# 1 $\diamondsuit$ と $\clubsuit$

**Proposition 1** $\kappa$ を *regular* $S \subseteq_{stat} \kappa$ として，$\diamondsuit_\kappa(S)$ が成り立つとする．$P$ を $\kappa$-*c.c.* を満たす濃度が $\leq \kappa$ の *p.o.* とするとき，$\Vdash_P$ “$\diamondsuit_\kappa(S)$” が成り立つ．

**Proof** 一般性を失うことなく $P$ の underlying set は $\kappa$ としてよい．$\langle x_\alpha : \alpha \in S\rangle$ を $\kappa \times \kappa$ の subset を guess するような $\diamondsuit_\kappa(S)$-sequence とする．つまり，$x_\alpha \subseteq \alpha \times \alpha$ で，すべての $X \subseteq \kappa \times \kappa$ に対し，$\{\alpha \in S : X \cap (\alpha \times \alpha) = x_\alpha\}$ は stationary になるようなものとする．各 $x_\alpha$ は $\alpha$ の subset の $P$-name $\dot{x}_\alpha = \{\langle \check{\alpha}, p\rangle : \langle \alpha, p\rangle \in x_\alpha\}$ と同一視できる．

以下で，$\Vdash_P$ “$\langle \dot{x}_\alpha : \alpha \in S\rangle$ is a $\diamondsuit_\kappa(S)$-sequence” を示す．

$\dot{X}$ を $\kappa$ の subset の $P$-name とする．$\dot{X} \subseteq \{\langle \check{\alpha}, p\rangle : \alpha \in \kappa, p \in P\}$ で，各 $\alpha \in \kappa$ に対し，$\{p \in P : \langle \check{\alpha}, p\rangle \in \dot{X}\}$ は pairwise incompatible となっているとしてよい．$P$ は $\kappa$-c.c. を満たすことから，この集合は濃度 $< \kappa$ を持つ．$\dot{C}$ を $\kappa$ の club subset の $P$-name とすると，$P$ は $\kappa$-c.c. だから，club set $C \subseteq \kappa$ で $\Vdash_P$ “$C \subseteq \dot{C}$” となるものが存在する．$\alpha \in C$ で，$\Vdash_P$ “$\dot{x}_\alpha = \dot{X} \cap \alpha$” となるものが存在することが示せれ十分である．$X = \{\langle \alpha, p\rangle : \langle \check{\alpha}, p\rangle \in \dot{X}\}$ とする．

$$D = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha \forall \gamma < \kappa \Big( \langle \beta, \gamma\rangle \in X \ \rightarrow \ \gamma < \alpha \Big)\}$$

とすると，$D$ は $\kappa$ の club subset となる．$\alpha \in C \cap D \cap S$ を $x_\alpha = X \cap (\alpha \times \alpha)$ となるようにとれば，$\Vdash_P$ “$\dot{x}_\alpha = \dot{X} \cap \alpha$” である． ❑ (Proposition 1)

## 2 Lebesque Density Theorem

Let $\sigma : \omega \to \omega \setminus 2$ and $X = \prod_{i\in\omega} 2^{\sigma(i)}$. Let $S = \bigcup_{n\in\omega} \prod_{i\le n} 2^{\sigma(i)}$. For $s \in S$, $[s] = \{f \in X : s \subseteq f\}$. $X$ can be seen as the topological space with basic open sets $[s]$, $s \in S$. For $s \in S$, let

$$m_x([s]) = \prod_{i<\mathrm{dom}(s)} \frac{1}{\sigma(i)}.$$

$m_X$ extends uniquely to a measure on $Borel(X)$ which we shall also call $m_X$. Let

$$Null(X) = \{N \subseteq X : N \subseteq U \text{ for some } U \in Borel(X) \text{ with } m_X(U) = 0\}.$$

We can easily show:

$$Null(X) = \{N \subseteq X : \forall \varepsilon > 0\ \exists U \in Open(X)\ (N \subseteq U\ \wedge\ m_X(U) < \varepsilon)\}$$

Let

$$\mathcal{L}_{(X)} = \{U \triangle N : U \in Borel(X) \text{ and } N \in Null(X)\}.$$

Then

$$\mathcal{L}_{(X)} = \{V \subseteq X : m^*_X(V) = {}_*m_X(V)\}$$

[ show that both sets are $\sigma$-subalgebra of $\mathcal{P}(X)$ generated from $Borel(X) \cup Null(X)$. ]

The measure $m_X$ can be uniquely extended to a measure on $\mathcal{L}_{(X)}$ by

$$m_X(U \triangle N) = m_X(U)$$

for $U \in Borel(X)$ and $N \in Null(X)$.

For $E \in \mathcal{L}_{(X)}$ and $f \in X$, let

$$d_E(f) = \liminf_{k\to\infty} \frac{m_X(E \cap [f\restriction k])}{m_X([f\restriction k])}$$

and

$$\phi(E) = \{f \in X : d_E(f) = 1\}.$$

**Theorem 2** (Lebesque Density Theorem) *For an $E \in \mathcal{L}_{(X)}$, $E \triangle \phi(E)$ is a nullset.*

**Proof** First, note that $\phi(E) \setminus E \subseteq (X \setminus E) \setminus (\phi(X \setminus E))$
$[x \in \phi(E) \setminus E \Rightarrow x \in X \wedge d_E(x) = 1 \wedge x \notin E \Rightarrow x \in X \setminus E \wedge d_{X\setminus E}(x) \neq 1]$
Hence it is enough to show that $E \setminus \phi(E)$ is a nullset for every $E \in \mathcal{L}_{(X)}$.

For $1 > \varepsilon > 0$, let

$$\phi_\varepsilon(E) = \{x \in E : d_E(f) < 1 - \varepsilon\}.$$

Then

$$E \setminus \phi(E) = \bigcup_{n\ge 1} \phi_{\frac{1}{n}}(E).$$

Thus it is enough to show that each $\phi_\varepsilon(E)$ is a nullset.

Suppose not. Then for some $0 < \varepsilon < 1$,

$$m^*_X(\phi_\varepsilon(E)) = \inf\{m_X(G) : G \subseteq_{open} X,\ \phi_\varepsilon(E) \subseteq G\} > 0\,.$$

Let $G^* \subseteq_{open} X$ be such that $\phi_\varepsilon(E) \subseteq G^*$ and

$$m_X(G^*) < \frac{m^*_X(\phi_\varepsilon(E))}{1-\varepsilon}.$$

Let

$$\mathcal{E} = \{[s] : s \in S,\ [s] \subseteq G^*,\ m_X(E \cap [s]) \leq (1-\varepsilon)\cdot m_X([s])\}.$$

**Claim 2.1** (i) *For any $x \in \phi_\varepsilon(E)$ and $\delta > 0$, there is a $[s] \in \mathcal{E}$ such that $x \in [s]$ and $m_X([s]) < \delta$.*

(ii) *If $[s_n] \in \mathcal{E}$, $n \in \omega$ are pairwise disjoint, then $m^*_X(\phi_\varepsilon(E) \setminus \bigcup_{n\in\omega}[s_n]) > 0$.*

$\vdash$ (i): $s = x\restriction N$ for large enough $N \in \omega$ will do.

(ii) follows from:

$$\begin{aligned} m^*_X(\phi_\varepsilon(E) \cap \textstyle\bigcup_{n\in\omega}[s_n]) &\leq m_X(E \cap \textstyle\bigcup_{n\in\omega}[s_n]) \\ &\leq (1-\varepsilon)\textstyle\sum_{n\in\omega} m_X([s_n]) \\ &\leq (1-\varepsilon) m_X(G^*) \\ &< (1-\varepsilon)\cdot \frac{m^*(\phi_\varepsilon(E))}{1-\varepsilon} = m^*(\phi_\varepsilon(E)). \end{aligned}$$

$\dashv$ (Claim 2.1)

Now construct a sequence $\langle [s_n] : n \in \omega\rangle$ of elements of $\mathcal{E}$ as follows:

(1) $[s_0] \in \mathcal{E}$ with $\ell(s_0)$ minimal among elements of $\mathcal{E}$.

