数学ノート 2000

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

03.12.08(月)

1 Lévy-Shoenfield Absoluteness Lemma

(Jech の green book に基づくノート)

Proposition 1 (ZF) θ を well-founded model $\mathfrak{A} = \langle A, E, R_1, \ldots\rangle$ で成立する文とする．このとき，well-founded で countable な $\mathfrak{B} \in L$ で $L \models \mathfrak{B}$ is countable かつ $\mathfrak{B} \models \theta$ となるものが存在する．

Proof $\mathfrak{A} \models \theta$ とする．$\mathfrak{A}$ は relational structure としてよい．$\mathfrak{A}$ に relations を適当に付加することにより，θ は $\forall\exists$-文としてよい (Skolem's Normal Form Theorem: θ を $\forall\exists$-文の連立 (conjunction) に分解すればよい)．θ が有限モデル $\mathfrak{C}$ を持てば，$\mathfrak{C} \in L$ とできるから，θ は有限モデルを持たないとしてよい．θ は

$$\forall x_1 \ \cdots \ \forall x_m \exists y_1 \ \cdots \ \exists y_n \psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

という形をしているとする．ただし ψ は quantifier free とする．$\mathcal{L}$ を ψ の言語とする．L で p.o. $\langle P, \leq\rangle$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} P = \{\langle \mathfrak{B}, f\rangle : \mathfrak{B} = \langle B, E, \ldots\rangle \text{ は finite } \mathcal{L}\text{-structure}, \\ B \subseteq \omega,\ f : B \to Ord, \\ \forall b, b' \in B\,(b\,E\,b' \ \to \ f(b) < f(b'))\} \end{aligned}$$

$\langle \mathfrak{B}, f\rangle, \langle \mathfrak{B}', f'\rangle \in P$ として，$\mathfrak{B} = \langle B, E, \ldots\rangle$, $\mathfrak{B}' = \langle B', E', \ldots\rangle$ とするとき，

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}, f\rangle <^P \langle \mathfrak{B}', f'\rangle \ \Leftrightarrow \ & \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B},\ f' \subseteq f \text{ で，} \\ & \text{すべての } x_1, \ldots, x_m \in B' \text{ に対し，} y_1, \ldots, y_n \in B \text{ で} \\ & \mathfrak{B} \models \psi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \text{ となるものが存在する} \end{aligned}$$

とする．L で $P = \langle P, <^P\rangle$ が well-founded でなければ，decreasing sequence

$$\langle \mathfrak{B}_0, f_0\rangle >^P \langle \mathfrak{B}_1, f_1\rangle >^P \ \cdots$$

が L で存在するが[1] ，このとき $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n$ が求めるようなものになる．したがって，well-foundedness が absolute であることを思い出すと[2] ，$\langle P, <^P\rangle$ が V で well-founded で

[1] L では AC が成り立っていることに注意する．

[2] "すべての部分集合に対して ..." という well-foundedness の定義と，これと ZF で同値な "rank function が存在する" により well-foundedness は Δ_1^{ZF} であることがわかる．

ないことを言えば証明が完了する．V で $Q \subseteq P$ を次のようにとる．$g^* : A \to Ord$ を，すべての $a, a' \in A$ に対し，$aE^{\mathfrak{A}}a' \rightarrow f^*(a) < f^*(a')$ となるようにとる．$\mathfrak{A}$ は well-founded だったから，このような f^* は存在する．ここで，

$$Q = \{\langle \mathfrak{B}, f\rangle \in P : \mathfrak{B} \text{ の } \mathfrak{A} \text{ への embedding } g \text{ で} \\ f = f^* \circ g \text{ となるものが存在する } \}$$

とする．このとき Q は $<^P$ に関する極小元を持たないから，$\langle P, <^P\rangle$ が non well-founded であることがわかり，したがって P は L でも non well-founded である． □(Proposition 1)

Theorem 2 (Lévy- Shoenfield Absoluteness Lemma) $V \subseteq W$ を ZF（の十分に大きな fragment）の transitive models とする．このとき，$\mathcal{H}(\aleph_1)^V$ の元をパラメタとして持つすべての Σ_1-文 φ は $V \subseteq W$ に関し absolute である．

Proof φ を $\exists x \psi(x)$ とする．ここに ψ は Σ_0-formula で，$a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{H}(\aleph_1)^V$ を parameters として持つものとする．$V \models \varphi$ なら $W \models \varphi$ となることは明らか．

$W \models \varphi$ と仮定する．このとき，Reflection Principle により transitive な $\mathfrak{A} = \langle A, \in, \ldots\rangle \in W$ で，$a_1, \ldots, a_n \in A$ かつ，$\mathfrak{A} \models \varphi$ となるものが存在する．したがって前の Proposition の変形により，transitive な $\mathfrak{B} = \langle B, \in, \ldots\rangle \in V$ で，$a_1, \ldots, a_n \in B$ かつ $\mathfrak{B} \models \varphi$ となるものがとれる[3]．φ は Σ_1 だから，このことから $V \models \varphi$ が帰結できる． □(Theorem 2)

Theorem 3 (Shoenfield's Absoluteness Theorem) すべての $a \in {}^{\omega}\omega$ に対し，$\Sigma^1_2(a)$-relation は（したがって $\Pi^1_2(a)$-relation も）ZF + DC のモデル間で absolute である．特に，任意の $a \in {}^{\omega}\omega$ と $\Sigma^1_2(a)$ relation A に対し，$A(\vec{b}) \Leftrightarrow L_{\omega_1}[a, \vec{b}] \models A(\vec{b})$ が成り立つ．

Proof 後述の Proposition 6 により，この定理は Lévy- Shoenfield Absoluteness Lemma の系として得られる．以下では直接証明を与える：

$\Sigma^1_2(a)$-relation について示せば十分である．A を ${}^{\omega}\omega$ の $\Sigma^1_2(a)$-subset とする．W を ZF + DC の inner model で $a \in W$ となるものとする．このとき $A^W = A \cap W$ を示せばよい．

U を a 上 arithmetical な tree で

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y \in {}^{\omega}\omega \, [U_{\langle x,y\rangle} \text{ は well-founded}]$$

となるようなものとする（Kanamori [7] Theorem 13.1 を参照）．$x \in {}^{\omega}\omega \cap W$ に対し，

$$x \in A^W \Leftrightarrow \exists y \in {}^{\omega}\omega \cap M \, [M \models U_{\langle x,y\rangle} \text{ は well-founded}]$$

となるが，U は a 上 arithmetical だから，すべての $x, y \in W$ に対し，$U_{\langle x,y\rangle}$ は W でも V でも同じものとなる．したがって，well-foundedness の absoluteness から，

$$x \in A^W \Leftrightarrow \exists y \in {}^{\omega}\omega \cap M \, [U_{\langle x,y\rangle} \text{ は well-founded}]$$

[3] $trcl(a_1), \ldots, trcl(a_n) \subseteq B'$ となるような well-founded な $\mathfrak{B}'$ を上の Proposition でと同様なやりかたで構成できる（P の ordering は，$trcl(a_1), \ldots,$ のすべての元が gradually にとりこまれるように定義すればよい）．これの transitive collapse を $\mathfrak{B}$ としてとればよい．

となる．このことから，$A^W \subseteq A \cap W$ がわかるから，あとは $A^W \supseteq A \cap W$ を示せばよい．

$\Sigma^1_2(a)$ sets は ω_1-Suslin だから（Kanamori [7] の Theorem 13.14），$\omega \times \omega_1$ 上の tree $T \in L[a] \subseteq W$ で

$$x \in A \ \Leftrightarrow \ T_x \text{ は well-founded でない}$$

となるものがとれる．したがって，$x \in A \cap W$ なら，T_x は well-founded でない，したがって，well-foundedness の absoluteness から，

$$W \models T_x \text{ は well-founded でない}$$

が成り立つ．ここで T が A の ω_1-Suslinness を示す例となっていることは W でも言えるから，$W \models x \in A$ つまり，$x \in A^W$ となる．

$\vec{b} \in {}^{\omega}\omega$ に対し，上の議論は，$W = L_{\omega_1}[a, \vec{b}]$ でも同様に行なえる．この場合 T は 一般には $L_{\omega_1}[a, \vec{b}]$ の元ではなく，$L_{\omega_1}[a, \vec{b}]$ の definable な subset でしかないが，このことは上の議論には影響を与えない． □ (Theorem 3)

2 Σ^1_n 集合の表現

以下は ZF + DC で議論する．DC は例えば Claim 4.1 で必要になる．

$A \in \Sigma^1_n$ とは，arithmetic な R (i.e. quantifiers は number quantifiers のみ) があって，すべての $\mathbf{w} \in ({}^{\omega}\omega)^k$ に対し[4] ，

$$(*) \qquad A(\mathbf{w}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots Q x_n \, R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$$

とできることだった[5] ．

Lemma 4 （Kanamori [7] の演習 12.4 の記述の改良）A を Σ^1_n とするとき，ある Δ^0_0-formula $\hat{R}$ (つまり，$\hat{R}$ 現れる quantifiers は restricted number quantifiers のみ) により すべての $\mathbf{w}$ に対し，

$$A(\mathbf{w}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots Q x_n \, Q' m \, \hat{R}(m, \mathbf{w}\restriction m, x_1 \restriction m, \ldots, x_n \restriction m)$$

とできる[6] ．ここに $\exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots Q x_n$ が second order quantifiers のブロックで，Q' は n が偶数のときには $\exists^0$, n が奇数のときには $\forall^0$ である．

Proof まず，n が偶数であるときについて証明する．このときには，$(*)$ での Q は $\forall^1$ である．次に留意する．

Claim 4.1 任意の *formula* S と $\mathbf{w} \in ({}^{\omega}\omega)^k$ に対し， claim4.1

(a) $\mathcal{A}^2 \models \forall^0 m \exists^1 x \, S(m, \mathbf{w}, x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \exists^1 x \forall^0 m \, S(m, \mathbf{w}, (x)_m)$.

