chi)$

集合 x が**推移的** (*transitive*) であるとは，任意の $y \in x$ と $z \in y$ に対し $z \in x$ が成り立つことである．集合 x の**推移的閉包** (*transitive closure*) $trcl(x)$ を， calHchi

(4.1) $\quad trcl(x) = \bigcap\{u : u \text{ は推移的で } x \in u\}$ trcl-0

として定義する[11)]．

補題 4.1. $x \in y$ なら，$trcl(x) \subseteq trcl(y)$ となる． *transitive*

---

10) 演習問題 2.5 により，$\tilde{h}_{\mathcal{F}}(X) \prec \mathfrak{B}$ でもある．

11) $trcl(x)$ の定義の右辺にあらわれるクラスが，空集合でないことを見るためには，$trcl(x)$ が，以下のようにして構成できることを示せばよい: $n \in \omega$ に対し，$tc_n(x)$ を帰納的に $tc_0(x) = \{x\}$, $tc_{n+1}(x) = tc_n(x) \cup \{z :$ ある $y \in tc_n(x)$ に対し $z \in y\}$ としてとると，$trcl(x) = \bigcup_{n\in\omega} tc_n(x)$ となる（演習）．ここでの $trcl(x)$ ではなく，$trcl(x) \setminus \{x\}$ を，x の transitive closure とする流儀もあるが，ここでは，後で，$trcl(x)$ から x が一意に復元できることを保証する必要があるため，ここでのような定義を採用している．[4] では，$trcl(x) \setminus \{x\}$ は $trcl^-(s)$ と呼ばれている．$trcl^-(x)$ が x を reconstruct できないことは，例えば ω の任意の無限部分集合 S に対し，$trcl^-(S) = \omega$ となることから，明らかである．これに対し，x は $trcl(x)$ の $\in$-rank が最大の唯一の要素，として指定することができる．

証明． $x \subseteq trcl(y)$ となるが，$trcl(y)$ は，推移的だから，(4.1) から，$trcl(x) \subseteq trcl(y)$ が，帰結できる． ❑ (補題 4.1)

χ を，無限基数とするとき，**継承的に濃度が** $< \chi$ (hereditarily of cardinality $< \chi$) な集合の全体 $\mathcal{H}(\chi)$ を，

$$\mathcal{H}(\chi) = \{x : |\,trcl(x)\,| < \chi\}$$

により定義する．次の補題から，$\mathcal{H}(\chi)$ は集合になることが，わかる．

補題 4.2. χ を無限基数とするとき，$\mathcal{H}(\chi) \subseteq V_\chi$ となる． *set*

証明． χ に関する帰納法で証明する．$\chi = \aleph_0$ のときには，$x \in \mathcal{H}(\chi)$ として，ある $n \in \omega$ に対し，$|\,trcl(x)\,| = n$ となるが，n に関する帰納法で，$x \in V_\omega$ が，証明できる（演習）[12]．

$\chi > \aleph_0$ として，χ が極限基数で，χ より小さい無限基数に対しては，補題が成り立っているとする．このときには，

$$\mathcal{H}(\chi) = \bigcup_{\substack{\kappa<\chi,\\ \kappa\text{ は基数}}} \mathcal{H}(\kappa) \;\subseteq\; \bigcup_{\substack{\kappa<\chi,\\ \kappa\text{ は基数}}} V_\kappa \;=\; V_\chi$$

となるから，χ に対しても，補題が成り立つことが，わかる．

$\chi = \kappa^+$ のときには，$\mathcal{H}(\chi) \not\subseteq V_\chi$ だったとして，$x \in \mathcal{H}(\chi) \setminus V_\chi$ をこのようなもののうち $\in$-rank が最初のものとする．このとき，$y \in x$ なら，補題 4.1 により，$trcl(y) \subseteq trcl(x)$ だから，$y \in \mathcal{H}(\chi)$ となり，最小性から $y \in V_\chi$ となる．したがって，$x \subseteq V_\chi$ となるが，$|\,x\,| \leq |\,trcl(x)\,| < \chi$ により，χ は正規基数だから，$\alpha < \chi$ で $x \subseteq V_\alpha$ となるものがある．したがって，$x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\chi$ となるが，これは，x のとりかたに矛盾する． ❑ (補題 4.2)

補題 4.3. すべての無限基数 χ に対し，$\mathcal{H}(\chi)$ は，推移的な集合である． *transitiveH*

証明． $\mathcal{H}(\chi)$ が，集合になることは，補題 4.2 によりよい．

$x \in \mathcal{H}(\chi)$ で $y \in x$ とする．このとき，補題 4.1 により，$trcl(y) \subseteq trcl(x)$ となり，$|\,trcl(x)\,| \leq |\,trcl(y)\,| < \kappa$ により，$x \in \mathcal{H}(\chi)$ である． ❑ (補題 4.3)

$\mathcal{H}(\chi)$ が集合になることは，次に示す，$\mathcal{H}(\chi)$ の濃度の評価からもわかる:

補題 4.4. 任意の無限基数 χ に対し，$|\,\mathcal{H}(\chi)\,| = 2^{<\chi}$ である．

---

[12] 逆に，$V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ のすべての元が $\mathcal{H}(\aleph_0)$ に属すことも，n に関する帰納法で示せるから，$V_\omega = \mathcal{H}(\aleph_0)$ である．

証明． $x \in \mathcal{H}(\chi)$ とすると，$|\,trcl(x)\,| < \chi$ だが，$\lambda = |\,trcl(x)\,|$ として，$f : \lambda \to trcl(x)$ を，bijection とし，$g : \lambda^2 \to 2$ を，$g(\alpha, \beta) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta)$ で定義すると，x は，g によって，一意に決まる．このような g は，高々 $2^{<\chi}$ 個しかないから，$|\,\mathcal{H}(\chi)\,| \leq 2^{<\chi}$ である．

一方，基数 $\lambda < \chi$ と $f : \lambda \to 2$ に対し，

$$x_f = \{\alpha \in \lambda \,:\, f(\alpha) = 1\} \cup \{\{\alpha + 1\} \,:\, \alpha \in \lambda,\, f(\alpha) = 0\}$$

とすると，$f \mapsto x_f$ は，一対一対応となることから，$|\,\mathcal{H}(\chi)\,| \geq 2^{<\chi}$ が，わかる．

❑ (補題 4.4)

次の補題は，第 6 節で述べることになるような応用で，よく用いられる．

補題 4.5. (a)　χ を無限基数とする．$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で[13]，　$r \subseteq M$ が，有限集合なら，$r \in M$ となる． *util*

(b)　$\kappa < \chi$ を，基数として，$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で，$\kappa \in M$, $\kappa \subseteq M$ とする．このとき，$r \in M$ で，$|\,r\,| \leq \kappa$ なら，$r \subseteq M$ である．

(c)　χ を，無限基数とする．$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で，$r \in M$ が，有限集合なら，$r \subseteq M$ となる．

(d)　χ を，非可算な基数とする．$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で，$r \in M$ が可算なら，$r \subseteq M$ となる．