(2) If $[s_0], \ldots [s_n]$ have been chosen, let

$$\mathcal{E}_n = \{[s] \in \mathcal{E} : [s] \text{ is disjoint from } [s_0] \cup \cdots \cup [s_n]\}.$$

Then $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ by Claim 2.1 (ii) (and (i)). Let $[s_{n+1}] \in \mathcal{E}_n$ be such that $\ell(s_{n+1})$ is mimimal among elements of $\mathcal{E}_n$.

Let $B = \phi_\varepsilon(E) \setminus \bigcup_{n\in\omega}[s_n]$. By Claim 2.1 (ii), $m^*_X(B) > 0$.

Suppose $x \in B$. By Claim 2.1 (i), there is $[s] \in \mathcal{E}$ such that $x \in [s]$.

**Claim 2.2** *There is $n \in \omega$ such that $[s] \cap [s_{n+1}] \neq \emptyset$.*

$\vdash$ Otherwise $[s] \in \mathcal{E}_n$ for all $n \in \omega$. But then $\ell(s_{n+1}) \leq \ell(s)$ for all $n \in \omega$ and $m_X(\bigcup_{n\in\omega}[s_n]) = \infty$. A contradiction. $\dashv$ (Claim 2.2)

Let $n \in \omega$ be minimal such that $[s] \cap [s_n] \neq \emptyset$. Then by minimality of $\ell(s_n)$, we have $s_n \subseteq s$ and hence $x \in [s_n]$. This is a contradiction to $x \notin \bigcup_{n\in\omega}[s_n]$. $\square$ (Theorem 2)

# 3 Random reals

$X = \prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}}$ を discrete spaces の product space と見て，$Borel(X)$ 上の product measure $\mu$ を考える．

$$P = \{p \in Borel(X) : \mu(p) > 0\}$$

を inclusion により p.o. と見たとき，$P$ は random algebra と co-complete になる（つまり $P$ の Boolean algebraic completion は random algebra と同型になる）．

$P$ 上 $M$-generic set $G$ は $\{r\} = \cap G$ となる real $r \in \left(\prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}}\right)^{M[G]}$ に対応する．

**Proposition 3** *$r$ を上の意味で $P$ 上 $M$-generic な real とするとき，$r$ は $\left(\prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}}\right) \cap$ $M$ の各元と eventually different になる．* evdiff

**Proof** $t \in \left(\prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}}\right) \cap M$ と $p \in P$ を任意にとる．$\dot r$ を上のような $r$ の $P$-name とする．このとき $q \le p$ で $q \Vdash_P$ "$t$ and $\dot r$ are eventually different" となるものが存在することを示せばよい．Lebesque Density Theorem により，ある $k_0$ と $s \in \prod_{n\le k_0} 2^{2^{2n}}$ で，

$$(*) \qquad \mu(p \cap [s]) > \frac{1}{2}\mu([s]) = \frac{1}{2}\prod_{n\le k_0} 2^{-2^{2n}}$$

となるものがとれる．ここで

$$\frac{1}{2}\prod_{n\le k_0} 2^{-2^{2n}} \ge 2^{-2^{2k_0+1}}$$

となることに注意する $\left[\sum_{n\le k_0} 2^{2n} + 1 \le 2^{2k_0+1}\right.$ が $k_0$ に関する帰納法で証明できるから，$\left.\frac{1}{2}\prod_{n\le k_0} 2^{-2^{2n}} = \frac{1}{2}2^{-\sum_{n\le k_0} 2^{2n}} \ge 2^{-2^{2k_0+1}}$ となる$\right]$.

このとき，

$$q = \{x \in p : x(n) \ne t(n) \text{ for all } n > k_0\}$$

とすると，

$$q = p \setminus \bigcup_{n>k_0} \left[\{\langle n, t(n)\rangle\}\right]$$

となるが，

$$\mu\Big(\bigcup_{n>k_0} \left[\{\langle n, t(n)\rangle\}\right]\Big) < \sum_{n>k_0} 2^{-2^{2n}} < 2^{-2^{2(k_0+1)-1}} = 2^{-2^{2k_0+1}}$$

だから，$(*)$ とその後の注意により，$\mu(q) > 0$ がわかる．したがって $q \in P$ だが，明らかに $q \Vdash_P$ "$t$ and $\dot r$ are eventually different" となる． □ (Proposition 3)

$\kappa > \lambda$ とする．$E^\kappa_\lambda = \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$ とする．$\lambda$ が正則基数のとき，$E^\kappa_\lambda$ は $\lambda$ の stationary subset となる．

$\clubsuit(E^\kappa_\lambda)$： $\exists \langle x_\alpha : \alpha \in E^\kappa_\lambda\rangle \left[\forall \alpha \in E^\kappa_\lambda\ (x_\alpha \subseteq_{cofinal} \alpha) \wedge \forall X \in [\lambda]^\lambda\ \exists \alpha \in E^\kappa_\lambda\ (x_\alpha \subseteq X)\right]$

とする．また上のような $\langle x_\alpha : \alpha \in E^\kappa_\lambda \rangle$ を $\clubsuit(E^\kappa_\lambda)$-sequence と呼ぶことにする．

generalized reaping number を

$$r(\kappa,\lambda) = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq [\lambda]^\kappa,\ \forall A \subseteq \lambda\ \exists b \in \mathcal{F}\ (b \subseteq A\ \vee\ b \subseteq \lambda \setminus A)\}$$

と定義する．

**Fact 4** (1) $\clubsuit(E^\kappa_\lambda)$ が成り立つなら，$r(\kappa,\lambda) \leq \lambda$ である． easy

(2) $r(\kappa,\lambda)$ は第一変数に関して increasing である．

(3) $r(\kappa,\lambda)$ は第二変数に関して decreasing である．

(4) すべての $\lambda \geq \kappa \geq \aleph_0$ に対し，$r(\kappa,\lambda) \geq \kappa^+$ が成り立つ．

**Proof** (1): $\langle x_\alpha : \alpha \in E^\kappa_\lambda \rangle$ を $\clubsuit(E^\kappa_\lambda)$-sequence とすると $\mathcal{F} = \{x_\alpha : \alpha \in E^\kappa_\lambda\}$ は濃度 $\lambda$ で，$r(\kappa,\lambda)$ の定義でのようなものとなっている．

(2): $\lambda \geq \kappa \geq \kappa'$ とする．$\mathcal{F} \subseteq [\lambda]^\kappa$ を $r(\kappa,\lambda)$ の witness として，$\mu = |\mathcal{F}| = r(\kappa,\lambda)$ とする．各 $b \in \mathcal{F}$ に対し，$c_b \in [\lambda]^{\kappa'}$ を $c_b \subseteq b$ となるように選ぶ．$\mathcal{F}' = \{c_b : b \in \mathcal{F}\}$ とすると，$\mathcal{F}'$ は $r(\kappa,\lambda) \leq \mu$ の witness となる．

(3): $\lambda \geq \lambda' \geq \kappa$ とする．$\mathcal{F} \subseteq [\lambda']^\kappa$ を $r(\kappa,\lambda)$ の witness として，$\mu = |\mathcal{F}| = r(\kappa,\lambda')$ とする．このとき，$\mathcal{F}$ は $r(\kappa,\lambda) \leq \mu$ の witness となっている．

(4): Diagonal argument. □(Fact 4)