(b) $\mathcal{A}^2 \models \exists^0 m \forall^1 x \, S(m, \mathbf{w}, x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \forall^1 x \exists^0 m \, S(m, \mathbf{w}, (x)_m)$

となることに留意する[7] ．（(b) は (a) の contraposition として得られる）．$(*)$ の R に現れる $\forall^0 m$ の形の量化子のひとつひとつを関数の量化子に書きかえて上の同値式を用いてこれを左側にたぐりよせ，関数の量化子のブロックの右はしの $\forall^1 x_n$ に吸収させる．ここで R の制限されてない数の量化子のブロックの内側にある Δ^0_0 論理式に対応する Δ^0_0 論理式 R_0 により，すべての $\mathbf{w} \in ({}^{\omega}\omega)^k$ に対し，

$$(1) \qquad A(\mathbf{w}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots \forall^1 x_n \, \forall^0 p \, R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$$

とできる．R_0 に現れる量化子は，制限された数の量化子のみだから，$R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$ の真偽は，p と十分に大きな $q \in \omega$ に対する $\mathbf{w}\restriction q$, $x_1 \restriction q$,..., $x_n \restriction q$ のみに依存して決まる．したがって，ある Δ^0_0-formula R_1 により，

$$(2) \qquad \mathcal{A}^2 \models \forall^0 p \, R_0(p, \mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}^2 \models \forall^0 p \exists^0 q \, R_1(p, \mathbf{w}\restriction q, x_1 \restriction q, \ldots, x_n \restriction q)$$

---

[4] k は A の変数の数に対応するように適当にとる．以下同様．

[5] ここに，$\mathcal{A}^2$ は [7] でのような二階の算術の構造とする．二階の量化子は，“$\exists^1 x$”, “$\forall^1 x$” などとあらわし，一階の量化子は “$\exists^0 n$”, “$\forall^0 n$” などとあらわす．だだし，後で，これらを “$\exists x \in {}^{\omega}\omega$”, “$\forall x \in {}^{\omega}\omega$”, “$\exists n \in \omega$”, “$\forall n \in \omega$” とあらわしているところもある．

[6] $x\restriction n$ は $\langle x(0), \ldots, x(n-1) \rangle$ (をコードする自然数) をあらわすものとする．“$m = x\restriction n$” は Δ^0_0 である．

[7] $(x)_m$ は n に対し $x(\langle m, n \rangle)$ を対応させる関数として導入されているものとする．

とできる．これを (1) に代入して，量化子 $\forall^1 x_n \forall^0 p$ を 1 つにまとめると A の求めている形の表現が得られる．

n が奇数のときには，$A(\mathbf{w})$ は

$$\exists^1 x_1 \forall^1 x_2 \cdots \exists^1 x_n \, R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)$$

と同値になるが，これは，

$$\neg \underbrace{\exists^1 x_0 \forall^1 x_1 \exists^1 x_2 \cdots \forall^1 x_n \neg R(\mathbf{w}, x_1, \ldots, x_n)}_{(**)}$$

と同値である．ただし x_0 は dummy variable. したがって上の式の $(**)$ の部分に n が偶数の場合の結果を適用すると，A の求めているような表現が得られる． □ (Lemma 4)

$k \geq 0$ として，φ を Σ_k-formula (in $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$) とする．$m_1, \ldots, m_n \in \omega$, $r, s, f_1, \ldots, f_n \in {}^{\omega}\omega$ に対し，次の命題を考える：

$\Phi^1(r)$: "r codes an extensional well-founded binary relation E_r on ω"

$\Phi^1_n(r, f_1, \ldots, f_n)$: "r codes an extensional well-founded binary relation E_r and $f_1, \ldots, f_n \in X_r$ for the transitive collapse X_r of $\langle \omega, E_r \rangle$"

$\Phi^2(r, s, f)$: "$\Phi^1(r) \wedge \Phi^1(s) \wedge X_r \subseteq X_s$ for the transitive collapses X_r and X_s of $\langle \omega, E_r \rangle$ and $\langle \omega, E_s \rangle \wedge f : \langle \omega, E_r \rangle \to \langle \omega, E_s \rangle$ corresponds to the embedding $X_r \subseteq X_s$"

$\Phi^3_\varphi(r, m_1, \ldots, m_n)$: "$\Phi^1(r) \ \wedge \ \langle \omega, E_r \rangle \models \varphi[m_1, \ldots, m_n]$"

$\Phi^4_\varphi(r, f_1, \ldots, f_n)$: "$\Phi^1_n(r, f_1, \ldots, f_n) \ \wedge \ X_r \models \varphi[f_1, \ldots, f_n]$ for the transitive collapse X_r of $\langle \omega, E_r \rangle$"

$\Phi_\varphi(r)$: "$\Phi^1(r) \ \wedge \ \varphi$ is absolute between X_r and $\mathcal{H}(\aleph_1)$"

Lemma 5 (1) $\Phi^1(r)$, $\Phi^1_n(r, f_1, \ldots, f_n)$, $\Phi^2(r, s)$, $\Phi^3_\varphi(r, m_1, \ldots, m_n)$ は Π^1_1 である. formulas

(2) $k \geq 0$ に対し，$\Phi_\varphi(r)$ は Π^1_{k+1} である．

Proof (1): 以下に留意すれば明らか：

(i) "r codes a well founded relation" は

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \left(\text{"}f \text{ does not code a decreasing sequence with respect to } E_r\text{"} \right)$$

と表現できるから Π^1_1 である．

(ii) $f \in X_r$ は Σ^1_0-formula

$$\exists n \, \forall m, k \in \omega \left(f(m) = k \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ell \in \omega (\ell \ E_r \ n) \ \wedge \ \text{"}\ell \text{ corresponds to } \langle m, k \rangle\text{"} \right)$$

で表現できる．

(iii) “f corresponds to the embedding $X_r \subseteq X_s$” は

$$\forall m, n \in \omega\,(mE_r n \leftrightarrow f(m)E_s f(n)) \ \wedge\ \forall m', n \in \omega\,(m'E_s f(n) \rightarrow \exists m \in \omega\,(f(m) = m'))$$

とあらわせる．

(iv) $X_r \models \varphi[f_1, \ldots, f_n]$ は

$$\exists m_1, \ldots, m_n \in \omega \Big(\text{“}m_1, \ldots, m_n \text{ correspond to } f_1, \ldots, f_n \text{ in } \langle X_r, \in\rangle\text{”} \\ \wedge \langle \omega, E_r\rangle \models \varphi[m_1, \ldots, m_n]\Big)$$

と表現できる．ここに “$\langle \omega, E_r\rangle \models \varphi[m_1, \ldots, m_n]$” は quantifiers が ω に bound された formula として書ける．

(2): k に関する帰納法で示す．Σ_0-formulas の absoluteness から，φ が Σ_0 なら，$\Phi^3_\varphi(r) \leftrightarrow \Phi^1(r)$ である．したがって，(1) により，$k = 0$ のときには (2) の命題は成り立つ．

次に，$k \geq 0$ に対し，(2) の命題が成り立っていると仮定して，$k+1$ に対してもこの命題が成り立つことを示す．φ が Σ_{k+1}-formula で，ある Π_k-formula ψ に対し，$\exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ という形をしているとする．このとき，downward Löwenheim-Skolem Theorem により，$\Phi_\varphi(r)$ は

$$\Phi_{\neg\psi}(r) \wedge \\ \forall f, s \in {}^\omega\omega \Big(\Phi_{\neg\psi}(s) \ \wedge\ \Phi^2(r, s, f) \ \rightarrow \\ \forall m_1, \ldots, m_n \in \omega\ (\exists m \in \omega\ \Phi^3_\psi(s, m, f(m_1), \ldots, f(m_n)) \rightarrow \\ \exists m' \in \omega\ \Phi^3_\psi(r, m', m_1, \ldots, m_n))\Big)$$

とあらわせるが，帰納法の仮定から，$\Phi_{\neg\psi(s)}$ は Π^1_{k+1} だから，Lemma 5 により，$\Phi_\varphi(r)$ は Π^1_{k+2} であることがわかる． □ (Lemma 5)

Proposition 6 $X \subseteq ({}^\omega\omega)^n$ で $\bar{a} \in ({}^\omega\omega)^m$ とする．このとき，$k \geq 1$ に対し，次は同値である： sigma-k-vs-sigma-1-k+1

(a) Σ_k*-formula* φ で，

$$X = \{\bar{x} \in ({}^\omega\omega)^n : \mathcal{H}(\aleph_1) \models \varphi[\bar{x}, \bar{a}]\}$$

となるものが存在する．

(b) Σ^1_{k+1}*-formula* ψ で，

$$X = \{\bar{x} \in ({}^\omega\omega)^n : \mathcal{A}^2 \models \psi[\bar{x}, \bar{a}]\}$$

となるものが存在する[8] ．

[8] $\mathcal{A}^2$ で [7] でのような二階の数論のモデルを表す．

Proof “⇒”: 前の Lemma での notation を用いる．φ を (a) でのようにとる．φ は Π_{k-1} formula φ' により，$\exists x\varphi'$ とあらわされているとする．

このとき，$\mathcal{A}^2$ の言語の formula ψ を

$$\exists r \in {}^{\omega}\omega \left(\Phi_{\neg\varphi'}(r) \ \wedge \ \exists x \in {}^{\omega}\omega(\neg\Phi^4_{\neg\varphi'}(r, x, \bar{x}, \bar{a}))\right)$$