証明． (a): $r = \{r_0, ..., r_{n-1}\}$ となっているとする．このとき，

$$\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle \models \exists x(\text{“}x = \{x_0, ..., x_{n-1}\}\text{”})[r_0/x_0, ..., r_{n-1}/x_{n-1}]$$

となるから，$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ と，$r_0, ..., r_{n-1} \in M$ により，

$$\langle M, \in\rangle \models \exists x(\text{“}x = \{x_0, ..., x_{n-1}\}\text{”})[r_0/x_0, ..., r_{n-1}/x_{n-1}]$$

が，成り立つ．したがって，$s \in M$ で，

$$\langle M, \in\rangle \models \text{“}x = \{x_0, ..., x_{n-1}\}\text{”}[s/x, r_0/x_0, ..., r_{n-1}/x_{n-1}]$$

となるものが存在するが，明らかに[14] $s = r$ である．

♦ チェックここから

[13] “$\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$” という書きかたについては，2 ページを参照．

[14] この主張の検証を含めて，この補題の証明の細部の検証は次の節で証明する補題 5.1 を用いて一様なやり方で行うことができる．

(b): 仮定から，

$$\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle \models \exists x(\text{“}x : y \to z \text{ で } x \text{ は上射”})[\kappa/y, r/z]$$

である．したがって，$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ により，

$$\langle M, \in\rangle \models \exists x(\text{“}x : y \to z \text{ で } x \text{ は上射”})[\kappa/y, r/z]$$

である．よって，$f \in M$ で

$$\langle M, \in\rangle \models \text{“}x : y \to z \text{ で } x \text{ は上射”}[f/x, \kappa/y, r/z]$$

となるものがとれるが，すべての $\alpha \in \kappa$ に対し，$\alpha \in M$ となることから，$f(\alpha) \in M$ がわかる．したがって，$r = \{f(\alpha) : \alpha \in \kappa\} \subseteq M$ である．

(c): $\omega \subseteq \mathcal{H}(\chi)$ で有限基数は定義可能だから，$\omega \subseteq M$ である．したがって，$\kappa = |\, r\,|$ $(< \omega)$ に対して (b) を適用すると，$r \subseteq M$ がわかる．

(d): χ が非可算により，$\omega \in \mathcal{H}(\chi)$ である．ω は定義可能だから，$\omega \in M$ で，(c) の証明で注意したように $\omega \subseteq M$ である．したがって $\kappa = |\, r\,|$ $(\leqq \omega)$ に対して (b) を適用すると，$r \subseteq M$ がわかる． ❑ (補題 4.5)

5 絶対性と $\mathcal{H}(\chi)$ で成り立つ集合論の公理

$\mathcal{H}(\chi)$ は一般には ZFC のモデルではない．さらに，不完全性定理により，“$\mathcal{H}(\chi)$ が ZFC のモデルになるような正則基数 χ が存在する” は ZFC から証明できない．しかし，ZFC で，非可算な正則基数 χ に対し，$\mathcal{H}(\chi)$ は “ほとんど” ZFC のモデルになっていることが言え（定理 5.3 を参照），さらに，“$\mathcal{H}(\chi) \prec V$” の代用のようなものとして用いることのできる反映原理（定理 5.5 を参照）も成り立つ． absol

以下では，言語 $\mathcal{L}$ を，$\mathcal{L} = \{\in, ...\}$ として固定する．ただし，ここで universe には ... に対応する，要素や，クラス関数や，関係が導入されているとする．例えば，... の中に含まれる，二変数関数記号 $\underline{\{\cdot,\cdot\}}$ に，2 つの集合のペアを返すクラス関数 $\{\cdot,\cdot\}$ が対応している，とする．関係記号 $\underline{\in}$ が集合の要素関係 $\in$ に解釈され，... に含まれる記号が，universe で定めた解釈や，それらの (台集合への) 制限として解釈されるような $\mathcal{L}$-構造を，$\mathfrak{A} = \langle A, \in, ...\rangle$ を **$\in$-モデル** と呼ぶことにする． $\in$-モデル $\mathfrak{A} = \langle A, \in, ...\rangle$ で “$\in, ...$” が文脈から明らかなときには，A で $\mathfrak{A}$ をあらわすことにする．

φ が $\mathcal{L}$-論理式で $x, y \in Var$ のとき，$(\exists x \in y)\varphi$, $(\forall x \in y)\varphi$ で，それぞれ論理式 $\exists x(x \in y \land \varphi)$ および，$\forall x(x \in y \to \varphi)$ をあらわすことにする．

$\mathcal{L}$-論理式 φ が **束縛論理式** (*bounded formula*) であるとは，$(\exists x \in y)$ および $(\forall x \in y)\varphi$ の形のものを独立した量化子であるかのように扱って以下の帰納的定義で導入される論理式の集合に φ が属すこと，とする:

(5.1)　$x, y \in Var$ のとき，'$x = y$' は $\mathcal{L}$-束縛論理式である; st-2'

(5.2)　$\underline{R}$ が $\mathcal{L}$ の m 項関係記号で，$x_0,..., x_{m-1} \in Var$ のとき，'$\underline{R}(x_0, ..., x_{m-1})$' は $\mathcal{L}$-束縛論理式である; st-3'

(5.3)　φ, ψ が $\mathcal{L}$-束縛論理式なら，"$(\varphi \wedge \psi)$", "$(\varphi \vee \psi)$", "$(\neg\varphi)$" "$(\varphi \rightarrow \psi)$", "$(\varphi \leftrightarrow \psi)$" も $\mathcal{L}$-束縛論理式である; st-4'

(5.4)　φ が $\mathcal{L}$-束縛論理式で $x, y \in Var$ のとき，"$(\forall x \in y)\varphi$", "$(\exists x \in y)\varphi$" も $\mathcal{L}$-束縛論理式である; st-5'

(5.5)　以上のみ. st-6'

束縛論理式（にパラメタを代入したもの）の真偽の判定は，この論理式に表われるパラメタやそれらの要素，またそれらの要素の要素，などを調べることで実行できる．この直観を（(5.1) ～ (5.4) の意味での）束縛論理式の構成に関する帰納法に乗せることにより，次の 補題 5.1 が証明できる．

まず，補題 5.1 で用いられる用語の定義から始める．

$\mathfrak{A} = \langle A, \in, \ldots \rangle$ を，$\mathcal{L}$ での $\in$-モデルとして，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，φ が $\mathfrak{A}$ 上 **絶対** (*absolute*) である，とは，すべての集合 $a_0,..., a_{n-1} \in A$ に対し，

(5.6)　$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \;\Leftrightarrow\; \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$

が，成り立つこと，とする．

補題 5.1. 任意の（$\in$ 記号を含む）言語 $\mathcal{L}$ に対し，すべての $\mathcal{L}$-束縛論理式は，推移的な，$\mathcal{L}$ での $\in$-モデル M 上で，絶対である．特に，任意の基数 χ に対し，$\mathcal{H}(\chi)$ 上，任意の束縛論理式は，絶対である． *abs*

証明．（(5.1)～(5.5) の意味での） $\mathcal{L}$ 上の束縛論理式の構成に関する帰納法により，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対して