**Theorem 5** (J. Brendle) $\lambda \geq \kappa > \aleph_0$ に対し，$r(\kappa,\lambda) \geq cov(null)$ が成り立つ． joerg

**Corollary 6** $\lambda > \kappa > \aleph_0$ で $\lambda$ は正則基数とする，$cov(null)$ が $\lambda$ より真に大きいとする．このとき $r(\kappa,\lambda)$ も $\lambda$ より真に大きくなる．特に $\neg\clubsuit(E^\kappa_\lambda)$ となる．

**Proof** 後半は Fact 4 からよい． □(Corollary 6)

**Proof of Theorem 5:** Fact 4(2) により，

すべての $\lambda > \aleph_0$ に対し，$r(\aleph_1,\lambda) \geq cov(null)$ となる．

を示せばよい．このために，ある $\lambda > \aleph_0$ に対し，$r(\aleph_1,\lambda) < cov(null)$ となったと仮定して矛盾を導く．$\lambda > \aleph_0$ をこのようなもののうち最小のものとする．このとき，$r(\aleph_1,\lambda) \geq \lambda$ となる：$\mu = r(\aleph_1,\lambda)$ とする．Fact 4(4) により，$\mu > \aleph_1$ である．もし $r(\aleph_1,\lambda) < \lambda$ だったとすれば，$\mathcal{F}$ を $r(\aleph_1,\lambda)$ の witness とすれば，$S = \bigcup \mathcal{F}$ として，$\mathcal{F}$ は $r(\aleph_1,S)$ の witness でもある．$|S| = \mu$ だから，Fact 4(3) により，$r(\aleph_1,\mu) = r(\aleph_1,S) \leq r(\aleph_1,\lambda) < cov(null)$ となり $\lambda$ の最小性に矛盾する．

$\mathcal{F} \subseteq [\lambda]^{\aleph_1}$ を $r(\aleph_1,\lambda)$ の witness とする．$|\mathcal{F}| = r(\aleph_1,\lambda)$ である．$\mathcal{F}$ の各元は odertype $\omega_1$ を持つとしてよい．$|\mathcal{F}|, \lambda < cov(null)$ だから，$\chi$ を十分に大きくとって，$M_\alpha \prec \mathcal{H}(\chi)$, $x_\alpha \in \mathcal{H}(\chi)$, $\alpha \leq \lambda$ を次を満たすようにとれる．

$$P = Borel(\prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}}) \setminus Null(\prod_{n\in\omega} 2^{2^{2n}})$$

とする．

(0) $\mathcal{F} \in M_0$, $\mathcal{F} \subseteq M_0$, $|\mathcal{F}| = |M_0|$;
(1) すべての $\alpha \leq \lambda$ に対し，$\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M_\alpha$. $\alpha < \lambda$ なら，$x_\alpha \in M_{\alpha+1}$;
(2) すべての $\alpha \leq \lambda$ に対し，$x_\alpha$ は $P^{M_\alpha}$ 上 $M_\alpha$-generic.

このとき，$x_\alpha$, $\alpha \leq \lambda$ は互いに eventually different となる ( Proposition 3 を参照 ) .

$M_\lambda[x_\lambda]$ で，

$$A = \{\alpha \in \lambda : \min\{n \in \omega : \forall l > n \ (x_\alpha(l) \neq x_\lambda(l)\} \text{ は偶数 }\}$$

とする . $\dot{A} \in M_\lambda$ を $A$ の $P^{M_\lambda}$-name とする . 各 $\alpha < \lambda$ に対し，$A_\alpha = A \cap \alpha$ とする . $A_\alpha$ は，$\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ と $x_\lambda$ から構成できるから，$A_\alpha \in M_\alpha[x_\lambda]$ である . $\dot{A}_\alpha \in M_\alpha$ を $A_\alpha$ の $P^{M_\alpha}$-name とする .

このとき，次が成り立つことを示すが，これは $\mathcal{F}$ の選び方に矛盾である .

**Claim 5.1** すべての $b \in \mathcal{F}$ に対し，$b \not\subseteq A$ かつ $b \not\subseteq \lambda \setminus A$ である .

$\vdash$ $b \in \mathcal{F}$ をとる . $\gamma = \sup b$ とする . $\gamma \leq \lambda$ であるが，$\mathrm{cf}(\gamma) = \omega_1$ となることに注意する . $M^\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} M_\alpha$ とする . 以下で，

($*$) ある $\alpha^* < \gamma$ に対し，

$$M^\gamma \models \Vdash_P \text{“} b \cap \dot{A}_{\alpha^*} \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\alpha^* \setminus \dot{A}_{\alpha^*}) \neq \emptyset \text{”}$$

となる

ことを示すが，このことから，elementarity により，

$$M_\lambda \models \Vdash_P \text{“} b \cap \dot{A}_{\alpha^*} \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\alpha^* \setminus \dot{A}_{\alpha^*}) \neq \emptyset \text{”}$$

となる . $M_\lambda \models \Vdash_P \text{“} \dot{A}_{\alpha^*} = \dot{A} \cap \alpha \text{”}$ だから，このことから，

$$M_\lambda \models \Vdash_P \text{“} b \cap \dot{A} \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\lambda \setminus \dot{A}) \neq \emptyset \text{”}$$

となることがわかり，$M_\lambda[x_\lambda]$ で — したがって elementarity により $V$ でも — $b \not\subseteq A$ かつ $b \not\subseteq \lambda \setminus A$ となることが帰結される .

($*$) を示すためには $P$ が c.c.c. を満たすことから，次が成り立つことが示せればよい :

($**$) $M^\gamma$ で，すべての $p \in P$ に対し，$q \leq p$ と $\alpha < \gamma$ で，

$$q \Vdash_P \text{“} b \cap \dot{A}_\alpha \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\alpha \setminus \dot{A}_\alpha) \neq \emptyset \text{”}$$

となるものが存在する .

($**$) が示せたとすると，$P^{M^\gamma}$ は外から見たときにも c.c.c. を満たすから ( 測度による議論を外でも行なえる )，

$$\{q \in P^{M^\gamma} : q \Vdash_{P^{M^\gamma}} \text{“} b \cap \dot{A}_\alpha \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\alpha \setminus \dot{A}_\alpha) \neq \emptyset \text{”} \text{ となる } \alpha < \gamma \text{ が存在する }\}$$

の countable subset $S$ で $P^{M^\gamma}$ で predense となるものが存在する . $q \in S$ に対し，$\alpha(q) < \gamma$ を

$$q \Vdash_{P^{M^\gamma}} \text{“} b \cap \dot{A}_{\alpha(q)} \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap (\alpha(q) \setminus \dot{A}_{\alpha(q)}) \neq \emptyset \text{”}$$

となるようにとる．$\mathrm{cf}(\gamma)=\omega_1$ だから，

$$\alpha^*=\sup\{\alpha(q)\,:\,q\in S\}<\gamma$$

である．このとき，$M^\gamma$ で

$$\Vdash_P\text{“}\,b\cap\dot{A}_{\alpha^*}\neq\emptyset\ \wedge\ b\cap(\alpha^*\setminus\dot{A}_{\alpha^*})\neq\emptyset\,\text{”}$$

が成り立つ．

$(**)$ は次のようにして示せる：

$p\in P\cap M^\gamma$ とすると，$\mathrm{cf}(\gamma)=\omega_1$ だから，$\alpha_0\in b$ で $p\in M_{\alpha_0}$ となるものがとれる．$p$ は nullset でないから，$s_0\in S=\bigcup_{n\in\omega}\prod_{l\in n}2^{2^{2l}}$ で，$s_0+x_{\alpha_0}\in p$ となるものがとれる．Lebesque Density Theorem により，$M_{\alpha_0}$ で

$$\Big\{x\in p\,:\,\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(p\cap[x\restriction k])}{\mu([x\restriction k])}\neq 1\Big\}$$