とすると Lemma 5 により ψ は Σ^1_{k+1} となり，downward Löwenheim-Skolem Theorem により，$X = \{\bar{x} \in ({}^{\omega}\omega)^n \ : \ \mathcal{A}^2 \models \psi[\bar{x}, \bar{a}]\}$ である．

“⇐”: k に関する帰納法で示す．$k = 1$ のときには，$\bar{a}$ 上 recursive (i.e. $\Sigma^0_1(\bar{a}) \cap \Pi^0_1(\bar{a})$) な木 T で，

$$\bar{x} \in X \ \Leftrightarrow \ \exists y \in {}^{\omega}\omega \ (T_{\langle \bar{x}, y\rangle} \text{ is well founded})$$

となるものがある．T の $\bar{a}$ 上の arithmetic な定義を与える formula を η として，パラメタ $\bar{a}$ を持つ Σ_1-formula φ を

$$\begin{aligned}\exists T \exists y \exists r \ (& \text{“}T \text{ is defined by } \eta \text{ with parameters } \bar{a}\text{”} \\ & \wedge \ y \in {}^{\omega}\omega \\ & \wedge \text{“}r : T_{\langle \bar{x}, y\rangle} \to On \text{ witnesses the well-foundedness of } T_{\langle \bar{x}, y\rangle}\text{”})\end{aligned}$$

とすれば，この φ が求めるようなものである．induction step は “$\exists x \in {}^{\omega}\omega$” が $\mathcal{H}(\aleph_1)$ で，“$\exists x \ (x : \omega \to \omega \ \wedge \ \ldots)$” として $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$ で表現可能なことから直ちに導ける． ❑ (Proposition 6)

3 random reals

$\mathcal{G} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ が Lusin gap であるとは，$\mathcal{G}$ の元は pairwise almost disjoint で，すべての $x \in [\omega]^{\aleph_0}$ に対し，常に $\{y \in \mathcal{G} : y \subseteq^* x\}$ か $\{y \in \mathcal{G} : y \subseteq^* \omega \setminus x\}$ のどちらかは $\mathcal{G}$ より小さい濃度を持つこと．$\mathcal{G}$ が Lusin gap で $|\mathcal{G}| = \kappa$ のとき $\mathcal{G}$ は κ-Lusin gap であるという．

Theorem 7 (K. Kunen [?]) λ を正則基数として，B を random reals を λ 個付け加える cBa とする．このとき，すべての非可算な $\kappa \leq \lambda$ に対し，$\Vdash_{B^+}$ "κ-Lusin gap が存在する" が成り立つ． random-Lusin

この定理の証明には次の補題が用いられる：

Lemma 8 μ を cBa B 上の finitely additive measure とする． borel-cantelli

(a) (Borel-Cantelli の補題) $a_n, n \in \omega$ を B の独立な事象[9] とするとき，$\sum_{n\in\omega} \mu(a_n) = \infty$ なら，$\sum_{n\in\omega} a_n = 1$ となる．

(b) $\mu(\sum_{n\in\omega\setminus m} b_n)$, $m \in \omega$ が 0 に収束するとき，$\mu(\sum_{n\in\omega} b_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(b_n)$ が成り立つ．

Proof (a): 不等式

$$1 - x \leq e^{-x} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^+$$

に留意すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分に大きな n をとると，

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq 1 - e^{-\sum_{l<n} \mu(a_l)} \\ &\leq 1 - \textstyle\prod_{l<n}(1 - \mu(a_l)) \\ &= 1 - \textstyle\prod_{l<n} \mu(-a_l) = 1 - \mu(\prod_{l<n} -a_l) \\ &= \mu(1 \cdot -(\textstyle\prod_{l<n} -a_l)) = \mu(\sum_{l<n} a_l) \leq \mu(\sum_{l\in\omega} a_l) \end{aligned}$$

となる．したがって，$\mu(\sum_{l\in\omega} a_l) = 1$ となるから，$\sum_{l\in\omega} a_l = 1_B$ である．

(b): 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分に大きな $m \in \omega$ をとると，$\mu(\sum_{n\in\omega\setminus m} b_n) < \varepsilon$ できるが，このとき，

$$\begin{aligned} \mu(\textstyle\sum_{n\in\omega} b_n) &\leq \mu(b_0) + \cdots + \mu(b_m) + \mu(\sum_{n\in\omega\setminus m} b_n) \\ &\leq \textstyle\sum_{n\in\omega} \mu(b_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

となる．したがって，$\mu(\sum_{n\in\omega} b_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(b_n)$ である． □ (Lemma 8)

Proof of Theorem 7: μ を B の measure とする．$\varepsilon_n \in [0, 1]$, $n \in \omega$ を $\sum_{n\in\omega} \varepsilon_n = \infty$ だが，$\sum_{n\in\omega} (\varepsilon_n)^2 < \infty$ となるものとする．$a^\alpha_n \in B^+$, $n \in \omega$, $\alpha < \kappa$ を互いに独立な事象で，$\mu(a^\alpha_n) = \varepsilon_n$ となるものとする．$\dot{a}_\alpha$, $\alpha < \kappa$ を，ω の部分集合の B^+-name で，すべての $n \in \omega$ に対し，$\|n \in \dot{a}_\alpha\| = a^\alpha_n$ となるものとする．

$\dot{\mathcal{G}}$ を $\{\dot{a}^G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ の B-name とすると，$\Vdash_{B^+}$ "$\dot{\mathcal{G}}$ は κ-Lusin gap" となることを示す．これは以下の Claims に証明される：

---

[9] $a_n \in B$, $n \in I$ が独立な事象とは，すべての $k \in \omega$, $i_0, \ldots, i_{k-1} \in \{-1, 1\}$, および互いに異なる $j_0, \ldots, j_{k-1} \in I$ に対し，$\mu(\prod_{l<k} a^{i_l}_{j_l}) = \prod_{l<k} \mu(a^{i_l}_{j_l})$ が成り立つこと．

Claim 8.1 すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$\Vdash_{B^+}$ “$|\dot{a}_\alpha| = \aleph_0$” である．

$\vdash$ $b \in B^+$ とする．$m \in \omega$ を任意にとると，Lemma 8 により，$\sum_{n\in\omega\setminus m} a_n^\alpha = 1_B$ となるから，$b \cdot (\sum_{n\in\omega\setminus m} a_n^\alpha) = b \neq 0_B$ である．したがって，$b \Vdash_{B^+}$ “$(\exists n > m)\,[\,n \in \dot{a}_\alpha\,]$” がわかる． $\dashv$ (Claim 8.1)

Claim 8.2 $\Vdash_{B^+}$ “$\{\dot{a}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は almost pairwise disjoint”.

$\vdash$ $\alpha, \beta < \kappa, \alpha \neq \beta$ とする．このとき，$\Sigma_{n\in\omega}(\varepsilon)^2 < \infty$ により，任意の $b \in B^+$ に対し，十分に大きな $m \in \omega$ をとると，

$$\mu(\sum_{n\in\omega\setminus m} a_n^\alpha \cdot a_n^\beta) \leq \sum_{n\in\omega\setminus m} \mu(a_n^\alpha \cdot a_n^\beta) = \sum_{n\in\omega\setminus m} \mu(a_n^\alpha)\cdot\mu(a_n^\beta) < \Sigma_{n\in\omega\setminus m}\varepsilon^2 < \mu(b)$$

とできる．このとき，

$$b' = b \cdot -\left(\sum_{n\in\omega\setminus m} a_n^\alpha \cdot a_n^\beta\right)$$

は non-zero だが，b' は “$\dot{a}_\alpha \cap \dot{a}_\beta \subseteq m$” を force する． $\dashv$ (Claim 8.2)

Claim 8.3 G を B 上の *generic set* とする．このとき，すべての $[\omega]^{\aleph_0}$ の元の B-*name* $\dot{b}$ に対し，

$$V[G] \models (\dot{a}_\alpha)^G \not\subseteq^* \dot{b}^G \textit{ for all but countably may } \alpha < \kappa$$

または，

$$V[G] \models (\dot{a}_\alpha)^G \not\subseteq^* \omega \setminus \dot{b}^G \textit{ for all but countably may } \alpha < \kappa$$

のどちらかが成り立つ．

$\vdash$ まず $\dot{b}^G \in V$ の場合を考える．このときには，$b \in [\omega]^{\aleph_0}$ と $p \in G$ で，$p \Vdash_{B^+}$ “$\dot{b} = b$” となるものが存在する．仮定から，$\sum_{n\in b}\varepsilon_n$ か $\sum_{n\in\omega\setminus b}\varepsilon_n$ のどちらかは ∞ となる．

$\sum_{n\in b}\varepsilon_n = \infty$ の場合には，任意の $m \in \omega$ に対し，$\sum_{n\in b\setminus m}\varepsilon_n = \infty$ となるから，Lemma 8(a) により，$\sum_{n\in b\setminus m} a_n^\alpha = 1$ となる．したがって，

$$p \Vdash_{B^+} \text{“}|\,b \cap \dot{a}_\alpha\,| = \aleph_0\text{”}$$

がすべの $\alpha < \kappa$ に対し成り立つ．したがって $p \Vdash_{B^+}$ “$\dot{a}_\alpha \not\subseteq^* \omega \setminus \dot{b}$” である．

$\sum_{n\in\omega\setminus b}\varepsilon_n = \infty$ の場合には同様に，$p \Vdash_{B^+}$ “$\dot{a}_\alpha \not\subseteq^* \dot{b}$” がすべての $\alpha < \kappa$ に対し成り立つことが示せる．