(5.7)　$M \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \;\Leftrightarrow\; \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ bdd-0

が，すべての $a_0,..., a_{n-1} \in M$ に対し成り立つことを示す．

φ が $\mathcal{L}$ での原始論理式のときには，(5.7) が成り立つことは，'$\models$' の定義から明らかである．

また，$\mathcal{L}$ での束縛論理式 φ と ψ に対して (5.7) が成り立っているときには，"$(\varphi \wedge \psi)$", "$(\varphi \vee \psi)$", "$(\neg\varphi)$" "$(\varphi \rightarrow \psi)$", "$(\varphi \leftrightarrow \psi)$" に対しても (5.7) が成り立つことも，'$\models$' の定義から明らかである．

したがって，(5.4) での構成で，帰納法のステップが機能することを確かめれば十分である．

$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ が $(\forall x \in x_i)\psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ （ただし $i \in n$）の形をしていて，ψ に対しては (5.7) が成り立っているとする．このとき，$a_0,...,a_{n-1} \in M$ として，

$$
\begin{aligned}
& M \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \\
\Leftrightarrow\quad & \text{すべての } a \in a_i \cap M \text{ に対して } M \models \psi[a, a_0, ..., a_{n-1}] \\
\Leftrightarrow\quad & \text{すべての } a \in a_i \text{ に対して } M \models \psi[a, a_0, ..., a_{n-1}] && (M \text{ は推移的だから}) \\
\Leftrightarrow\quad & \text{すべての } a \in a_i \text{ に対して } \psi(a, a_0, ..., a_{n-1}) && (\text{帰納法の仮定}) \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi(a_0, ..., a_{n-1})
\end{aligned}
$$

φ が $(\exists x \in x_i)\psi(x, x_1, ..., x_n)$ の形をしているときの証明も，同様にできる．

❏ (補題 5.1)

T を，$\mathcal{L}$-理論とするとき，$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ が，Π^T_1 である，とは，ある $\mathcal{L}$-束縛論理式 $\eta(y_0, ..., y_{\ell-1}, x_0, ..., x_{n-1})$ に対して，

$$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\varphi \leftrightarrow \forall y_0 \cdots \forall y_{\ell-1}\, \eta)$$

となること，とする [15)]．

$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ が，Δ^T_1 である，とは，$\mathcal{L}$-束縛論理式
$\psi = \psi(y_0, ..., y_{k-1}, x_0, ..., x_{n-1})$, $\eta = \eta(y_0, ..., y_{\ell-}, x_0, ..., x_{n-1})$ で，

$$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\varphi \leftrightarrow \exists y_0 \cdots \exists y_{k-1}\, \psi)$$
$$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\varphi \leftrightarrow \forall y_0 \cdots \forall y_{\ell-1}\, \eta)$$

となるものがとれること，とする [16)]．

補題 5.2. , ZFC* を，ZFC から出発して，いくつかの新しい関数記号や定数記号を導入することにより得られる ZFC の *conservative extension* とし，$\mathcal{L}$ をその言語とする． *abs-2*

M を，推移的な $\mathcal{L}$ での $\in$-モデルとして，T を ZFC* からの帰結からなる $\mathcal{L}$-理論で，$M \models T$ となるものとする．このとき，

(1) φ が，ZFC* の帰結となっている Π^T_1-文なら，$M \models \varphi$ である．

(2) すべての Δ^T_1 な $\mathcal{L}$-論理式 φ は M 上絶対的になる．

---

15) 実際の議論では，M は対の公理を満たすことが多いが，その場合には，変数のブロック $y_0,...,y_{\ell-1}$ は一つの変数で代用できる．

16) ここでも一つまえの脚注と同様に，量化子のブロック $y_0 \cdots \exists y_{k-1}$ または，$y_0 \cdots \exists y_{\ell-1}$ は，多くの場合，一つの量化子で置き換えることができる．

証明．（演習）． ❑ (補題 5.2)

補題 5.2 (2) の非常に有用な応用として，次のものがある: T は ZFC の十分に大きなフラグメントを含んでいるものとする．このとき，T で，集合 x に対する，ある述語 $\Psi(x)$ が，束縛論理式であらわせる性質を用いた帰納法の初めと帰納法のステップによって $\in$ に関する超限帰納法で導入されているとする．このときには，

$$T \vdash \Psi(x) \leftrightarrow \exists u(u \text{ は } \Psi(x) \text{ かどうかを帰納的に確かめるときのプロトコルに}\\ \text{なっていて，これにより } \Psi(x) \text{ が確かめられる })$$

$$T \vdash \Psi(x) \leftrightarrow \forall u(u \text{ が } \Psi(x) \text{ かどうかを帰納的に確かめるときのプロトコルに}\\ \text{なっているなら，これにより } \Psi(x) \text{ が確かめられる })$$

とできるから，$\Psi(x)$ は Δ^T_1 となることがわかり，T のモデルとなっているような，推移的な $\in$-モデル上で，$\Psi(x)$ は，絶対になることがわかる．

ZFC$^-$ で ZFC の公理系から冪集合公理を除いたものを，表わすことにする．

定理 5.3. χ を非可算な正則基数とするとき，$\mathcal{H}(\chi) \models$ ZFC$^-$ が成り立つ． *zfc-*

証明． 以下の証明では，補題 5.1 と，（それまでに $\mathcal{H}(\chi)$ で成り立つことが証明されている ZFC$^-$ の部分体系を T としたときの）補題 5.2 を断わりなく何度も使っていることに注意する．

補題 4.3 により，$\mathcal{H}(\chi)$ は推移的であることに注意する．外延性の公理は，$\Pi^{\emptyset}_1$-論理式だから [17]，補題 5.2, (1) により，$\mathcal{H}(\chi)$ で成り立つ．

[残りは後で書く] ❑ (定理 5.3)

補題 5.4. χ を正則な非可算基数とする． *abs-3*

(1) $a \in \mathcal{H}(\chi)$ とするとき，$\mathcal{H}(\chi) \models$ "$\mathcal{P}(a)$ が存在する" なら，$\mathcal{P}^{\mathcal{H}(\chi)}(a) = \mathcal{P}(a)$ である．特に，$\mathcal{H}(\chi) \models$ "$\mathcal{P}(a)$ が存在する" $\Leftrightarrow$ $2^{|a|} < \chi$ である．

(2) $\gamma \in$ On として，$|V_\gamma| < \chi$ なら，$\mathcal{H}(\chi) \models$ "V_γ は存在する" が成り立ち，$(V_\gamma)^{\mathcal{H}(\chi)} = V_\gamma$ である．

証明． (1): $b \subseteq a$ なら，$trcl(b) \setminus \{b\} \subseteq trcla$ だから，$b \in \mathcal{H}(\chi)$ がわかる．したがって，$\mathcal{H}(\chi) \models c = \mathcal{P}(a)$ なら，$\mathcal{P}(a) \subseteq c \subseteq \mathcal{P}(a)$ である．特に，

$$\mathcal{H}(\chi) \models \text{“}\mathcal{P}(a) \text{ が存在する”} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(a) \in \mathcal{H}(\chi) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{|a|} < \kappa$$