は nullset となる．$s_0+x_{\alpha_0}$ は $M_{\alpha_0}$ 上 random だから，この集合の元でない．したがって，

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(p\cap[(s_0+x_{\alpha_0})\restriction k])}{\mu([(s_0+x_{\alpha_0})\restriction k])}=1$$

となる．よって，十分に大きな $k_0\in\omega$ をとると，

$$(1)\quad \mu(p\cap[(s_0+x_{\alpha_0})\restriction(k_0+1)])>\frac{1}{2}\prod_{n\leq k_0}2^{-2^{2l}}\geq 2^{-2^{2k_0+1}}$$

とできる（最後の不等式については Proposition 3 の証明を参照）．$k_0$ は $|s_0|$ より大きく，奇数であるとしてよい．

$$p_0=\{x\in p\,:\,x(k_0)=x_{\alpha_0}(k_0)\ \wedge\ \forall n>k_0\ [x(n)\neq x_{\alpha_0}(n)]\}$$

とすると $p_0\in Borel(\prod_{n\in\omega}2^{2^{2n}})$ だが，

$$(2)\quad \mu\Big(\Big\{x\in\prod_{n\in\omega}2^{2^{2n}}\,:\,\exists n>k_0[x(n)=x_{\alpha_0}(n)]\Big\}\Big)=\sum_{n>k_0}2^{-2^{2n}}<2^{-2^{2k_0+1}}$$

となるから，(1), (2) により，$\mu(p_0)>0$ となる．したがって $p_0\in P$ である．

同様に $\alpha_1\in b$, $\alpha_0<\alpha_1$ と十分に大きな偶数 $k_1>k_0$ をとって，

$$p_1=\{x\in p_0\,:\,x(k_1)=x_{\alpha_1}(k_1)\ \wedge\ \forall n>k_1\ [x(n)\neq x_{\alpha_1}(n)]\}$$

が $P$ の元になるようにできる．$\alpha=\alpha_1+1$ とすれば，$M_\alpha$ で

$$p_1\Vdash_P\text{“}\,\alpha_1\in\dot{A}_\alpha\ \wedge\ \alpha_0\in(\alpha\setminus\dot{A}_\alpha)\,\text{”}$$

となる．したがって，elementarity から，$\mathcal{H}(\lambda)$ で，したがって $V$ で，

$$p_1\Vdash_P\text{“}\,b\cap\dot{A}_\alpha\neq\emptyset\ \wedge\ b\cap(\alpha\setminus\dot{A}_\alpha)\neq\emptyset\,\text{”}$$

となる． ⊣ (Claim 5.1) ❑ (Theorem 5)

# 4 Real-valued measurable cardinals

**Theorem 7** $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ を *real-valued measurable cardinal* とする．このとき，

(a) $\mathtt{b} \neq \kappa$,

(b) $\mathtt{d} \neq \kappa$.

**Proof** (a): $\mathtt{b} = \kappa$ と仮定して矛盾を導く．$\mathtt{b} = \kappa$ なら，${}^{\omega}\omega$ の $\leq^*$ に関する上昇列 $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ で，すべての $f \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$f_\alpha \not\leq^* f$ となる $\alpha$ がとれるようなもの，つまり，$\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ が ${}^{\omega}\omega$ で $\leq^*$ に関して unbounded となっているようなものが存在する．

$n, k \in \omega$ に対し，

$$A_{n,k} = \{\alpha < \kappa : f_\alpha(n) = k\}$$

とする．$n \in \omega$ を固定すると，すべての $\alpha < \kappa$ に対し $f_\alpha(n) = k$ となる $k \in \omega$ がとれるから，$\kappa = \bigcup_{k\in\omega} A_{n,k}$ となることがわかる．

$\nu$ を $\kappa$ 上の $\kappa$-additive measure とすると，各 $n \in \omega$ に対し，$g(n) \in \omega$ で，

$$\nu\Big(\bigcup_{k\in g(n)} A_{n,k}\Big) \geq 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$$

となるものがとれる．

$$A = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\in g(n)} A_{n,k}$$

とすると，

$$\nu(A) \geq 1 - \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$$

となる．特に，$\nu$ の $\kappa$-additivity から，$|A| = \kappa$ である．$\alpha \in A$ なら，$g$ の定義から，$f_\alpha < g$ となるが，$\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ は $\leq^*$ に関する上昇列だったから，$f_\alpha \leq^* g$ がすべての $\alpha$ に対し成り立つことが結論できる．これは，$\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ が unbounded であることに矛盾である．

(b): (a) でと同様の議論により示せる．$\mathtt{d} = \kappa$ だったとして矛盾を示す．モデルの上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$, $M_\alpha \prec \mathcal{H}(\chi)$ と ${}^{\omega}\omega$ の元の列 $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ を次が成り立つようにとる：

(1) ${}^{\omega}\omega \cap (\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha)$ は $\leq^*$ に関し ${}^{\omega}\omega$ で cofinal,

(2) すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|M_\alpha| < \kappa$,

(3) すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f_\alpha \in M_\alpha$,

(4) すべての $\alpha < \kappa$ と $f \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\alpha$ に対し，$f_\alpha \not\leq^* f$.

上での $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$A_{n,k}$, $n, k \in \omega$, $g : \omega \to \omega$, $A$ を (a) の証明でと同様に定義する．このとき，(1) により，ある $\alpha^* < \kappa$ と $f^* \in M_{\alpha^*}$ で，$g \leq^* f^*$ となるものがとれる．(a) の証明でと同様に $|A| = \kappa$ だから，$\alpha^{**} \in A$ で $\alpha^* < \alpha^{**}$ となるものがとれる．このとき，$g$ と $A$ の定義から，$f_{\alpha^{**}} < g$ となるから，$f_{\alpha^{**}} \leq^* f^*$ である．ところがこれは上の (4) に矛盾である． □ (Theorem 7)

# 5 Squares

次の証明は吉信君におそわったもの：

**Theorem 8** (Solovay) *Suppose that $\kappa$ is a Mahlo cardinal and $\lambda < \kappa$ is a regular uncountable cardinal. For $P = Col(\lambda, < \kappa)$ we have $\Vdash_P$ "$\neg\Box_\lambda$".*

**Proof** Suppose, for contradiction, that there are $p \in P$ and $P$-name $\dot{C}$ such that

$$p \Vdash_P \text{“}\dot{C} \text{ is a } \Box_\lambda\text{-sequence”}.$$

Since $\kappa$ is Mahlo, there is an inaccessible $\lambda < \mu < \kappa$ such that $p \in P' = Col(\lambda, < \mu)$ and

$$p \Vdash_{P'} \text{“}\dot{C}' \text{ is a } \Box_\lambda\text{-sequence”}$$

where $\dot{C}' = \dot{C} \cap V^{P'}$.