一般の場合は，$\dot{b}^G$ を含むような適当な中間モデルを ground model と思いなおすことで，上の場合に帰着できる（Borel-Cantelli の補題は finitely additive measure で成り立つから，中間モデル上の generic extension で考えてよい）． $\dashv$ (Claim 8.3) $\square$ (Theorem 8)

P を p.o. として，$X \subseteq P$ が centered とは，任意の $Y \in [X]^{\aleph_0}$ に対し，$x \in X$ で $x \leq Y$（つまり $x \leq y$ for all $y \in Y$）となるものが存在すること．P が σ-centered とは，P は可算な centered な部分集合の族の和集合となっていること．

Proposition 9 P が σ-*centered* なら，P は *random real* を付加しない．

Proof σ-centered な p.o. の regular sub-p.o. も σ-centered だから，random algebra B (の positive elements) が σ-centered でないことを示せばよい．

μ を B の測度とする．B^+ が σ-centered だったとすると，B^+ は ω 個の ultrafilters の和集合 $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ としてあらわせる．各 n に対し，$\inf\{\mu(b) : b \in F_n\} = 0$ である ($\inf\{\mu(b) : b \in F_n\} \geq \varepsilon > 0$ なら，F_n が ultrafilter であることから，$\{b \in B : \mu(b) \geq \varepsilon\} \subseteq F_n$ となるが，このことと F_n の有限加法性から $0 \in F_n$ が帰結できてしまい矛盾である)．$n \in \omega$ に対し，$b_n \in B^+$ を $-b_n \in F_n$ かつ $\mu(-b_n) < 1/2^{n+3}$ となるようにとる．$b = \prod_{n\in\omega} b_n$ とすると，$b \neq 0$ となるが，b はどの F_n にも属さない．これは矛盾である．

(Proposition 9)

4 $C_2^s(\kappa)$

κ を cardinal とするとき，$C_2^s(\kappa)$ は次の命題である：

$\langle A(\alpha,i) : \alpha<\kappa, i<\omega\rangle$ を $\mathcal{P}(\omega)$ の元からなる matrix とし，$T\subseteq\omega^2$ とするとき，次の (i), (ii) のどちらかが成り立つ．

(i) stationary な $S\subseteq\kappa$ で，すべての $(t_0,t_1)\in T$ と $s_0,\ s_1\in S,\ s_0\neq s_1$ に対し，$A(s_0,t_0)\cap A(s_1,t_1)\neq\emptyset$;

(ii) $(t_0,t_1)\in T$ と stationary な $S_0, S_1\subseteq\kappa$ で，すべての $s_0\in S_0, s_1\in S_0, s_0\neq s_1$ に対し，$A(s_0,t_0)\cap A(s_1,t_1)=\emptyset$ となるようなものが存在する．

Proposition 10 *$C_2^s(\kappa)$ implies $\mathbf{b}\neq\kappa$.*

Proof Suppose that $\langle f_\alpha : \alpha<\kappa\rangle$ is an increasing chain in $\langle {}^\omega\omega, \subseteq^*\rangle$ such that $\{f_\alpha : \alpha<\kappa\}$ is unbounded.

For each $f\in{}^\omega\omega$ let

$$f^\uparrow=\{\langle n,m\rangle\in\omega^2 : m>f(n)\},$$
$$f^\downarrow=\{\langle n,m\rangle\in\omega^2 : m\leq f(n)\}.$$

Now for $\alpha<\kappa$ and $i<\omega$, let

$$A(\alpha,i)=\begin{cases} f^\uparrow, & \text{if } i=0;\\ f^\downarrow, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

We claim that the matrix $\langle A(\alpha,i) : \alpha<\kappa, i<\omega\rangle$ is a counter example to $C_2^s(\kappa)$. First, suppose that $S\subseteq\kappa$ is stationary. Then by Theorem 0.7 in [8], there are $\alpha,\ \beta\in S$ such that $\alpha<\beta$ and $f_\alpha\leq f_\beta$. It follows that $A(\alpha,1)\cap A(\beta,0)=\emptyset$.

On the other hand, if $S_0,\ S_1\subseteq\kappa$ are stationary, then there are $\alpha^*\in S_0$ and $\beta^*\in S_1$ such that

$$(\alpha^*<\beta^*\ \wedge\ f_{\alpha^*}\not\leq f_{\beta^*})\ \vee\ (\alpha^*>\beta^*\ \wedge\ f_{\alpha^*}\not\geq f_{\beta^*}).$$

[If there were no such α^*, β^*, then we could construct a sequence $f_{\alpha_1}<f_{\alpha_2}<\cdots<f_{\alpha_\xi}<\cdots$, for $\xi<\omega_1$. But since $\mathrm{dom}(f_\alpha)=\mathrm{rng}(f_\alpha)=\omega$, this is impossible.]

Then $A(\alpha^*,i)\cap A(\beta^*,j)\neq\emptyset$ for all $i,j\in\omega$. ❑ (Proposition 10)

Theorem 11 (Juhász-Kunen [5], for $\kappa=\aleph_2$) SEP *implies $C_2^s(\kappa)$ for cardinal κ with* $\mathrm{cf}(\kappa)\geq\omega_2$.

Proof Suppose that $\mathcal{A}=\langle A(\alpha,n) : \alpha\in\kappa, n\in\omega\rangle$ is a matrix of subsets of ω and $T\subseteq\omega^2$. Assume that (i) in the definition of $C_2^s(\kappa)$ does not hold for $\mathcal{A}$ and T. I.e. assume that for any stationary $S\subseteq\kappa$ there are $\langle t_0,t_1\rangle\in T$ and $\langle s_0,s_1\rangle\in(S)^2$ such that $A(s_0,t_0)\cap A(s_1,t_1)=\emptyset$. Without loss of generality we may assume $T=T^{-1}$.

For $X\subseteq\kappa$, let $H(X)\subseteq X$ be defined recursively by:

$$\gamma\in H(X)\ \Leftrightarrow\ \gamma\in X\ \wedge\ A(\beta,t_0)\cap A(\gamma,t_1)\neq\emptyset \quad \text{for any } \langle t_0,t_1\rangle\in T \text{ and } \beta\in H(X)\cap\gamma$$

By assumption $H(X)$ is always a non stationary subset of κ. Also we have

(∗) $\gamma \in X \setminus H(X) \Rightarrow$ there are $\beta \in H(X) \cap \gamma$ and $\langle t_0, t_1 \rangle \in T$ such that
$$A(\beta, t_0) \cap A(\gamma, t_1) = \emptyset .$$

Let λ be large enough and $N \prec \mathcal{H}(\lambda)$ be such that

(0) $|N| = \aleph_1$;
(1) $[N]^{\aleph_0} \cap N$ is cofinal in $[N]^{\aleph_0}$;
(2) $\mathcal{A}, T \in N$ and
(3) $\mathcal{P}(\omega) \cap N \leq_\sigma \mathcal{P}(\omega)$.

Let $\delta = \sup(\kappa \cap N)$. Note that $\kappa \in N$ by $\mathcal{A} \in N$ and $\delta < \kappa$ since $\mathrm{cf}(\delta) < \omega_2$. (3) is possible by the assumption of SEP.

Claim 11.1 $\mathrm{cf}(\delta) = \omega_1$.

$\vdash$ $\mathrm{cf}(\delta) \leq \omega_1$ by $|N| = \aleph_1$. Suppose that $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$ and let $X \in [\delta]^{\aleph_0} \cap N$ be cofinal in δ. Then by (1) there is $X' \in [\kappa]^{\aleph_0} \cap N$ with $X \subseteq X'$. But then $N \models$"X' is cofinal in κ". Hence by elementarity X' is really cofinal in κ. This is a contradiction to $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega_2$.
$\dashv$ (Claim 11.1)

Let $\langle \delta_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ be an increasing cofinal sequence of ordinals in N below δ. So letting $\mathcal{C} = \{C \subseteq \kappa : C \text{ is club in } \kappa\}$, there is a decreasing sequence $\langle C_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ of elements of $\mathcal{C} \cap N$ which is coinitial (w.r.t. $\subseteq$) in $\mathcal{C} \cap N$ (use (1) at limit steps of the construction of the sequence $\langle C_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ — note that $\mathcal{C} \in N$). For each $\xi < \omega_1$ let $S_\xi = H(C_\xi \setminus \delta_\xi)$. Then $S_\xi \in N$ and S_ξ is a non stationary subset of κ. For all $\xi < \omega_1$, $\delta \in C_\xi$ but $\delta \notin X_\xi$ (For the latter assertion consider $\eta < \omega_1$ such that $S \cap C_\eta = \emptyset$). Hence by (∗), there is $\beta_\xi \in S_\xi$ and $\langle t_0^\xi, t_1^\xi \rangle \in T$ such that $A(\beta_\xi, t_0^\xi) \cap A(\delta, t_1^\xi) = \emptyset$ for each $\xi < \omega_1$. Without loss of generality $t_0^\xi = t_0$ and $t_1^\xi = t_1$ for some $\langle t_0, t_1 \rangle \in T$ for all $\xi \in \omega_1$ and $\langle \beta_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ is strictly increasing (this is because S_ξ is disjoint from δ_ξ). Note that $\langle \beta_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ is cofinal in δ (since $\beta_\xi \geq \delta_\xi$ for all $\xi < \omega_1$). By (3), there is $b \in \mathcal{P}(\omega) \cap N$ such that $b \subseteq (\omega \setminus A(\delta, t_1))$ and $A(\beta_\xi, t_0) \subseteq b$ for uncountably may $\xi < \omega_1$. Let

$$D_0 = \{\beta < \kappa : A(\beta, t_0) \subseteq b\}$$

and

$$D_1 = \{\beta < \kappa : A(\beta, t_1) \cap b = \emptyset\}.$$

Then $D_0, D_1 \in N$ and they are stationary since $N \models$"D_0 and D_1 are stationary" — we can check this by showing $C_\xi \cap D_0 \neq \emptyset$, $C_\xi \cap D_1 \neq \emptyset$ for all $\xi < \omega_1$. By the definition of D_0 and D_1, $A(\beta_0, t_0) \cap A(\beta_1, t_1) = \emptyset$ for all $\langle \beta_0, \beta_1 \rangle \in (D_0, D_1)$. Thus (ii) in the definition of $C_2^s(\kappa)$ holds for these $\mathcal{A}$ and T. ❑ (Theorem 11)