である．

(2): V_γ は推移的だから，$|V_\gamma| < \chi$ なら，$V_\gamma \in \mathcal{H}(\chi)$ で，$\langle V_\xi : \xi \leq \gamma \rangle \in \mathcal{H}(\chi)$ である，$c = \langle V_\xi : \xi \leq \gamma \rangle$ とすると，(1) により，$\mathcal{H}(\chi) \models$ "$c = \langle V_\xi : \xi \leq \gamma \rangle$" となり，$\mathcal{H} \models$ "V_γ が存在する" が言える．特に，$(V_\gamma)^{\mathcal{H}(\chi)} = V_\gamma$ である． ❑ (補題 5.4)

[17] ここでは，$\emptyset$ で空の理論を表している．

定理 5.5. すべての論理式[18] $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ と，基数 κ に対し，正則基数 $\chi > \kappa$ と順序数 γ, $2^{<\kappa} \leq \gamma < \kappa$ で， refl

(5.8) すべての $a_1, ..., a_n \in \mathcal{H}(\kappa)$ に対し， refl-0
$\mathcal{H}(\chi) \models$ “$V_\gamma \models \varphi[a_1, ..., a_n]$” $\Leftrightarrow$ $\varphi(a_1, ..., a_n)$

となるようなものが存在する[19].

証明. Lévy-Montague Absoluteness Theorem と，補題 5.4l,(2) によりよい.

❑ (定理 5.5)

[この節はまだ書きかけです．]

6 初等部分構造の集合論での応用

以上の準備を使うと，与えられた無限組合せ論的な命題 φ の可能な証明方針の一つとして，次のようなものが考えられるようになる: まず正則基数 χ を十分に大きくとり，$\varphi(\cdots)$ でパラメタとしてあらわれる objects がすべて $\mathcal{H}(\chi)$ に含まれ， application

$$\langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle \models \varphi \ \Leftrightarrow \ \varphi \text{ が（本当に）成り立つ}$$

となるようにする[20]．ここで，定理 3.3, あるいは，補題 3.4 などの定理 3.3 の変種を用いて，具合の良い性質を持つ $\langle M, \in \rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ をとり，$\langle M, \in \rangle \models \varphi$ を $\langle M, \in \rangle$ と $\langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ の間を行き来して証明する．この際に，$\mathcal{H}(\chi) \setminus M$ の元を M 上の non-standard analysis における無限小元や無限大元のようなものとして用いることがで

---

[18] ここでの “すべての論理式 φ” での “すべて” は meta-logic での “すべて” である．つまり，定理 5.5 は，一つ一つの具体的な論理式 φ に対する主張をたばねた meta-theorem となっている．

[19] ここでは，“すべての $a_1, ..., a_n \in \mathcal{H}(\chi)$ に対し”，とは言っていないことに注意.

[20] このような χ がとれる，という主張には，多少の補足説明が必要になる．φ がパラメタ $a_0, ..., a_{n-1}$ を持っていて $\varphi = \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ という形をしているとき，このパラメタのリストを拡張して，bounded formula $\psi = \psi(x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$ と $b_0, ..., b_{m-1}$ を選び，$\varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \leftrightarrow \psi(a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1})$ となるようにして，$\psi(a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1})$ を $\varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ のこととして議論をすることにして，$a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1} \in \mathcal{H}(\chi)$ となるような χ をとればよい.

$\psi = \psi(x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1})$ の選び方としては，一般には，定理 5.5 でのように，Lévy-Montague Reflection Theorem を用いて，ある $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$b = V_\alpha$ として，“$b \models \varphi(a_1, ..., a_{n-1})$” $\leftrightarrow \varphi(a_1, ..., a_{n-1})$ とできることを用いればよいが，多くの組合せ論的な命題では，高階構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ..., \mathcal{P}(A), ... \rangle$ で，“$\mathfrak{A} \models \psi$” の形に自然に表現できるので，$A$, $\mathcal{P}(A)$, etc をパラメタに加えることで，φ の，より自然な変形で，上のような ψ を得ることができる.

以下，(φ を調節して) χ を適当にとることを，単に「χ を十分に大きくとる」と表現することにする.

きる．$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ だから，$\langle M, \in\rangle \models \varphi$ から $\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle \models \varphi$ が帰結でき，さらに χ のとり方から φ が本当に成り立つことが，これから帰結できる．

上のような証明方針の例の一つとして，Δ-レンマと呼ばれる次の定理の証明を見てみよう．

定理 6.1. (Δ-レンマ)　κ を非可算な正則基数として，$\langle a_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ を有限集合の *delta-lemma*
列とする．このとき，濃度 κ の集合 $X \subseteq \kappa$ と集合 r で，すべての異なる $\alpha, \beta \in X$ に対し，$a_\alpha \cap a_\beta = r$ が成り立つようなものが存在する．

証明. $|\bigcup\{a_\alpha : \alpha \in \kappa\}| = \kappa$ だから，一般性を失うことなく，各 $\alpha < \kappa$ に対し $a_\alpha \subseteq \kappa$ となっているとしてよい．χ を十分に大きくとって，$\langle a_\alpha : \alpha < \kappa\rangle \in \mathcal{H}(\chi)$ となるようにする．特にこのことから，$\kappa \in \mathcal{H}(\chi)$ $\kappa \subseteq \mathcal{H}(\chi)$, etc. となる．補題 3.4 により，$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で，$\langle a_\alpha : \alpha < \kappa\rangle \in M$ かつ $M \cap \kappa$ はある順序数 $\alpha_0 < \kappa$ となっているようなものが存在する．$r = a_{\alpha_0} \cap \alpha_0$ とする．このとき $r \subseteq M$ で r は有限だから，補題 4.5(a) により，$r \in M$ である．$\langle M, \in\rangle \models$ “κ は基数” だから，α_0 は極限順序数になっているので，$\alpha_1 < \alpha_0$ で $r \subseteq \alpha_1$ となるものが存在する．すべての $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$ に対し，$\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle \models (\exists \beta < \kappa)(a_\beta \cap \alpha = r)$ が成り立つ（a_{α_0} がそのようなものになっている）から，$\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ により，$\langle M, \in\rangle \models (\exists \beta < \kappa)(a_\beta \cap \alpha = r)$ となる．したがって，$\langle M, \in\rangle \models (\alpha_1 < \forall \alpha < \kappa)(\exists \beta < \kappa)(a_\beta \cap \alpha = r)$ となるから，再び $\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ により，

$$\langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle \models (\alpha_1 < \forall \alpha < \kappa)(\exists \beta < \kappa)(a_\beta \cap \alpha = r)$$

がわかる．したがって，上昇列 $\alpha^*_\xi \in \kappa, \xi < \kappa$ を，

(6.1)　$a_{\alpha^*_\xi} \cap \alpha^*_\xi = r;$ appl-0

(6.2)　$\alpha^*_\xi \geq \sup\{\sup(a_{\alpha^*_\eta}) + 1 : \eta < \xi\}$ appl-1