Let $G'$ be a $V$-generic set over $P'$ and $G$ a $V$-generic set over $P$ containing $G'$. Let $C' = \dot{C}'^{V[G']}$ and $C = \dot{C}^{V[G]}$. Then

$$V[G] \models \kappa = \lambda^+ \text{ and } C \text{ is a } \Box_\lambda\text{-sequence}$$

and

$$V[G'] \models \mu = \lambda^+ \text{ and } C' \text{ is a } \Box_\lambda\text{-sequence.}$$

Let $C = \{C_\alpha : \alpha \in Lim(\kappa)\}$. We have $C' = \{C_\alpha : \alpha \in Lim(\mu)\}$. In $V[G']$, by Fodor's Lemma, we find a stationary $S \subseteq \mu$ such that $otp(C_\alpha)$ for $\alpha \in S$ are all the same. Now $V[G]$ is obtained as a generic extension of $V[G']$ by a $< \lambda$-closed p.o. Hence $S$ remains stationary in $\mu$. Hence there are $\alpha$, $\alpha' \in S \cap lim(C_\mu)$ with $\alpha < \alpha'$. We have $C_\alpha = C_\mu \cap \alpha$ and $C_{\alpha'} = C_\mu \cap \alpha'$. Hence $C_{\alpha'}$ is a proper endextension of $C_\alpha$. But this is impossible as $otp(C_\alpha) = otp(C_{\alpha'})$. □ (Theorem 8)

# 6 関数の連続性について

**Lemma 9** $f : {}^\omega 2 \to {}^\omega 2$ を *Baire function* とする ( *i.e. open set* の逆像は常に *Baire property* を持つ ) . このとき，*comeager* な $G_\delta$*-set* $P \subseteq {}^\omega 2$ で $f \restriction P$ が連続になるようなものが存在する . baire-function

**Proof** 各 $s \in {}^{\omega>}2$ に対し，$s$ によって定まる基本開集合を $U_s = \{t \in {}^\omega 2 : t \supseteq s\}$ とあらわすことにする . 仮定により，各 $s \in {}^{\omega>}2$ に対し，開集合 $G_s$ で $f^{-1}{}''U_s \triangle G_s$ が meager になるようなものが存在する . 各 $s \in {}^{\omega>}2$ に対し，meager $F_\sigma$-set $Q_s$ を，

$$f^{-1}{}''U_s \triangle G_s \subseteq Q_s$$

となるようにとる .

$$Q = \bigcup_{s \in {}^{\omega>}2} Q_s$$

として，$P = {}^{\omega}2 \setminus Q$ とすると，$P$ は comeager で，

$$P = \bigcap_{s \in {}^{\omega>}2} \underbrace{{}^{\omega}2 \setminus Q_s}_{G_\delta}$$

だから，$P$ は $G_\delta$-set となる．

$f \restriction P$ は連続である： $s \in {}^{\omega>}2$ とすると，$P \cap Q_s = \emptyset$ だから，

$$f^{-1}{}''U_s \cap P = G_s \cap P$$

となるからである． □(Lemma 9)

**Lemma 10** (1) *If $X \subseteq {}^{\omega}2$ is a perfect set and $C \subseteq {}^{\omega}2$ is countable then $X \setminus C$ contains a perfect set.* perfect

(2) *If $X \subseteq {}^{\omega}2$ is comeager then $X$ contains a perfect set.*

**Proof** (1): Let $T \subseteq {}^{\omega>}2$ be an ever branching tree with $[T] = X$. Let $C = \{c_n : n \in \omega\}$. We define $t_s \in T$ for each $s \in {}^{\omega>}2$ by induction on $\ell(s)$ as follows.

Let $t_\emptyset = \emptyset$. Suppose that $t_s \in T$ for all $s \in {}^{n\leq}2$ have been defined. Then, for $s \in {}^{n+1}2$, $t_s \in {}^{\omega>}2$ be such that

(i) $t_s$, $s \in {}^{n+1}2$ are pairewise incompatible;
(ii) $t_s \supseteq t_{s \restriction n}$ for all $s \in {}^{n+1}2$;
(iii) $c_n$ and each of $t_s$, $s \in {}^{n+1}2$ are incompatible.

Let $T' = \{t \in {}^{\omega>}2 : t \subseteq t_s \text{ for some } s \in {}^{\omega>}2\}$. Then $T'$ is ever branching, $T' \subseteq T$ and branches of $T'$ are all different from $c_n$, $n \in \omega$. Thus $X' = [T']$ is a perfect subset of $X \setminus C$.

(2): Let $(N_n)_{n\in\omega}$ be an increasing sequence of nowhere dense subsets of of ${}^{\omega}2$ such that $\bigcup_{n\in\omega} N_n = {}^{\omega}2 \setminus X$. For $s \in {}^{\omega>}2$, let $t_s \in {}^{\omega}2$ be defined inductively as follows:

Let $t_\emptyset = \emptyset$. Suppose that $t_s \in {}^{\omega>}2$ for all $s \in {}^{n\leq}2$ have been defined. Then, for $s \in {}^{n+1}2$, let $t_s \in {}^{\omega>}2$ be such that

(i) $t_s$, $s \in {}^{n+1}2$ are pairewise incompatible;
(ii) $t_s \supseteq t_{s \restriction n}$ for all $s \in {}^{n+1}2$;
(iii) $[t_s] \cap N_n = \emptyset$ for all $s \in {}^{n+1}2$.

The last condition is possible since $N_n$ is nowhere dense. Now let $T = \{t \in {}^{\omega>}2 : t \subseteq t_s \text{ for some } s \in {}^{\omega>}2\}$. Then $T$ is ever branching and $[T] \subseteq X$. □(Lemma 10)

次の定理の証明は，2001 年 7 月 6 日に新幹線で名古屋から新横浜へ移動中に思いついたもの：

**Theorem 11** ((Sierpiński, Zygmund [5])) *There is an $f : \to$ such that, for any $C \in []^{2^{\aleph_0}}$, $f \restriction C$ is not continuous.* sierpinski-zygmund

**Proof** Let $\chi$ be large enough and let $M_\alpha$, $\alpha < 2^\omega$ be an increasing sequence of elementary submodels of $\mathcal{H}(\chi)$, such that $|M_\alpha| < 2^{\aleph_0}$ and $\subseteq \bigcup_{\alpha<2^\omega} M_\alpha$. Let $x_\beta$, $\beta < 2^\omega$ be an enumeration of elements of and

$$m(x_\beta) = \min\{\alpha < 2^\omega : x_\beta \in M_\alpha\}$$

for each $\beta < 2^\omega$.

Let $y_\alpha \in$ and $\gamma(\alpha) < 2^\omega$ for $\alpha < 2^\omega$ be defined inductively such that

(1) $\gamma(\alpha) = \sup(\{m(x_\beta), \gamma(\beta) : \beta < \alpha\} \cup \{m(x_\alpha)\}) + 1$.
(2) $m(y_\alpha) > \gamma(\alpha)$.

We claim that the mapping $f : \to ; x_\alpha \mapsto y_\alpha$ is as desired: Suppose for contradition that for some $C \in []^{2^\omega}$, $f \restriction C$ is continuous. Let $D \subseteq C$ be countable and dense in $C$. Then there is an $\alpha < 2^\omega$ such that $f \restriction D \in M_\alpha$. Let $\alpha^* < 2^\omega$ be such that $\alpha < \alpha^*$ and $x_{\alpha^*} \in C$. As $f \restriction C$ is continuous $y_{\alpha^*} = f(x_{\alpha^*})$ can be calculated from $f \restriction D$ and $x_{\alpha^*}$. Hence we have $y_{\alpha^*} \in M_{\alpha^*}$. But this is a contradiction to (2). □(Theorem 11)

**Corollary 12** (CH) *There is an $f : \to$ such that for any uncountable $A \subseteq$ , $f \restriction A$ is not continuous.* □

Theorem 11 の証明と同様の議論により，次が示せる：

**Theorem 13** (S. Shelah, [3]) $P = \mathrm{Fn}(2^{\aleph_0}, 2)$ とする．このとき，

$\Vdash_P$ “$f : \to$ で，任意の $D \in []^{\aleph_1}$ に対し $f \restriction D$ が連続とならないものが存在する”.