Theorem 12 (Juhász, Soukup, Szentmiklóssy [6]) κ を *cardinal* として，$C_2^s(\kappa)$ を仮定する．$\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ で $|\mathcal{A}| = \kappa$ のとき，次の (a) と (b) のどちらかが成り立つ： cal4

(a) $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\kappa$ ですべての $a, a' \in \mathcal{B}$ に対し，$|a \cap a'| = \aleph_0$ となるものが存在する;

(b) $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \in [\mathcal{A}]^\kappa$ で，$|(\bigcup \mathcal{B}_0) \cap (\bigcup \mathcal{B}_1)| < \aleph_0$ となるものが存在する．

Proof $\langle A_\xi : \xi < \kappa \rangle$ を $\mathcal{A}$ の injective な enumeration とする．$\xi < \kappa$ と $n \in \omega$ に対し，

$$A(\xi, n) = A_\xi \setminus n$$

とする．ある stationary な $S \subseteq \kappa$ があって，すべての異なる $\xi, \eta \in S$ と $m, n \in \omega$ に対し $A(\xi, m) \cap A(\eta, n) \neq \emptyset$ となるなら，$\mathcal{B} = \{A_\xi : \xi \in S\}$ は上の (a) を満たす．そうでなければ，$C_2^s(\kappa)$ により，stationary な $S_0, S_1 \subseteq \kappa$ と $m, n \in \omega$ で，すべての異なる $\xi \in S_0$, $\eta \in S_1$ に対し，

$$A(\xi, m) \cap A(\eta, n) = \emptyset$$

となるようなものが存在する．このとき，$k = \max\{m, n\}$ として，$\mathcal{B}_0 = \{A_\xi : \xi \in S_0\}$, $\mathcal{B}_1 = \{A_\xi : \xi \in S_1\}$ とすれば，

$$(\bigcup \mathcal{B}_0) \cap (\bigcup \mathcal{B}_1) \subseteq k$$

となる．したがって，このような $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ が求めるものとなる． ❑ (Theorem 12)

Corollary 13 (Juhász, Soukup, Szentmiklóssy) $C_2^s(\kappa)$ が成り立つとする．このとき，κ-*Lusin gap* は存在しない．

Proof $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ を pairwise almost disjoint で $|\mathcal{A}| = \kappa$ となるものとする．このとき，Theorem 12 (a) はこの $\mathcal{A}$ に対し成り立たないから，Theorem 12 により，$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \in [\mathcal{A}]^\kappa$ で，$|(\bigcup \mathcal{B}_0) \cap (\bigcup \mathcal{B}_1)| < \aleph_0$ となるものが存在する．$b = \bigcup \mathcal{B}_0$ とすれば，$\mathcal{B}_0 \subseteq \{y \in \mathcal{A} : y \subseteq^* b\}$ かつ $\mathcal{B}_1 \subseteq \{y \in \mathcal{A} : y \subseteq^* \omega \setminus b\}$ となるから，$\mathcal{A}$ は Lusin gap ではない． ❑ (Corollary 13)

Corollary 14 *Ground model* に *random reals* を *continuum* 個つけ加えて得られるモデルでは，すべての $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ に対し，$C_2^s(\kappa)$ は成り立たない． ❑

5 Generic absoluteness

基数 κ, λ に対し，集合 S が (κ,λ)-family とは $|S| \leq \kappa$, $\forall a \in S$ $(|a| \leq \lambda)$ となることとする．$(<\kappa,<\lambda)$-family etc. も同様に定義する．

κ を cardinal として，P を p.o. とする．このとき，

$$\mathrm{BFA}_\kappa(P) \Leftrightarrow \text{for any } (\kappa,\kappa)\text{-family } \mathcal{D} \text{ of maximal antichains in } B = r.o.(P) \text{ and } p \in P, \text{ there is a } \mathcal{D}\text{-generic filter } G \text{ over } B = r.o.(P) \text{ with } p \in G.$$

$\mathcal{X}$ を任意の集合とするとき，

$$\Sigma_1(\mathcal{X})\text{-absoluteness for } P \Leftrightarrow \text{for any } a \in \mathcal{X} \text{ and any } \Sigma_1\text{-formula } \varphi(x), \varphi(a) \text{ holds if and only if } \Vdash_P \text{“}\varphi(a)\text{”}.$$

この用語により Lévy-Shoenfield absoluteness lemma は

$$\Sigma_1(\mathcal{H}(\omega_1))\text{-absoluteness (for any extension)}$$

とあらわせることに注意する（c.f. projective absoluteness for P は，$\mathcal{H}(\omega_1) \prec \mathcal{H}(\omega_1)^{V^P}$ ）

Theorem 15 (Bagaria, [2]) $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ として P を p.o.-set とする．このとき，次は同値となる： bfa-absoluteness

(1) $\mathrm{BFA}_\kappa(P)$;
(2) $\Sigma_1(\mathcal{P}(\kappa))$-absoluteness for P;
(3) $\Sigma_1(\mathcal{H}(\kappa^+))$-absoluteness for P.
(4) $\mathcal{H}((\kappa^+)^V) \prec_{\Sigma_1} \mathcal{H}((\kappa^+)^{V^P})^{V^P}$.

Corollary 16 (Bagaria, [2])
(a) $\mathrm{MA}_{\aleph_1} \Leftrightarrow \Sigma_1(\mathcal{H}(\aleph_2))$*-absoluteness for all c.c.c. p.o.-sets.*
(b) $\mathrm{MA} \Leftrightarrow \Sigma_1(\mathcal{H}(2^{\aleph_0}))$*-absoluteness for all c.c.c. p.o.-sets.*
(c) $\mathrm{BPFA} \Leftrightarrow \Sigma_1(\mathcal{H}(\aleph_2))$*-absoluteness for all proper p.o.-sets.*
(d) $\mathrm{BMM} \Leftrightarrow \Sigma_1(\mathcal{H}(\aleph_2))$*-absoluteness for all stationally* ($\subseteq \omega_1$) *preserving p.o.-sets*[10] .

Theorem 15,(4) により，たとえば，

$$\mathrm{BPFA} \Leftrightarrow \mathcal{H}(\aleph_2)^V \prec_{\Sigma_1} \mathcal{H}((\aleph_2)^{V^P})^{V^P} \text{ for all proper p.o. } P$$

となる．

Lemma 17 $\mathrm{BFA}_\kappa(P)$ なら P はすべての cardinal $\lambda \leq \kappa$ を保存する． bfa-kappa-pres

Proof これは次の Lemma 18 からも出るが，後で Theorem 15 の証明で用いるので，直接的な証明を与えておく．$B = r.o.(P)$ とする．Lemma が成り立たないとすると，

$$p \Vdash_{B^+} \text{“there are } \mu < \lambda \leq \kappa \text{ and onto mapping } f : \mu \to \lambda\text{”}$$

[10] BMM の consistency strength はまだ分かっていないらしい．

となる p がとれるから，$\dot{\mu}, \dot{\lambda}$ と $\dot{f}$ をこのような cardinals と mapping の P-names とする．このとき，

$$D^* = \Big(\{-p\} \cup \{\|\dot{\mu} = \nu\|_B \cdot p : \nu < \kappa\}\Big) \setminus \{0_B\},$$

$$D^{**} = \Big(\{-p\} \cup \{\|\dot{\lambda} = \nu\|_B \cdot p : \nu < \kappa\}\Big) \setminus \{0_B\}$$

として，各 $\alpha < \kappa$ に対し，

$$D_\alpha = \Big(\{-p\} \cup \{\|\dot{f}(\beta) = \alpha\|_B \cdot p : \beta < \kappa\}\Big) \setminus \{0_B\}$$

とする．$\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{D^*, D^{**}\}$ とすると，$\mathcal{D}$ は B の maximal antichains の (κ, κ)-family となるから，$\mathrm{BFA}_\kappa(P)$ により，$\mathcal{D}$-generic filter G over B が存在する．ところが，$\dot{f}^G$ は $\dot{\mu}^G$ から $\dot{\lambda}^G$ への onto mapping で $\dot{\mu}^G < \dot{\lambda}^G$ となるから矛盾である． □ (Lemma 17)

Lemma 18 $\mathrm{BFA}_\kappa(P)$ なら P はすべての $\lambda \leq \kappa$ の stationary subset を保存する． stat-preserving

Proof Theorem 15 を仮定して示す．“$S \subseteq \lambda$ is not a stationary subset of λ” は

$$\exists C\,[C \subseteq \lambda \ \wedge\ C \text{ is club } \wedge\ C \cap S = \emptyset\,]$$

とあらわせる．ここで上の式は S と λ をパラメタとして持つ Σ_1-文となっている．$\lambda \in \mathcal{P}(\kappa)$ だから，$\langle \lambda, S \rangle$ は $\mathcal{P}(\kappa)$ の元で code できる．したがって，$\Sigma_1(\mathcal{P}(\kappa))$-absoluteness により，$S \in V, S \subseteq \lambda$ に対し，$\Vdash_P$ “$S \subseteq \lambda$ is not a stationary subset of λ” なら，“$S \subseteq \lambda$ is not a stationary subset of λ” が成り立つことがわかる． □ (Lemma 18)