となるようにとることができる．この r と $X = \{\alpha^*_\xi : \xi < \kappa\}$ は，明らかに，定理での性質を満たす．　❏ (定理 6.1)

上に与えた証明の利点の一つは，Δ-レンマの様々な拡張を同様の証明で示すことができることである．次にそのようなものの一つを示すが，そのためにさらに用語を導入する: κ, λ を基数として，$\kappa \leq \lambda$ で，κ は正則基数であるとする．このとき，$X \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ が **定常** (*stationary*) であるとは，すべての closed unbounded な $C \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ に対し，$X \cap C \neq \emptyset$ が成り立つこと．$X \subseteq \kappa$ が 定常であるとは，X が $[\kappa]^{<\kappa}$ の部分集合として，定常であることとする．$X \subseteq \kappa$ が定常となるのは，任意の closed unbounded な $C \subseteq \kappa$ ($\subseteq [\kappa]^{<\kappa}$) に対し，$X \cap C \neq \emptyset$ となることと同値であることが容易に示せる（演習）．$X \subseteq \kappa$ が定常なら $|X| = \kappa$ となることも容易に示せるから，次の定理は，定理 6.1 の拡張となっている:

定理 6.2. κ を非可算な正則基数として，$\langle a_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ を有限集合の列とする．このとき，定常な κ の部分集合 X と有限集合 r で，すべての異なる $\alpha, \beta \in X$ に対し，$a_\alpha \cap a_\beta = r$ が成り立つようなものが存在する． *delta-lemma-x*

証明． 定理 6.1 と同じように証明を進めて，$\langle \alpha^*_\xi : \xi < \kappa \rangle$ をとるところで，$\langle \alpha^*_\xi : \xi < \kappa \rangle$ は定理 6.1 の証明の条件 (6.1), (6.2) の他に，

(6.3) α^*_ξ は (6.1) と (6.2) を満たすようなもののうち最小のものとなっている appl-2

という条件も満たしているとする．このような $\langle \alpha^*_\xi : \xi < \kappa \rangle$ が存在することを主張する論理式は $\mathcal{H}(\chi)$ で成り立つから，$\langle M, \in \rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ により，性質 (6.1), (6.2), (6.3) を満たす M の元が存在することがわかる．したがって最初から $\langle \alpha^*_\xi : \xi < \kappa \rangle \in M$ となっているとしてよい．このとき，(6.3) により，$\alpha^*_{\alpha_0}$ は α_0 となることに注意する．$C \subseteq \kappa$ が closed unbounded で $C \in M$ なら，$C \cap \alpha_0$ は α_0 で unbounded となり，したがって C が closed であることから，$\alpha_0 \in C$ がわかる．一方上の注意により $\alpha_0 \in X = \{\alpha^*_\xi : \xi < \kappa\}$ だから，$\langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle \models C \cap X \neq \emptyset$ となり，$\langle M, \in \rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ により，$\langle M, \in \rangle \models C \cap X \neq \emptyset$ がわかる．したがって，

$$\langle M, \in \rangle \models \text{“}X \text{ は } \kappa \text{ の定常な部分集合”}$$

となるが，ふたたび $\langle M, \in \rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ により，このことから，

$$\langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle \models \text{“}X \text{ は } \kappa \text{ の定常な部分集合”}$$

がわかり，χ が十分に大きくとってあったことから[21)]，X は本当に κ の定常な部分集合となっていることが帰結できる． ❑ (定理 6.2)

次の補題でのような M を用いると，Δ-レンマのさらなる拡張である以下の定理 6.4 の証明が，定理 6.2 の証明と全く同様に行える:

補題 6.3. κ を無限基数として，λ を正則基数で，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$|\,[\alpha]^{<\kappa}\,| < \lambda$ が成り立つようなものとする．十分大きな正則基数 χ と $a \in [\mathcal{H}(\chi)]^{<\lambda}$ に対し，$\langle M, \in \rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ で， *el-sub-x*

(6.4) $|\,M\,| < \lambda$; *el-sub-0*

(6.5) $a \subseteq M$; *el-sub-1*

(6.6) $\lambda \cap M \in \lambda$; *el-sub-2*

(6.7) $[M]^{<\kappa} \subseteq M$, *el-sub-3*

---

21)例えば $\chi > 2^\kappa$ とすると，$\mathcal{P}(\kappa) \in \mathcal{H}(\chi)$ とできてここでの議論がうまく行なえる．

を満たすものが存在する．

証明． $\delta_0 = \max\{\kappa, |\,a\,|\}$ として，

$$\delta = \begin{cases} \delta_0, & \mathrm{cf}(\delta_0) \geq \kappa \text{ のとき} \\ {\delta_0}^+, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

とする．

(6.8) $\quad \delta < \lambda$ かつ $\mathrm{cf}(\delta) \geq \kappa$ appl-3

となることに注意する．

$\langle \mathcal{H}(\chi), \in \rangle$ の初等的部分モデルの連続な上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ をうまく定義して，$M = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$ が求めるようなものになるようにする．このためには，次の (6.9) ～ (6.12) が成り立つように M_α, $\alpha < \delta$ を選べばよい:

(6.9) $\quad$ すべての $\alpha < \delta$ に対し $|\,M_\alpha\,| < \lambda$; el-sub-x-0

(6.10) $\quad a \subseteq M_0$; el-sub-x-1

(6.11) $\quad \sup(M_\alpha \cap \lambda) \subseteq M_{\alpha+1}$; el-sub-x-2

(6.12) $\quad [M_\alpha]^{<\kappa} \subseteq M_{\alpha+1}$. el-sub-x-3

(6.10) （と (6.9)）は δ の定義から可能である．(6.11) と (6.12) は補題 3.4 により，((6.9) のもとで）可能である．

(6.9) と (6.8) により， M は (6.4) を満たす．(6.10) により，M は (6.5) を満たす．(6.11) により，M は (6.6) を満たす．(6.12) と (6.8) により，M は (6.7) を満たす． ❑ (補題 6.3)

定理 6.4. (Δ-レンマの拡張版) κ を無限基数として，λ を正則基数で，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$|\,[\alpha]^{<\kappa}\,| < \lambda$ が成り立つようなものとする．$\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を濃度が κ 未満の集合の列とするとき，定常な $S \subseteq \lambda$ と濃度が κ 未満の集合 r で，すべての $\alpha, \beta \in S, \alpha \neq \beta$ に対し， $a_\alpha \cap a_\beta = r$ となるようなものが存在する． *delta-lemma-ex*

証明． 演習． ❑ (補題 6.4)

同様の応用例をもう一つ見ておくことにする．このために，まず補題 3.4 をさらに一般化した次の補題を用意しておく．証明は補題 3.4 とまったく同様にできる．

補題 6.5. $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ を $\mathcal{L}$-構造として，$\lambda \subseteq A$, $\kappa \leq \lambda$ は正則基数とする．また $a \in [A]^{<\kappa}$ とする．このとき， *downward-losko-b*

$$\mathcal{C} = \{x \in [\lambda]^{<\kappa} : \mathfrak{B} = (B, ...) \text{ で } \mathfrak{B} \prec \mathfrak{A},\ a \subseteq B,\ B \cap \lambda = x \text{ となるものが存在する}\}$$

は *closed unbounded* な集合を部分集合として含む．

証明. 演習. ❑ (補題 6.5)

定理 6.6. (一般化された Fodor の定理) $\aleph_0 < \kappa \leq \lambda$ で κ は正則基数とする. $A \subseteq [\lambda]^\kappa$ を定常として, $f : A \to \lambda$ を $x \in A$ で $x \neq \emptyset$ なら $f(x) \in x$ が常に成り立つようなものとする. このとき, ある $\beta < \lambda$ に対し, $\{x \in A : f(x) = \beta\}$ は $[\lambda]^{<\kappa}$ の定常な部分集合となる.