$f : \to$ が ( $^2$ の部分集合として ) analytic (i.e. $\mathbf{\Sigma}^1_1$) なら，$f$ は Baire function となるから ( すべての analytic set は Baire property を持つことに注意 )，Lemma 9 により，comeager な $D \subseteq$ で $f \restriction D$ が連続になるようなものがとれる．この命題は以下のような，“continuous almost uniformization” の存在定理の形に拡張することができる．Theorem 14 の証明は Sonja Thiele の Diplomarbeit [6] でのものである．

**Theorem 14** (Velickovic, [7]) $A \subseteq ({}^\omega 2)^2$ を *analytic* とする．このとき，$C \subseteq \mathrm{dom}(A) = \pi_0(A)$ と[1] ，連続な $f : C \to {}^\omega 2$ で，$\mathrm{dom}(A) \setminus C$ は *meager* かつ $f \subseteq A$ となるものが存在する． analytic

Theorem 14 は，そこでの “analytic” を “closed” に弱めて得られる次の補題から証明できる：

**Lemma 15** $R \subseteq {}^\omega 2 \times {}^\omega\omega$ をとする．このとき，$C \subseteq \mathrm{dom}(R)$ と連続な $f : C \to {}^\omega\omega$ で，$\mathrm{dom}(R) \setminus C$ は *meager* かつ，$f \subseteq R$ となるものが存在する． closed

[1] $\pi_i$ は $i$ 番目の coordinate への projection とする．

**Theorem 14 の Lemma 15 からの証明：** $A \subseteq {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2$ を analytic とする．analytic sets の定義 ( ${}^{\omega}\omega$ の continuous image ) から，連続な $h : {}^{\omega}\omega \to {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}2$ で $h''{}^{\omega}\omega = A$ となるものがとれる．

$$R = \{\langle x, y\rangle \in {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}\omega \ : \ \pi_0 \circ h(y) = x\}$$

とする．$R$ は連続関数 $\pi_0 \circ h$ のグラフを反転させたものだから，closed である．$\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(A)$ となる．

Lemma 15 をこの $R$ に適用して，$C \subseteq \mathrm{dom}(A)$ と連続関数 $g : C \to {}^{\omega}\omega$ で，$\mathrm{dom}(A) \setminus C$ は meager かつ $g \subseteq R$ となるものがとれる．

$$f : C \to {}^{\omega}2;\ x \mapsto \pi_1 \circ h \circ g(x)$$

とする．このとき，$f$ は連続となるが，$f \subseteq A$ である: $\langle x, y\rangle \in f$ とすると，$x \in C \subseteq \mathrm{dom}(A)$ で，$y = \pi_1 \circ h \circ g(x)$ となる．$g \subseteq R$ だったから，$\langle x, g(x)\rangle \in R$ である．したがって，$R$ の定義から，$\pi_0(h(g(x))) = x$ となる．したがって，

$$\langle x, y\rangle = \langle \pi_0(h(g(x))), \pi_1(h(g(x)))\rangle = h(g(x)) \in A$$

となる ( 最後の関係は $h''{}^{\omega}\omega = A$ による )． □ (Theorem 14)

Lemma 15 の証明では次の自明な Fact が用いられることになる：

**Fact 16** $\mathcal{U}$ を $Y \subseteq {}^{\omega}2$ の可算な *covering* で $\mathcal{U}$ の各元は *Baire property* を持つものとする[2] ．このとき，任意の $k > 0$ に対し，$D \subseteq Y$ と *pairwise disjoint* な *basic clopen sets* の族 $\mathcal{O}$ で，

(0) $Y \setminus D$ は *meager;*
(1) 各 $O \in \mathcal{O}$ の直径は $\dfrac{1}{2^k}$ *;*
(2) $\forall O \in \mathcal{O} \exists U \in \mathcal{U}\ \emptyset \neq O \cap D \subseteq U \cap D$
　( つまり，$\mathcal{O}$ は $\mathcal{U}$ の $D$ 上での *refinement* になっている ) *;*
(3) $D \subseteq \bigcup \mathcal{O}$

を満たすものが存在する． □

**Lemma 15 の証明．** ${}^{\omega}2$ の open sets の族の列 $\langle \mathcal{O}_n\rangle_{n\in\omega}$, ${}^{\omega}\omega$ の open sets の族の列 $\langle \mathcal{V}_n\rangle_{n\in\omega}$, ${}^{\omega}2$ の dense $G_\delta$-subsets の列 $\langle D_n\rangle_{n\in\omega}$ および関数列 $g_n : D_n \to {}^{\omega}\omega,\ n \in \omega \setminus \{0\}$) を以下のようにして定義する ( $C = \bigcap_{n\in\omega} D_n$ と $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ が求めるようなものになるようにしたい ):

(0) $D_0 = \mathrm{dom}(R)$ ;

(1) $D_n$ がすでに定義されたとき，$\mathcal{V}_n$ を ${}^{\omega}\omega$ の basic clopen sets で直径が $\leq \dfrac{1}{2^n}$ となるようなものによる covering とする ( 特に $\mathcal{V}_n$ は可算である )．また $n > 0$ のときには，$\mathcal{V} - n$ は $\mathcal{V}_{n-1}$ の refinement になっているものとする．

$$\mathcal{U}_n = \{\pi_0{}''R \cap ({}^{\omega}2 \times V) \ : \ V \in \mathcal{V}_n\} \setminus \{\emptyset\}$$

[2] $U \subseteq X$ が Baire property を持つとは，ある開集合 $O \subseteq X$ と meager set $M \subseteq X$ で，$U = G \triangle M$ となるものがとれること．

とすると，$R$ と $V \in \mathcal{V}_n$ は closed だから，$\mathcal{U}_n$ の各元は analytic となる．とくに $\mathcal{U}_n$ の元はすべて Baire property を持つ．したがって，Fact 16 により，$D_{n+1} \subseteq D_n$ と pairwise disjoint な open sets の族 $\mathcal{O}_n$ で，

(2) $D_n \setminus D_{n+1}$ は meager;
(3) 各 $O \in \mathcal{O}_n$ の直径は $\frac{1}{2^n}$;
(4) $n > 0$ なら $\mathcal{O}_n$ は $\mathcal{O}_{n-1}$ の refinement;
(5) $\forall O \in \mathcal{O}_n \; \exists U \in \mathcal{U}_n \; [\, \emptyset \neq O \cap D_{n+1} \subseteq U \cap D_{n+1} \,]$;
(6) $D_{n+1} \subseteq \bigcup \mathcal{O}_n$

となるものがとれる．(5) により，各 $O \in \mathcal{O}_n$ に対し，$U_O \in \mathcal{U}_n$ で，$O \cap D_{n+1} \subseteq U_O \cap D_{n+1}$ となるものがとれるから，$\mathcal{U}_n$ の定義により，$V_O \in \mathcal{V}_n$ で，

$$O \cap D_{n+1} \subseteq \pi_0{}''(R \cap ({}^{\omega}2 \times V_O))$$

となるものがとれる．各 $O \in \mathcal{O}_n$ に対し，$z_O \in O \cap D_{n+1}$, $x_O \in V_O$ で $\langle z_O, x_O \rangle \in R$ となるものを選び，

$$g_{n+1} = \bigcup \{ (O \cap D_{n+1}) \times \{x_O\} : O \in \mathcal{O}_n \}$$

とおく．$g_{n+1} : D_{n+1} \to {}^{\omega}\omega$ で，$g_{n+1}$ は連続である．

$C = \bigcap_{n \in \omega} D_n$ とおけば，(0) により $C \subseteq \mathrm{dom}(R)$ で (2) により $\mathrm{dom}(R) \setminus C$ は meager となる．

(1) と $g_n,\ n \in \omega \setminus \{0\}$ の定義により，$g_n{\restriction} C,\ n \in \omega \setminus \{0\}$ は各点収束する．$f = \lim_{n \to \infty} g_n{\restriction} C$ とすると $f$ は連続であることも同様に示せる．