Lemma 19 asb-limit

(a) “$2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$” は Σ_2-formula であらわせる．

(b) $\mathcal{X}$ が c.c.c. p.o.s と σ-closed p.o.s を含むとき，$\Sigma_2(\emptyset)$-absoluteness for $\mathcal{X}$ は成り立たない．

(c) P が reals を付加するときには，$\Sigma_1(\mathcal{H}((2^{\aleph_0})^+))$-absoluteness は P に対し成り立たない．

Proof (a): “$2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$” は次のように表せる：

$$\exists X \exists Y \exists F\ [\ X \subseteq \mathcal{P}(\omega)\ \wedge\ Y \text{ is an ordinal}\ \wedge\ F : Y \overset{1\text{-}1}{\to} X\ \wedge\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Y$$
$$(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n-1} \alpha_i < \alpha_{i+1}\ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{n-1} \forall G\,(G : \alpha_i \to \alpha_{i+1}\ \to\ G \text{ is not a surjection}))\ ]$$

(b): (a) による．$\mathcal{X}$ が c.c.c. p.o.s と σ-closed p.o.s を含むとする．もし CH が成り立つなら，$P \in \mathcal{X}$ を $\neg$CH を force する c.c.c. p.o. とすると，Σ_1-文 “$2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$” は V で成り立たないが，V^P では成り立つ．したがって，$\Sigma_2(\emptyset)$-absoluteness for $\mathcal{X}$ は成り立たない．

もし CH が成り立たないなら，$Q \in \mathcal{X}$ を $2^{\aleph_0}$ を $\aleph_1$ に collapse する σ-closed な p.o. とすると，Σ_1-文 “$2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$” は V で成り立つが，V^Q では成り立たない．したがって，$\Sigma_2(\emptyset)$-absoluteness for $\mathcal{X}$ は成り立たない．

(c): $a = \mathcal{P}(\omega)$ とすると $a \in \mathcal{H}((2^{\aleph_0})^+)$ で，$V \models \forall x (x \subseteq \omega \to x \in a)$ だが，$V[G]$ ではこの文は成り立たない． □ (Lemma 19)

Proof of Theorem 15: 一般性を失うことなく，P は complete Boolean algebra B の positive elements からなる p.o.-set としてよい．

(3) $\Rightarrow$ (2): $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathcal{H}(\kappa^+)$ だからよい．

(2) $\Rightarrow$ (3): φ を Σ_1-formula として，$a \in \mathcal{H}(\kappa^+)$ とすると，$|\,trcl(a)\,| \leq \kappa$ となる．M を a を元として含む任意の濃度 κ の transitive set として，$x^* \in \mathcal{P}(\kappa)$ を structure $(M, \in, a)$ を code するものとする．このとき，

$$\varphi(a) \;\leftrightarrow\; \exists y \exists z \exists f\, [\, y \text{ is transitive } \;\wedge\; z \in y \;\wedge\; f \text{ is an isomorphism between } \langle y, \in, z\rangle \text{ and the structure on } \kappa \text{ coded by } x^* \;\wedge\; \varphi(z)\,]$$

とすると，この同値式は V の任意の (generic) extension で成り立つ．上の右辺はパラメタ $x^* \in \mathcal{P}(\kappa)$ を持つ Σ_1-文だから，(2) の仮定により absolute である．したがって左辺も absolute となる．

(1) $\Rightarrow$ (2): $\mathrm{BFA}_\kappa(P)$ を仮定する．$a \in \mathcal{P}(\kappa)$ として，$\varphi(x)$ を Σ_1-formula とする．bounded formula ψ に対し，φ は $\exists y \psi(y, x)$ という形をしているとする．$\varphi(a)$ が成り立てば，$\Vdash_P$ "$\varphi(a)$" となることは明らかである．

逆に，$p \in P$ で $a \in \mathcal{P}(\kappa)$ に対し，$p \Vdash_P$ "$\varphi(a)$" となると仮定する．G を V-generic over P で $p \in G$ となるものとして，$V[G]$ で考える．Lemma 17 により，κ は $V[G]$ でも cardinal だから，Löwenheim-Skolem downwards 定理により十分に大きな λ に対し，濃度 κ の $M \prec \mathcal{H}(\lambda)$ で，$\kappa \subseteq M$, $a \in M$ となるものがとれる．このとき，$M \models \varphi[a]$ である．したがって，$b \in M$ で $M \models \psi[b, a]$ となるものが存在する．$f : \langle M, \in\rangle \cong \langle \kappa + \kappa, E\rangle$ を $f \restriction \kappa = id_\kappa$, $f(a) = \kappa$ となるものとする．$h : \kappa \to \kappa + \kappa$ を canonical な 1-1 onto mapping とする．$\langle \kappa + \kappa, E\rangle$ は well-founded だから，各 $\gamma < \kappa$ に対し，$g_\gamma : h''\gamma \to \kappa$ で，

$$\alpha, \beta \in h''\gamma \;\wedge\; \alpha\, E\, \beta \quad\to\quad g_\gamma(\alpha) < g_\gamma(\beta)$$

となるようなものがとれる．

ここで V にもどって，$\dot{E}$, $\langle \dot{g}_\gamma : \gamma < \kappa\rangle$, $\dot{b}$ を，それぞれ E, $\langle g_\gamma : \gamma < \kappa\rangle$, $f(b)$ に対応する P-name とする．特に，E, $\langle g_\gamma : \gamma < \kappa\rangle$, $f(b)$ の上で述べた性質は，すべて p により P で force されるものとする．

$\mathcal{D}$ を次の (a), (b), (c) のタイプの P の maximal antichains からなる (κ, κ)-family とする：

(a) すべての $\alpha, \beta \in \kappa + \kappa$ に対する，$A_{\alpha,\beta} = \{\|\alpha \dot{E} \beta\|, \|\neg\alpha \dot{E} \beta\|\} \setminus \{0_B\}$,

(b) すべての $\gamma \in \kappa$ と $\alpha \in h''\gamma$ に対する，$B_{\gamma,\alpha} = \{\|\dot{g}_\gamma(\alpha) = \beta\| : \beta < \kappa\} \setminus \{0_B\}$,

(c) すべての formula η と $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \kappa + \kappa$ に対する

$$C_{\eta,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}} = \Big(\{\|\langle \kappa + \kappa, \dot{E}\rangle \models \neg\exists x \eta[x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]\|\} \cup \{\|\langle \kappa + \kappa, \dot{E}\rangle \models \eta[\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]\| : \alpha < \kappa + \kappa\}\Big) \setminus \{0_B\}.$$

G を $\mathcal{D}$-generic filter over P とすると，任意の formula η と $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \kappa + \kappa$ に対し，

$$\langle \kappa + \kappa, \dot{E}^G\rangle \models \eta[\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}] \quad\Leftrightarrow\quad p \Vdash_P \text{"}\langle \kappa + \kappa, \dot{E}^G\rangle \models \eta[\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}]\text{"} \text{ for some } p \in G$$

となることが η に関する帰納法で示せる．特に，$p \Vdash_P$ “$\langle \kappa+\kappa, \dot{E}\rangle \models \psi[\dot{b}, \kappa]$” により，$\langle \kappa+\kappa, \dot{E}^G\rangle \models \psi[\dot{b}^G, \kappa]$ で，$\langle \kappa+\kappa, \dot{E}^G\rangle$ は extensional となる．

(b) により $\langle \kappa+\kappa, \dot{E}^G\rangle$ は well-founded となるから，transitive collapse $\rho : \langle \kappa+\kappa, \dot{E}^G\rangle \to \langle N, \in\rangle$ がとれる．$\rho \restriction \kappa = id_\kappa$ により $\rho(\kappa) = a$ となるから，$N \models \psi[\rho(\dot{b}^G), a]$ である．ψ は bounded だったから，このことから $\psi(\rho(\dot{b}^G), a)$ が V で成り立つことがわかる．したがって，$\varphi(a)$ である．

(3) $\Rightarrow$ (4): G を V-generic over P とする．φ を Σ_1-formula として $a \in \mathcal{H}(\kappa^+)^V$ とする．

$\mathcal{H}(\kappa^+)^V \models \varphi[a]$ なら，$\mathcal{H}(\kappa^+)^{V[G]} \models \varphi[a]$ となることは明らかである．

逆に $\mathcal{H}(\kappa^+)^{V[G]} \models \varphi[a]$ とすると，

$$V[G] \models \exists M\ [M \text{ is transitive and extensional } \wedge\ M \models \varphi[a]\,]$$

となるから，(3) により，

$$V \models \exists M\ [M \text{ is transitive and extensional } \wedge\ M \models \varphi[a]\,]$$

となる．φ が Σ_1 だったことを思い出すと，このことから $V \models \varphi[a]$ が帰結できる．したがって（後出の Lemma 24 により） $\mathcal{H}(\kappa)^V \models \varphi[a]$ である．

(4) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{D}$ を $P = \langle P, \leq^P\rangle$ の antichain の (κ, κ)-family とする．λ を十分に大きくとり，$P, \mathcal{D} \in \mathcal{H}(\lambda)$ となるようにする．$M \prec \mathcal{H}(\lambda)$ を，$P, \mathcal{D} \in M$, $\mathcal{D} \subseteq M$, $\bigcup \mathcal{D} \subseteq M$, $|\,M\,| \leq \kappa$ となるようにとる．$\rho : M \to N$ を transitive collapse として，$P' = \rho(P)$ とし，$\leq^{P'} = \rho(\leq^P)$ とする．また，$\mathcal{D}' = \rho(\mathcal{D})$ とする．このとき，$\langle P', \leq^{P'}\rangle$ は p.o.-set となり，$\mathcal{D}' = \{\rho(A) : A \in \mathcal{D}\}$ で，$\mathcal{D}'$ の各元 $\rho(A)$ は $\rho(A) = \{\rho(a) : a \in A\}$ となり，これは $\langle P', \leq^{P'}\rangle$ での maximal antichain となる．P', $\leq^{P'}$, $\mathcal{D}' \in \mathcal{H}(\kappa^+)$ となることに注意する．