証明. そうでないとすると, 各 $\beta \in \lambda$ に対し, closed unbounded な $C_\beta \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ で, $x \in C_\beta \cap A$ なら, $f(x) \neq \beta$ となっているようなものがとれる. χ を十分大きくとる. 補題 6.5 により, $\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で, $\langle C_\beta : \beta < \lambda\rangle, f, ... \in M$, $\lambda \cap M \in A$, $\kappa \in M$ かつ $\kappa \subseteq M$ となるようなものが存在する. このとき, 補題 4.5, (b) により, すべての, $x \in M \cap [\lambda]^{<\kappa}$ に対し, $x \subseteq M$ となる. $\lambda \cap M = \bigcup(M \cap [\lambda]^{<\kappa})$ となるから, この集合を x_0 とすると, $x_0 \in C_\beta$ がすべての $\beta \in \lambda \cap M$ で成り立つ. したがって, $f(x_0) \neq \beta$ がすべての $\beta \in x_0$ で成り立つが, これは f に関する仮定に矛盾する.
❑ (定理 6.6)

7 ω-covering な初等部分構造

$\in$-モデル M が ω-covering であるとは, $[M]^{\aleph_0} \cap M$ が $[M]^{\aleph_0}$ で $\subseteq$ に関して cofinal となることとする. つまり, すべての $a \in [M]^{\aleph_0}$ に対し, 可算な $b \in M$ で, $a \subseteq b$ となるものが存在すること, とする. omega-covering

現在の用語では, この条件は,「M は internally unbounded である」, と表現されることが多い.

$\mathrm{cf}([\kappa]^{\aleph_0}, \subseteq)$ で, $[\kappa]^{\aleph_0}$ の cofinal な部分集合の濃度のうち最小のものを表わすことにする. すべての $n \in \omega \setminus 1$ に対し, $\mathrm{cf}([\aleph_n]^{\aleph_0}, \subseteq) = \aleph_n$ である.

定理 7.1. χ を正則基数として, $\kappa < \chi$ を *P-el-sub-x-0*

(7.1) $\mathrm{cf}([\kappa]^{\aleph_0}, \subseteq) = \kappa$ *x-el-sub-a-0*

となるものとすると, 任意の $S \in [\mathcal{H}(\chi)]^{\leq\kappa}$ に対し, *ω-bounding* な, $\langle M, \in\rangle \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \in\rangle$ で, $S \subseteq M$, $|M| = \kappa$ となるものが, 存在する.

証明. 列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ を, 次が成り立つようにとる:

(7.2) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し, $|M_\alpha| = \kappa$; x-el-sub-0

(7.3) $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ は, $\mathcal{H}(\chi)$ の elementary submodels 初等的連鎖である; x-el-sub-1

(7.4) $S \subseteq M_0$; x-el-sub-2

(7.5) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し, $[M_\alpha]^{\aleph_0} \cap M_{\alpha+1}$ は $[M_\alpha]^{\aleph_0}$ で ($\subseteq$ に関して) cofinal. x-el-sub-3

このような列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ が，とれることは，(7.1), Downward Löwenheim-Skolem 定理 (定理 3.3) と，初等的連鎖定理 (定理 2.6) によりよい．

$M := \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ とすると，M は求めるようなものである:

(7.2) により，$|M| = \kappa$ である．$S \subseteq M$ は，(7.4) により，よい．

(7.3) と系 2.7 により，$M \prec \mathcal{H}(\chi)$ である．

M が ω-bounding であることは，次のようにして示せる: $a \in [M]^{\aleph_0}$ とすると，$a \subseteq M_\alpha$ となる $\alpha < \omega_1$ がとれるが，(7.5) により，$b \in [M_{\alpha+1}]^{\aleph_0} \cap M_{\alpha+1} \subseteq [M]^{\aleph_0} \cap M$ で，$a \subseteq b$ となるものがとれる．

したがって，M は ω-bounding であることがわかる． ❏ (定理 7.1)

補題 7.2. χ を，正則基数で，$2^{\aleph_0} < \chi$ となるものとする．$\kappa := 2^{\aleph_0}$ とする．このとき，任意の *ω-bounded* な，$M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で，$\kappa \subseteq M$ となるものについて [22]，$[M]^{\aleph_0} \subseteq M$ が成り立つ． *P-el-sub-0*

証明． $a \in [M]^{\aleph_0}$ として，$a \in M$ を示す．M は，ω-bounded だから，$b \in [M]^{\aleph_0} \cap M$ で，$a \subseteq b$ となるものが，存在する．

κ の定義から，

$$\mathcal{H}(\chi) \models \text{“}\kappa \text{ から } \mathcal{P}(b) \text{ への上射が存在する”}$$

が成り立つので，$M \prec \mathcal{H}(\chi)$ により，

$$M \models \text{“}\kappa \text{ から } \mathcal{P}(b) \text{ への上射が存在する”}$$

である．したがって $f^* \in M$, $f : \kappa \to \mathcal{P}(b)$ で，f^* が上射であるようなものが存在する．特に，$f^*(\alpha) = a$ となる $\alpha \in \kappa$ が存在するが，$\kappa \subseteq M$ だから，$\alpha \in M$ で，したがって $a = f^*(\alpha) \in M$ である． ❏ (補題 7.2)

次は，ω-covering な初等部分構造の応用例の一つである．この応用例は，初等部分構造の位相空間論への応用の例ともなっている:

定理 7.3. $X = (X, \tau)$ を可分でない位相空間とする [23]．このとき，X の，濃度 $\aleph_1$ の部分空間 Y で，可分でないものが存在する． *P-prod-7*

証明． まず，$|X| \geq \aleph_1$ となることに注意する．

---

[22] $\kappa (= 2^{\aleph_0})$ は definable だから，$\kappa \in M$ はいずれにしても成り立つことに注意する．

[23] ここでは τ は，位相空間の open base である，と考えている．位相空間 (X, τ) が可分とは，X の可算な稠密部分集合が存在することである．

θ を十分に大きな正則基数で $\langle X, \tau\rangle \in \mathcal{H}(\theta)$ となるものとする．$M \prec \mathcal{H}(\theta)$ を ω-covering (internally unbounded (with respect to countable sets)) で，$\langle X, \tau\rangle \in M$ かつ，$|\,M\,| = \aleph_1$ となるものとする．$Y := X \cap M$ とする．