$f \subseteq R$ である: $z \in \mathrm{dom}(f)$ とする．各 $n \in \omega$ に対し，$O_n \in \mathcal{O}_n$ で $z \in O_n$ となるものをとると，$\langle z_{O_n}, x_{O_n} \rangle$, $n \in \omega$ は $\langle z, f(z) \rangle$ に収束する $R$ の元の列である．ところが $R$ は closed だったから $\langle z, f(z) \rangle \in R$ がわかる． □ (Lemma 15)

**Corollary 17** *non(meager)* $> \aleph_1$ を仮定する．$A \subseteq {}^{2}$ を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ で $\mathrm{dom}(A)$ は *non-meager* とするとき，*non-meager* な $D \subseteq$ と連続な $g : D \to$ で，$g \subseteq A$ となるものが存在する．

**Proof** Shoenfield の定理 ( [Kanamori-book] の定理 13.14 — 13.13.(f) も参照 ) により，ボレル集合の族 $\langle A_\alpha \rangle_{\alpha < \omega_1}$ で，$A = \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$ となるものがとれる．

$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathrm{dom}(A_\alpha) = \mathrm{dom}(A)$ となるから，*non(meager)* $> \aleph_1$ により，$\alpha^* < \omega_1$ で，$\mathrm{dom}(A_{\alpha^*})$ が non-meager になるようなものがとれる．$A_{\alpha^*}$ は Borel だから，これに Theorem 14 を適用して，$D \subseteq \mathrm{dom}(A_{\alpha^*})$, と連続な $f : D \to$ で，$\mathrm{dom}(A_{\alpha^*}) \setminus D$ は meager で $f \subseteq A$ となるようなものが求まる．このとき $D$ は non-meager である． □ (Corollary 17)

$V = L$ のもとでは，Theorem 11 での $f$ を $\Sigma^1_2$ となるように構成できるので，Corollary 17 は *non(meager)* $> \aleph_1$ の条件なしでは一般には成り立たないことがわかる．

$X \subseteq {}^{\omega}2$ が $\kappa$-Souslin とは，ある木 $T \subseteq \bigcup_{n \in \omega} {}^{n}2 \times {}^{n}\kappa$ で，$X = p[T] = \{x \in {}^{\omega}2 : \exists y \in {}^{\kappa}2 \; \{(x \times y){\restriction} n : n \in \omega\} \subseteq T\}$ となるものが存在すること[3] ．

位相空間 $X$ に対し，$\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\kappa}(X)$ を次の命題とする：

[3] $(x \times y){\restriction} n$ は，ここでは，$\{x{\restriction} m \times y{\restriction} m : m < n\}$ を表す．

$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}(X)$ すべての open partition $[X]^2 = K_0 \dot\cup K_1$ に対し，次のどちらかが成り立つ：

$(0)$ $X$ の perfect な部分集合 $Y$ で 上の partition に関して 0-homogeneous となるものが存在する．

$(1)$ $X$ の 1-homogeneous な部分集合の族 $\langle Y_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ で $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ となるものが存在する ( このときには，$X$ は $\kappa$-1-homogeneous であるということにする )．

ただし，分割 $[X]^2 = K_0 \dot\cup K_1$ が open partition とは，$K_0$ を $X^2$ の symmetric subset と同一視したとき，$K_0$ が $X^2$ の subset として open になっていることを言う．位相空間の族 $\mathcal{S}$ に対し，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}(\mathcal{S})$ を，すべての $X \in \mathcal{S}$ に対し，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}(X)$ が成り立つという命題とし，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}$ をすべての second countable metric space $X$ に対し，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}(X)$ が成り立つこととする．$\kappa < 2^{\aleph_0}$ なら，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}$ から のすべての部分集合は perfect set property を持つことが帰結できるから，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}$ は ZFC と矛盾する．一方 $\mathrm{OCA}_{\aleph_0}^{\mathrm{perfect}}$ は ZF + DC + AD から導かれる．

**Theorem 18** (Qi Feng, [2]) $X \subseteq {}^\omega 2$ が $\kappa$-*Souslin* なら，$\mathrm{OCA}_\kappa^{\mathrm{perfect}}(X)$ が成り立つ． qifeng

**Proof** 木 $T \subseteq \bigcup_{n\in\omega} {}^n 2 \times {}^n\kappa$ が $X = p[T]$ を満たすとする．$[X]^2 = K_0 \dot\cup K_1$ を open partition で，$X$ は この partition に関して，$\kappa$-1-homogeneous でないとする．このとき $X$ の perfect subset で 0-homogeneous になるものが存在することを示す．

$$T' = \{\langle s,t\rangle \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n 2 \times {}^n\kappa : p[T_{\langle s,t\rangle}] \text{ は } \kappa\text{-1-homogeneous でない }\}$$

とする．ただし $T_{\langle s,t\rangle}$ は $\langle s,t\rangle$ と compatible な $T$ の元の全体からなる $T$ の subtree である．$p[T_{\langle s,t\rangle}]$ は $X = p[T]$ の subspace になる．$p[T_{\langle s,t\rangle}]$ が $\kappa$-1-homogeneous でないとは，分割 $[X]^2 = K_0 \dot\cup K_1$ に関する $p[T_{\langle s,t\rangle}]$ の 1-homogeneous subsets を $\kappa$ 個とってきてそれらで，$p[T_{\langle s,t\rangle}]$ が cover できないことである．$T'$ は $T$ の subtree となる．$\langle s,t\rangle \in T'$ に対して，$T'_{\langle s,t\rangle}$ も $T$ の subtree となるから，$p[T'_{\langle s,t\rangle}] \subseteq X$ であることに注意．

**Claim 18.1** すべての $\langle s,t\rangle \in T'$ に対し，$p[T'_{\langle s,t\rangle}]$ は $\kappa$-1-*homogeneous* でない． claim1

$\vdash$ ある $\langle s_0,t_0\rangle \in T'$ に対し，$p[T'_{\langle s_0,t_0\rangle}]$ が $\kappa$-1-homogeneous だったとする．つまり $p[T'_{\langle s_0,t_0\rangle}]$ は $\kappa$ 個の 1-homogeneous sets の和集合となっている．すべての $\langle s,t\rangle \in T_{\langle s_0,t_0\rangle} \setminus T'$ に対し，$T'$ の定義から，$T_{\langle s,t\rangle}$ は $\kappa$ 個の 1-homogeneous subsets の和集合になる．ところが，

$$p[T_{\langle s_0,t_0\rangle}] = p[T'_{\langle s_0,t_0\rangle}] \cup \bigcup \{p[T_{\langle s,t\rangle}] : \langle s,t\rangle \in T_{\langle s_0,t_0\rangle} \setminus T'\}$$

だから，$T_{\langle s_0,t_0\rangle}$ は $\kappa$-1-homogeneous となってしまう．これは $\langle s_0,t_0\rangle \in T'$ に矛盾である．

$\dashv$ (Claim 18.1)

**Claim 18.2** すべての $\langle s,t\rangle \in T'$ に対し，$\langle s_0,t_0\rangle$, $\langle s_1,t_1\rangle \in T'$ で，

(i) $\langle s,t\rangle \le \langle s_0,t_0\rangle, \langle s_1,t_1\rangle$;

(ii) $\langle s_0,t_0\rangle$ と $\langle s_1,t_1\rangle$ は *incompatible;*

(iii) すべての $f \in p[T_{\langle s_0,t_0\rangle}]$ と $g \in p[T_{\langle s_1,t_1\rangle}]$ に対し，$\{f,g\} \in K_0$

を満たすものが存在する．

$\vdash$ Claim 18.1 により，$f_0,\, g_0 \in p[T'_{\langle s,t\rangle}]$ で $\{f_0, g_0\} \in K_0$ となるものがとれる．$u_0,\, v_0 \in {}^{\omega}\kappa$ を，$\langle f_0, u_0\rangle,\, \langle g_0, v_0\rangle \in T'_{\langle s,t\rangle}$ となるものとする．$K_0$ は open だから，$n^* \geq \ell(\langle s,t\rangle)$ で，

$$\{\{f,g\} \in [X]^2 : f \in [f_0{\restriction}\, n^*], g \in [g_0{\restriction}\, n^*]\} \subseteq K_0$$