G を P 上 V-generic とすると，$V[G]$ で $\rho''(G \cap M)$ は $\mathcal{H}(\kappa^+)$ の元で，$\mathcal{D}'$-generic over P' となる．したがって，

$$V[G] \models \mathcal{H}(\kappa^+) \models \exists X\ [X \text{ is } \mathcal{D}\text{-generic filter over } P'\,]$$

となる．“$\exists X$ [...]” は Σ_1-formula だから，(4) により，同じ命題は V での $\mathcal{H}(\kappa^+)$ でも成り立つ．したがって P' 上の $\mathcal{D}'$-generic filter H が存在するが，$\hat{H}$ を $\rho^{-1}{}''H$ から生成される P 上の filter とすれば，$\hat{H}$ は $\mathcal{D}$-generic となる． ❑ (Theorem 15)

Theorem 20 (J. Bagaria, [2]) $\mathrm{BFA}_{\omega_1}(P) \Rightarrow \mathbf{\Sigma}^1_3$-absoluteness for $\{P\}$.

Proof $\mathrm{BFA}_{\omega_1}(P)$ を仮定して，φ を

$$\exists^1 x \forall^1 z \exists^1 v\ \psi(x, z, v, y_1, \ldots y_m)$$

の形をした Σ^1_3-formula とする．ただし ψ は arithmetical. 簡単のために $m = 1$ とする．$a \in {}^{\omega}\omega$ として，$\Vdash_P$ “$\mathcal{A}^2 \models \varphi[a]$” と仮定する．Lemma 17 により，$P$ は ω_1 を collapse しない．したがって，Schoenfield's Absoluteness Lemma により，

$$\Vdash_P \text{“}\exists x \in {}^{\omega}\omega\ [\,L_{\omega_1}[a, x] \models \text{“}\mathcal{A}^2 \models \forall^1 z \exists^1 v \varphi[x, z, v, a]\text{”}\,]\text{”}$$

となる．mapping $\alpha \mapsto L_\alpha[a,x]$ は $\langle a,x\rangle$ 上 Σ_1-definable だから，上の論理式は a, ω_1 上 Σ_1 である．したがって，Theorem 15 により，

$$V \models \exists x\, {}^\omega\omega\ [\, L_{\omega_1}[a,x] \models \text{“}\mathcal{A}^2 \models \forall^1 z \exists^1 v \varphi[x,z,v,a]\text{”}\,]$$

が成り立つ．したがって，$x_0 \in {}^\omega\omega \cap V$ で，

$$L_{\omega_1}[a,x_0] \models \text{“}\mathcal{A}^2 \models \forall^1 z \exists^1 v \varphi[x_0,z,v,a]\text{”}$$

となるものが存在する．ここでふたたび Shoenfield's Absoluteness Lemma を使うと，

$$\mathcal{A}^2 \models \forall^1 z \exists^1 v \varphi[x_0,z,v,a]$$

が V で成り立つことがわかり，$\mathcal{A}^2 \models \varphi(a)$ が帰結できる．

逆に，$V \models \text{“}\mathcal{A}^2 \models \varphi[a]\text{”}$ なら $\nVdash_P \text{“}\mathcal{A}^2 \models \varphi(a)\text{”}$ となることは Shoenfield's Absoluteness Lemma から明らか． □ (Theorem 20)

上の結果での Σ^1_3 は一般には Σ^1_4 で置き換えられない：

Theorem 21 (J. Bagaria) *Σ^1_3-absoluteness for random forcing* と *Σ^1_4-absoluteness for Cohen forcing* を仮定すると，ω_1 は *inaccessible to reals* になる．つまり，すべての $a \in {}^\omega\omega$ に対し，$\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ となる． abs->inacc

したがって，例えば L から出発して，通常のやり方で MA のモデル $L[G]$ を作ったときには，$\omega_1^L = \omega_1^{L[G]}$ だから，$L[G]$ では Σ^1_4-absoluteness for c.c.c. p.o.s は成り立たない．

Theorem 21 の証明のためには，次の Woodin による定理が必要になる：

Theorem 22 (Lemma 4 in Woodin [9]) V を ZFC のモデルとして，$S \in V$ を *reals* の *injective* な（V の意味で）*uncountable* な列とし，c を V 上 *Cohen* とする．このとき $V[c]$ は $L(S,c) = (L(S))[c]$ 上 *random* な *real* を含まない． woodin's-lemma

Proof λ を S の長さとして，$\langle \sigma_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \in L(S)$ を pairwise almost disjoint な $[\omega]^{\aleph_0}$ の元の列とする[11] ．${}^\omega 2$ の canonical な open base を $\langle I_k : k < \omega\rangle$ として enumerate しておく．この enumeration は open base の各元がそれぞれ無限回現れるようなものとする．

$c \in {}^\omega\omega$ を V 上 Cohen とする．つまり，V-generic な $P = \mathrm{Fn}(\omega,\omega)$ 上の ultrafilter G で $c = \bigcup G$ となるものが存在するものとする．

以下 $V[c]$ で考える．$f, g \in {}^\omega\omega$ を，$n \in \omega$ に対し，$f(n) = c(2n)$, $g(n) = c(2n+1)$ として定義する．f, g は $V[c]$ 上互いに generic となる，つまり，f は $V[g]$ 上 Cohen で，g は $V[f]$ 上 Cohen となる．

各 $\alpha < \lambda$ に対し，$g_\alpha = g \restriction \sigma_\alpha$ とする．$\alpha < \lambda, 1 \le n < \omega$ に対し，開集合 $O^n_\alpha \subseteq {}^\omega 2$ を，次のようにして定義する：まず，$\alpha < \lambda, 1 \le n < \omega$ に対し，$\langle k^{\alpha,n}_m : 1 \le m < \omega\rangle$ を，

$$k^{\alpha,n}_1 = \min\{k \in \sigma_\alpha : g_\alpha(k) = n\,,\, \mu(I_{f(k)}) < \tfrac{1}{n}\},$$
$$k^{\alpha,n}_{m+1} = \min\{k \in \sigma_\alpha : k > k_m, g_\alpha(k) = n, \mu(I_{f(k^{\alpha,n}_1)}) + \cdots + \mu(I_{f(k^{\alpha,n}_m)}) + \mu(I_{f(k)}) < \tfrac{1}{n}\}$$

[11] $L(S)$ は $L_0(S) = tc(\{S\})$ から出発して，$L_{\alpha+1}(S) = def(L_\alpha(S))$, $L_\delta(S) = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha(S)$ for a limit δ として定義される inner model だった．

となるように定義する — これは f と g の genericity により可能である．

$$O^n_\alpha = \bigcup_{1\le m<\omega} (I_{f(k^{\alpha,n}_m)})^{V[c]}$$

とする．$\langle k^{\alpha,n}_m : \alpha<\lambda, 1\le n, m<\omega\rangle \in L(S,c)$ である．特に各 $\alpha<\kappa$ に対し，$\langle O^n_\alpha : 1\le n<\omega\rangle$ は ${}^\omega\omega\cap L(S,c)$ の元でコードされた F_σ 集合の可算列となる．

$k^{\alpha,n}_m$'s の定義から，

$$\mu(O^n_\alpha)\le \frac{1}{n}$$

となる．したがって，

Claim 22.1 各 $\alpha<\lambda$ に対し，$O_\alpha=\bigcap_{1\le n<\omega} O^n_\alpha$ は ${}^\omega\omega\cap L(S,c)$ の元でコードされた *null set* となる． ⊣ (Claim 22.1) qqq-c1

Claim 22.2 すべての $u\in[\lambda]^{\ge\aleph_0}\cap V$ に対し，$\bigcup_{\alpha\in u} O^n_\alpha = ({}^\omega 2)^{V[c]}$ となる． qqq-c2

⊢ V で議論する．f, g, g_α etc. の standard な P-names を $\dot f$, $\dot g$, $\dot g_\alpha$ etc. とする．任意の $p\in P$ に対し，$p'\le p$ で

$$p'\Vdash_P \text{“there is a finite } u''\subseteq u \text{ such that } \bigcup_{\alpha\in u''}\dot O^n_\alpha = {}^\omega 2\text{”}$$