$|\,Y\,| = \aleph_1$ である． この Y が ($\{O \cap Y : O \in \tau\}$ で生成される位相に関して) 可分でないことを示す: このために，$c \subseteq Y$ を，任意の可算集合とする．$c \subseteq M$ だから，M が ω-covering であることから， 可算集合 $a \in M$ で $c \subseteq a$ となるものがとれる．初等性から，$M \models$ "a is not a dense subset of X" である．したがって，$O \in \tau \cap M$ と $y \in Y$ で，$y \in O$ かつ， $M \models a \cap O = \emptyset$ となるものがとれる． このことから，$a \cap O = \emptyset$ である (初等性から，あるいは，a が可算であることから，$a \subseteq M$ となっていることからよい)．したがって，a は，位相空間 Y の稠密な部分集合でない．したがって，c も，Y の稠密な部分集合でない．

以上で，Y の任意の可算部分集合が，Y で稠密とならないことが示せた．

❑ (補題 7.3)

以下の補題は，定理 7.1 と，補題 7.2 の系と見ることもできるし，定理 7.1 の証明と同様に，容易に直接に示すこともできる．

補題 7.4. κ を基数，χ を正則基数として，$\kappa^{\aleph_0} = \kappa < \chi$ とする．このとき，任意の $S \in [\mathcal{H}(\chi)]^{\leq\kappa}$ に対し，$M \prec \mathcal{H}(\chi)$ で，$S \subseteq M$, $|\,M\,| = \kappa$, $[M]^{\aleph_0} \subseteq M$ となるようなものが存在する． *P-el-sub-1*

❑

$\mathcal{L}^{\aleph_0, II}$ を，次のような monadic weak second order logic とする:

$\mathcal{L}^{\aleph_0, II}$ は，一階の論理の拡張で，first order variables と second order variables を持ち，second order variables は，考察している構造の (台集合の) 可算な部分集合たちの上を走るものとする．通常の二階の論理と同様に，$\mathcal{L}^{\aleph_0, II}$ は built-in な二変数関係記号 ε を持ち，一階の変数 x と， 二階の変数 X の間に，$x\ \varepsilon\ X$ という形の atomic formula を作ることができ，構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ での， この atomic formula の解釈は，$a \in A$ と，$C \in [A]^{\aleph_0}$ に対し，

$$\mathfrak{A} \models x\ \varepsilon\ X\ [a, C]\ \ :\Leftrightarrow\ \ a \in C$$

として定義する．

$\mathcal{L}^{\aleph_0, II}$ は，second order variables の $\exists$ (と，その dual $\forall$) による quantification を許すものとし，$x_0, ..., x_{m-1}$ を，一階の変数，X, $X_1, ..., X_n$ を，二階の変数として，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{m-1}, X, X_1, ..., X_n)$ を，$\mathcal{L}^{\aleph_0}_{cof}$ の論理式とするとき，構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$, $a_0, ..., a_{m-1} \in A$ と，$C_1, ..., C_n \in [A]^{\aleph_0}$ に対し，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \exists X \varphi[a_0, ..., a_{m-1}, C_1, ..., C_n]\\ &:\Leftrightarrow\ \ C \in [A]^{\aleph_0}\ \text{で，}\ \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{m-1}, C, C_1, ..., C_n]\ \text{となるものが存在する．}\end{aligned}$$

とする．一階の論理演算記号に対しては，通常のやり方で semantics を定義する．

ある (可算な) 言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, ...\rangle$ を $\mathcal{L}$-構造とするとき，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の弱い意味での $\mathcal{L}^{\aleph_0,II}$-初等部分構造である (記号: $\mathfrak{A} \prec^{-}_{\mathcal{L}^{\aleph_0,II}} \mathfrak{B}$) とは，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ の部分構造) で，任意の，二階の自由変数を持たない $\mathcal{L}^{\aleph_0,II}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と，$a_0, ..., a_{n-1} \in A$ に対し，

$$(7.6) \quad \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}] \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ..., a_{n-1}]$$ x-el-sub-3-0

が成り立つこと，とする．“弱い意味” と言っているのは二階のパラメタを考えないからである．(7.6) で，2 階の自由変数も持つ論理式について，2 階のパラメタ ($\in [A]^{\aleph_0}$) も含めたものが成り立つときには，$\mathfrak{A} \prec_{\mathcal{L}^{\aleph_0,II}} \mathfrak{B}$ と書くことにする．

次の定理は，連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ が，$L^{\aleph_0,II}$ に関する Downward Löwnheim-Skolem 定理の reflection point として，特徴付けられることを示している．

定理 7.5. 任意の可算な言語を持つ構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{B} \prec_{\mathcal{L}^{\aleph_0,II}} \mathfrak{A}$ でサイズが $\leq 2^{\aleph_0}$ となるものが存在する．ここでの “$\leq 2^{\aleph_0}$” はオプティマルである． *P-el-sub-2*

証明. (定理の主張が成り立つなら) “$\leq 2^{\aleph_0}$” が，オプティマルであることは，次のような構造を考えると，わかる:

$$(7.7) \qquad \mathfrak{A} := \langle \mathcal{P}(\omega), \underbrace{\omega}_{1\text{ 変数関係}}, \overbrace{\in}^{2\text{ 項関係}} \rangle.$$

容易に分かるように，$\mathfrak{B} \prec^{-}_{\mathcal{L}^{\aleph_0,II}} \mathfrak{A}$ なら，$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ である[24)]．

定理の主張を示すために，$\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ を，可算な言語を持つ任意の構造とする．χ を十分に大きな正則基数とする．特に，$\mathfrak{A}, [A]^{\aleph_0} \in \mathcal{H}(\chi)$ となるものとする．

$$(7.8) \quad M \prec \mathcal{H}(\chi)$$ x-el-sub-4

を，

$$(7.9) \quad |\, M \,| = 2^{\aleph_0},$$ x-el-sub-4-0

$$(7.10) \quad \mathfrak{A} \in M,$$ x-el-sub-4-1

$$(7.11) \quad [M]^{\aleph_0} \subseteq M$$ x-el-sub-5

---

24) $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ なら，$\underline{\omega}^{\mathfrak{B}} = \omega$ となることに注意して，論理式 $\forall X\,(\text{“}X \subseteq \underline{\omega}\text{”} \rightarrow \exists x \forall y\,(y \,\underline{\in}\, x \leftrightarrow y \,\varepsilon\, X))$ に留意する．ただし，$\underline{\omega}$, $\underline{\in}$ は，それぞれ，$\mathfrak{A}$ での ω と $\in$ に対応する関係記号とする．また，“$X \subseteq \underline{\omega}$” は，論理式，$\forall x\,(x \,\varepsilon\, X \rightarrow x \,\underline{\in}\, \underline{\omega})$ である．

となるようなものとする．このようなものがとれることは補題 7.4 により，よい．

$B = A \cap M$ とすると，$\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \restriction B$ が求めるようなものである．$|\,B\,| \leq 2^{\aleph_0}$ となることは，(7.9) により，よい．