となるものがとれる．$\langle s_0, t_0\rangle = \langle f_0{\restriction}\, n^*, u_0{\restriction}\, n^*\rangle,\, \langle s_1, t_1\rangle = \langle g_0{\restriction}\, n^*, v_0{\restriction}\, n^*\rangle$ とすれば，これらは求めるようなものになっている． $\dashv$ (Claim 18.2)

$p \in {}^{\omega>}2$ に対し，$\langle s_p, t_p\rangle \in T'$ を帰納的に次を満たすようにとる：

(0) $\langle s_\emptyset, t_\emptyset\rangle \in T'$ は任意にとる；
(1) $\langle s_p, t_p\rangle \leq \langle s_{p\frown 0}, t_{p\frown 0}\rangle,\, \langle s_{p\frown 1}, t_{p\frown 1}\rangle$;
(2) $s_{p\frown 0}$ と $s_{p\frown 1}$ は incompatible;
(3) すべての $f \in p[T'_{\langle s_{p\frown 0}, t_{p\frown 0}\rangle}]$ と $g \in p[T'_{\langle s_{p\frown 1}, t_{p\frown 1}\rangle}]$ に対し，$\{f,g\} \in K_0$.

これは Claim 18.2 により可能である．$T^* = \{\langle s_p, t_p\rangle : p \in {}^{\omega>}2\}$ とすると，$T^*$ は $T$ の subtree だから，$p[T^*] \subseteq p[T] = X$ である．$T^{**} = \{s_p : p \in {}^{\omega>}2\}$ とすると，(1), により，$p[T^*] = [T^{**}]$ となる．(2) により，この集合は perfect で (3) により，0-homogeneous となる． $\square$ (Theorem 18)

**Corollary 19** (a) $\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\aleph_0}(\Sigma^1_1)$; sigma
(b) $\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\aleph_1}(\Sigma^1_2)$.

**Proof** (a): $X \subseteq {}^{\omega}2$ が $\Sigma^1_1$ であることと，$X$ が $\aleph_0$-Souslin であることは同値である．したがって，$X$ が $\Sigma^1_1$ (i.e. analytic) なら，Theorem 18 により，$\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\aleph_0}(X)$ となることが分る．

(b): Shoenfield の定理( 前出 )により，すべての $\Sigma^1_2$-集合 $X$ は $\aleph_1$-Souslin となるから，Theorem 18 により，$\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\aleph_1}(X)$ が成り立つ ( CH のもとでは $\mathrm{OCA}^{\mathrm{perfect}}_{\aleph_1}$ は trivial な命題になることに注意 .) $\square$ (Corollary 19)

**Theorem 20** (a) $f : \to$ が ( $^2$ の部分集合として ) *analytic* なら，*perfect set* $D \subseteq$ で，$f{\restriction}\, D$ が連続な単調関数となるようなものが存在する．
(b) ($\neg$CH) $f : \to$ が $\mathbf{\Sigma}^1_2$ なら，*perfect* な $D \subseteq$ で，$f{\restriction}\, D$ が連続な単調関数となるようなものが存在する．

**Proof** (b) を証明する．(a) の証明は同様．$f : \to$ を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ とすると，Shoenfield の定理により，$f$ は $\aleph_2$-Souslin である．

$$F_0 = \{p \in [f]^2 : p \text{ は} (\ \mathrm{dom}(p) \text{ 上の} ) \text{ 増加関数} \}$$

として，$F_1 = [f]^2 \setminus F_0$ とする．このとき $[f]^2 = F_0 \dot\cup F_1$ は open partition だから，Corollary 19, (b) により，perfect な 0-homogeneous set $X \subseteq f$ が存在するか，または，$f = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ となるような 1-homogeneous sets $X_\alpha$, $\alpha < \omega_1$ が存在する — このときには，一般性を失うことなく，各 $X_\alpha$ は closed set としてよい．

前者の場合には，$F_0$ の定義から，$X$ は単調増加関数となる．

後者の場合には，¬CH により，$\alpha^* < \omega_1$ で $X_\alpha$ が uncountable になるものがとれる．$X_{\alpha^*}$ は closed だから，perfect set $X$ を含む．この場合には，$X$ は単調減少関数である．いずれにしても，$f$ の perfect な部分集合 $X$ で，単調関数となるようなものが存在することがわかったが，$X$ の不連続点は高々可算だから，Lemma 10, (2) により，それらの点をのぞいた集合の部分集合 $Z$ で perfect set となるものが存在する．$D = \mathrm{dom}(Z)$ とすれば，これが求めるようなものになる． □(Theorem 20)

**Theorem 21** (a) PD を仮定すると，すべての *preojective* な $f : \to$ に対し，*perfect* な $D \subseteq$ で $f\restriction D$ が連続な単調関数となるようなものが存在する．

(b) *projective absoluteness for c.c.c. posets* を仮定する．このときすべての *projective* な $f : \to$ に対し，*comeager* な $D \subseteq$ で，$f\restriction D$ が連続になるようなものが存在する．

**Proof** (a): PD から $\mathrm{OCA}_{\aleph_0}^{\mathrm{projective}}(projective)$ が結論できる ([2]) から，あとは，前の定理と同様に示せる．

(b): projective absoluteness for c.c.c. posets が成り立つなら，すべての projective set は Baire property を持つ．したがって，このときには，すべての projective な $f : \to$ は Baire function となる．したがって，Lemma 9 によって，comeager な $D \subseteq$ で，$f\restriction D$ が連続になるようなものがとれる． □(Theorem 21)

最後に Shelah の結果を引用する．

**Theorem 22** (a) (S. Shelah [3]) ZFC が無矛盾なら，ZFC に “すべての関数 $f : \to$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，*nonmeager* な $D \subseteq$ が存在する” を付加しても無矛盾である．

(b) (S. Shelah [4]) ZFC が無矛盾なら，ZFC に “すべての関数 $f : \to$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，*non measure zero* な $D \subseteq$ が存在する” を付加しても無矛盾である．

**Theorem 23** (a) (S.F. and Shelah, to appear) ZFC + *“there exists a measurable cardinal”* が無矛盾なら，ZFC + “$2^{\aleph_0}$ は *Baire type cardinal*（*real-valued cardinal* の *categorical dual*）” + “すべての関数 $f : \to$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，*nonmeager* な $D \subseteq$ が存在する” も無矛盾である．

(b) (S.F. and S. Shelah, still a conjecture) ZFC + *“there exists a measurable cardinal”* が無矛盾なら，ZFC + “$2^{\aleph_0}$ は *real-valued cardinal*” + “すべての関数 $f : \to$ に対し，$f\restriction D$ が連続になるような，*non measure zero* な $D \subseteq$ が存在する” も無矛盾である．

## References


[1] H. Blumberg, *New properties of all real functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **24** (1922), 113–128.

[2] Q. Feng, *Homogeneity for open partitions of pairs of reals*, Trans. Amer. Math. Soc. **339**, No.2 (1993), 659–684.

[3] S. Shelah, Possibly every real function is continuous on a non–meagre set, Publications de L'Institute Mathématique - Beograd, Nouvelle Série(1995).

[4] S. Shelah, .

[5] W. Sierpiński, A. Zygmund, *Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu*, Fund. Math. **4** (1923), 316–318.

[6] S. Thiele, Diplomarbeit, Berlin (2001).

[7] B. Velickovic, *OCA and automorphisms of* $\mathcal{P}(\omega)/fin$, Top. and its Appl., **49** (1993), 1–13.