(7.8) と，定理 5.3 により

$$(7.12) \quad M \models \mathrm{ZFC}^{-}$$ x-el-sub-6

である．

すべての $L^{\aleph_2, II}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., X_0, ...,)$, $a_0, ... \in B$, $C_0, ... \in [B]^{\aleph_0}$ に対し，

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ..., C_0, ...] \ \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{(7.10), (7.11), (7.12) を用いて } \varphi \text{ に関する帰納法で示す}} \ M \models \text{“}\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., C_0, ...]\text{”}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(7.8) による}} \ \mathcal{H}(\chi) \models \text{“}\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., C_0, ...]\text{”} \ \underbrace{\Leftrightarrow}_{\chi \text{ が十分に大きいことによる}} \ \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., C_0, ...]$$

となることから，$\mathfrak{B} \prec_{\mathcal{L}^{\aleph_0, II}} \mathfrak{A}$ が，従う． ❏ (定理 7.5)

8 Fodor-type Reflection Principle とその拡張

最後に，筆者の最近の研究での初等部分構造の応用を紹介する． FRP

正則基数 κ に対し，Fodor-type Reflection Principle for κ (記法: FRP(κ)) を，次のような（集合論の）公理とする:

FRP(κ): すべての定常な $S \subseteq E^{\kappa}_{\omega} = \{\alpha < \kappa \,:\, \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ と写像 $g : S \to [\kappa]^{\leq \aleph_0}$ に対して，$I \in [\kappa]^{\aleph_1}$ で，次を満たすものが存在する:

(8.1) $\mathrm{cf}(I) = \omega_1$; c-0

(8.2) すべての $\alpha \in I \cap S$ に対し，$g(\alpha) \subseteq I$; c-1

(8.3) $f : S \cap I \to \kappa$ で $f(\alpha) \in g(\alpha) \cap \alpha$ がすべての $\alpha \in S \cap I$ に対して成り立つようなものに対し，$\xi^* < \kappa$ で， $f^{-1}{}''\{\xi^*\}$ が $sup(I)$ で定常になるものが存在する． c-2

FRP(κ) がすべての正則基数 $\kappa \geq \aleph_2$ で成り立つという主張を Fodor-type Reflection Principle (FRP) と呼ぶことにする．

FRP は，$[\kappa]^{\aleph_0}$ の定常集合 S の定常性が常に共終数 ω_1 で濃度 $\aleph_1$ の κ の部分集合 I に reflect する（つまり $S \cap [I]^{\aleph_0}$ が $[I]^{\aleph_0}$ で定常になる）ことを主張する反映原理 RP から導かれる ([7])．反映原理の数学的な応用では，RP を（少なくとも見掛け上）さらに強めた Axiom R が用いられることが多かった．FRP は RP や Axiom R より

本質的に弱い公理で，たとえば，ccc p.o.-set による強制拡大で保存されることが知られている（[7]）．特に，このことから，FRP は，連続体のサイズに何ら制限を課さないことが，わかるが，これに対して，RP からは $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ が導かれる（Todorcevic, [10] を参照）．

Axiom R からの帰結として既に知られていた数学的な反映原理の多くは，実は ZFC 上 FRP と同値になることが示されている（[7], [8]）．

たとえば，次の主張 (8.4) は ZFC 上 FRP と同値である．

(8.4)　すべての局所コンパクトな位相空間 X について，X のすべての濃度 $\leq \aleph_1$ の部分空間が距離付け可能なら，X 自身も距離付け可能である． refl-1

Axiom R のもとで知られていた，いくつかの反映原理の証明は，FRP(κ) では十分でないように見える．そのような証明では，次のような FRP(κ) の変形が必要になることがある:

FRP^R(κ):　すべての定常な $S \subseteq E^\kappa_\omega = \{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ と写像 $g : S \to [\kappa]^{\leq\aleph_0}$ に対して，ω_1-club な $\mathcal{C} \subseteq [\kappa]^{\aleph_1}$ が与えられたとき，$I \in \mathcal{C}$ で (8.1), (8.2), (8.3) を満たすものが存在する．

定理 8.1. κ を正則基数で，

(8.5)　すべての $\lambda < \kappa$ に対し，　$\mathrm{cf}([\lambda]^{\aleph_0}, \subseteq) < \kappa$ *frp-0*

が成り立つようなものとする．このとき，FRP(κ) $\Leftrightarrow$ FRP^R(κ) が成り立つ．

証明． [後で書く．]　❑ (定理 8.1)

9　さらに勉強を進めたい人のために

より詳しい議論や，初等部分モデルの他の応用例については，たとえば [2] や [3] なども参照されたい．なお，本講義とほぼ同じ時期にハンガリー科学アカデミー・レニ数学研究所の Lajos Soukup 氏も elementary substructures に関する集中講義を行なっており，彼の lecture note もどこかで入手可能になると思う． further

初等的部分構造の一般論を含むモデル理論の標準的な入門書としては，[1] があげられる．[10], [11] は集合論の標準的な教科書である．

初等的部分構造は proper forcing とよばれる強制法での近代的な理論で縦横に用いられることになるが，この理論の入門としては，[9] なども良いであろう．

筆者は 2017 年と 2018 年にカトヴィチェのシレジア大学数学科で強制法と反復強制法の講義を行なったが，その講義録 [4], [5] も参考になると思う．現在，これらの講義録や，2019 年の講義録 [6] などの内容をベースとした教科書を，準備中である (日本語版が最初に出版される予定である)．

参考文献

bibliog

[1] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Hooland, Amsterdam, (1973).

[2] A. Dow, *An introduction to applications of elementary submodels to topology*, Topology Proceedings, 13, 17–72, (1988).

[3] S. Fuchino, *Set-theoretic aspects of nearly projective Boolean algebras*, Appendix in: L. Heindorf and L. Shapiro, *Nearly Projective Boolean Algebras*, Springer lecture note of mathematics 1596, 165–194, (1994).

[4] ———, An outline of independence proofs by forcing, a lecture note of a course given in Katowice, Poland (2017), downloadable as:
https://fuchino.ddo.jp/notes/forcing-outline-katowice-2017.pdf

[5] ———, Iterated forcing, a lecture note of a course given in Katowice, Poland (2018), downloadable as:
`https://fuchino.ddo.jp/notes/iterated-forcing-katowice-2018.pdf`

[6] ———, Axiomatic set theory and the foundation of mathematics, a leture note of courses given in Kobe Japan and Katowice Poland (2019), downloadable as:
`https://fuchino.ddo.jp/kobe/logic-ss2019.pdf`

[7] ———, I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy and T. Usuba, Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizability and meta-Lindelöfness, to appear in Topology and its applications, Vol.157, 8 (2010), 1415–1429.

[8] ———, L. Soukup, H. Sakai and T. Usuba, More about Fodor-type Reflection Principle, preprint.

[9] M. Goldstern, *Tools for your forcing constructions*, in: H. Judah (ed.), *Set Theory of the Reals*, Israel Mathematical Conference Proceedings, 305–360, Bar Ilan University, (1992).

[10] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, Springer (2001/2006).

[11] K. Kunen, *Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, (1980). (日本語訳: ケネス・キューネン著，藤田博司 訳，集合論 — 独立性証明への案内，日本評論社 (2008))