となるものがあることを示せば十分である．ただし，$\dot O^n_\alpha$ は O^n_α の standard な P-name である．

必要なら p を拡張して，ある $m\in\omega$ に対し，$\mathrm{dom}(p)=m$ となっているとしてよい．$u'\in[u]^{\aleph_0}$ で $\sigma_\alpha\cap m$, $\alpha\in u'$ がすべて同じになるようなものをとる．すべての $\alpha\in u'$ に対し，p は，$\dot k^{\alpha,n}_1,\dots,\dot k^{\alpha,n}_r$ を決定するとする．このとき，すべての $\alpha\in u'$ に対し，$\dot k^{n,\alpha}_1,\dots,\dot k^{\alpha,n}_r$ はそれぞれ等しくなるから，それらを $k_1,\dots,k_r$ とよぶことにする．

$$\frac{1}{n}-(\mu(I_{f(k_1)})+\cdots+\mu(I_{f(k_r)}))>\frac{1}{2^l}$$

となるような $l\in\omega$ をとる．$i_0,\dots,i_{2^l-1}\in\omega$ を，$k_r<i_0,\dots,i_{2^l-1}$ で $I_{i_0}, I_{i_1},\dots,I_{i_{2^l-1}}$ が $\{[s]: l(s)=l\}$ を enumerate しているようなものとする．互いに異なる $\alpha_0,\dots,\alpha_{2^l-1}\in u'$ をとる．$m^*\ge m$ を $\sigma_{\alpha_0}\setminus m^*,\dots,\sigma_{\alpha_{2^l-1}}\setminus m^*$ が pairwise disjoint となるようなものとする．$k^*_0\in\sigma_{\alpha_0}\setminus m^*,\dots,k^*_{2^l-1}\in\sigma_{\alpha_{2^l-1}}\setminus m^*$ をとり，$k^{**}=\max\{k^*_0,\dots,k^*_{2^l-1}\}+1$ とする．ここで，

$$\begin{aligned} p' = p \cup &\{\langle 2k^*_0, i_0\rangle,\dots,\langle 2k^*_{2^l-1}, i_{2^l-1}\rangle\}\\ &\{\langle 2k^*_0+1, n\rangle,\dots,\langle 2k^*_{2^l-1}+1, n\rangle\}\\ &\{\langle k,0\rangle : k\in k^{**}\setminus(m\cup\{2k^*_0, 2k^*_0+1, 2k^*_1, 2k^*_1+1,\dots,2k^*_{2^l-1}, 2k^*_{2^l-1}+1\})\}\end{aligned}$$

とすれば，

$$p'\Vdash_P \text{“}\dot O^n_{\alpha_0}\cup\cdots\cup\dot O^n_{\alpha_{2^l-1}}={}^\omega 2\text{”}$$

となる． ⊣ (Claim 22.2)

$r \in ({}^{\omega}2)^{V[c]}$ が $L(S,c)$ 上 random だったとして矛盾を導く．Claim 22.1 により，すべての $\alpha < \lambda$ と $1 \leq n < \omega$ に対し，$r \notin O_\alpha$ となる．したがって，V で，$\dot{r}$ を r の P-name, $\dot{O}^n_\alpha$ を O^n_α の P-name として，各 $\alpha < \lambda$ に対し，$p_\alpha \in P$ と $1 \leq n_\alpha < \omega$ で，

$$p_\alpha \Vdash_P \text{“}\dot{r} \notin \dot{O}^{n_\alpha}_\alpha\text{”}$$

となるものが存在する．P は可算で，λ は非可算だから，$u \in [\lambda]^{\geq \aleph_0}$, $p^* \in P$, $1 \leq n^* < \omega$ で，すべての $\alpha \in u$ に対し，$p_\alpha = p^*$, $n_\alpha = n^*$ となるようなものがとれるが，このとき，

$$p^* \Vdash_P \text{“}\dot{r} \notin \bigcup_{\alpha \in u} \dot{O}^{n^*}_\alpha\text{”}$$

となる．これは Claim 22.2 に矛盾である． ❑ (Theorem 22)

Proof of Theorem 21 : ω_1 が L で inaccessible でないと仮定して矛盾を導く．ω_1 が L で inaccessible でないなら，$x^* \in {}^{\omega}\omega$ で $L(x^*) \models \omega_1 = (\omega_1)^V$ となるものがとれる．任意の $y \in {}^{\omega}\omega$ に対し，論理式

$$\text{“there is a random real over } L(x^*, y)\text{”}$$

は Σ^1_3 である[12] ．この論理式は，V の random extension で成り立つから，absoluteness により，V でも成り立つ．したがって，Π^1_4-論理式

$$\forall y \in {}^{\omega}\omega \ (\text{there is a random real over } L(x^*, y))$$

が V で成り立つ，したがって，Σ^1_4-absoluteness for Cohen forcing によりこの論理式は V の Cohen extension $V[c]$ で y をこの V 上の Cohen real c としたもので成り立たなくてはならないが，これは Theorem 22 に矛盾である． ❑ (Theorem 21)

Fact 23 ¬CH または，$2^{\aleph_1} = \aleph_2$ なら $\mathrm{FA}(< 2^{\aleph_1}, \omega\text{-closed} + \text{c.c.c.})$ が成り立つ．

Proof ¬CH なら，すべての σ-closed c.c.c. c.B.a. は atomic になる [そうでないものがあったとすると，各 lebel が pairwise incompatible な downward にのびる ${}^{\omega\leq}2$ tree が作れるから，c.c.c. に矛盾．] $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ なら，$2^{<\aleph_1} = \aleph_1$ だが，σ-closed な p.o. に対しては，濃度 $\leq \aleph_1$ の dense sets の族 $\mathcal{D}$ が与えられたときには，inductive に $\mathcal{D}$-generic な filter が定義できる． ❑

[12] “there is a random real over $L(x^*, y)$” $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{H}(\aleph_1) \models \exists z \, \forall g \left(z \in {}^{\omega}\omega \ \wedge \ (g \in L(x^*, y) \ \wedge \ g \text{ codes a null set } N_g \ \rightarrow \ z \notin N_g) \right)$$

だが，$\mathcal{H}(\aleph_1) \models \cdots$ に現れる論理式は Σ_2 論理式だから，Proposition 6 により Σ^1_3 である．

6 Reflecting cardinal の特徴付け

Lemma 24 $\kappa < \lambda$ を cardinal s とする．このとき，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} \mathcal{H}(\lambda)$ が成り立つ．また， Sigma-1
このことから，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} V$ となることがわかる．

Proof φ を Σ_1-formula として，φ は，ある bounded (i.e. Δ_0) formula ψ により $\exists x \psi(x, y)$ とあらわされるとする．$a \in \mathcal{H}(\kappa)$ とする．$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi[a]$ なら，$\mathcal{H}(\kappa) \models \psi[b, a]$ となる $b \in \mathcal{H}(\kappa)$ が存在する．このとき ψ は bounded だから，absoluteness により，$\mathcal{H}(\lambda) \models \psi[b, a]$ となり，$\mathcal{H}(\lambda) \models \varphi[a]$ がわかる．

逆に $a \in \mathcal{H}(\lambda) \models \varphi[a]$ とすると，$M \prec \mathcal{H}(\lambda)$ で，$a \in M$, $trcl(a) \subseteq M$ かつ $|M| < \kappa$ となるものがとれる．$\rho : M \cong N$ を M の transitive collapse とすれば，$\rho(a) = a$ となるから，$N \models \varphi[a]$ となる．したがって，$b \in N$ で $N \models \psi[b, a]$ となるものがとれるが，$N \subseteq \mathcal{H}(\kappa)$ だから，ψ が bounded であることから $\mathcal{H}(\kappa) \models \psi[b, a]$ となり，$\mathcal{H}(\kappa) \models \varphi[a]$ が帰結できる． ❑ (Lemma 24)

Regular cardinal κ が reflecting とは，任意の $a \in \mathcal{H}(\kappa)$ と，任意の cardinal $\lambda \geq \kappa$ と，任意の論理式 φ に対し，$\mathcal{H}(\lambda) \models \varphi[a]$ なら，cardinal $\delta < \kappa$ で，$\mathcal{H}(\delta) \models \varphi[a]$ となるものが存在すること．

Proposition 25 (J. Bagaria (?), see [1]) Regular cardinal κ に対し，次は同値となる： reflecting-card

(a) κ は reflecting;
(b) $\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_2} V$;
(c) $V_\kappa \prec_{\Sigma_2} V$.

Proof (a) $\Rightarrow$ (b): κ を reflecting とする．$a \in \mathcal{H}(\kappa)$ として，$\mathcal{H}(\kappa) \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ とする．ただし，φ は bounded formula とする．$b \in \mathcal{H}(\kappa)$ を $\mathcal{H}(\kappa) \models \forall y \varphi[b, y, a]$ となるようなものとすると，Lemma 24 により，$\mathcal{H}(\kappa) \prec_{\Sigma_1} V$ だから，$V \models \forall y \varphi[b, y, a]$ となる．したがって，$V \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ となる．

逆に，$V \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ なら，十分に大きい $\lambda \geq \kappa$ に対し，$\mathcal{H}(\lambda) \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ とできる．κ が reflecting により，ある cardinal $\delta < \kappa$ で，$\mathcal{H}(\delta) \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ となるものがとれる．したがって，上のパラグラフでと同じ議論により，$\mathcal{H}(\kappa) \models \exists x \forall y \varphi[x, y, a]$ が帰結できる．

(b) $\Rightarrow$ (a): (b) が成り立っていると仮定する． 任意の formula φ と $a \in \mathcal{H}(\kappa)$ に対し，$\mathcal{H}(\lambda) \models \varphi[a]$ が，ある $\lambda \geq \kappa$ に対して成り立つとする．このとき，

$$V \models \exists \lambda \exists X \, [\lambda \text{ is a cardinal } \wedge \; X = \mathcal{H}(\lambda) \; \wedge \; X \models \varphi[a]]$$

となるが，$\models$ の右辺はパラメタ $a \in \mathcal{H}(\kappa)$ を持つ Σ_2-文だから，仮定により

$$\mathcal{H}(\kappa) \models \exists \lambda \exists X \, [\lambda \text{ is a cardinal } \wedge \; X = \mathcal{H}(\lambda) \; \wedge \; X \models \varphi[a]]$$

となる．したがって，$\delta < \kappa$ で，$\mathcal{H}(\delta) \models \varphi[a]$ となるものが存在する．

(b) $\Rightarrow$ (c): (b) を仮定する．κ は strong limit である： そうでなければ，ある $\lambda < \kappa$ に対し，$\mathcal{P}(\lambda) \notin \mathcal{H}(\kappa)$ となるから，

$$\mathcal{H}(\kappa) \models \forall y \exists x \, [x \subseteq \lambda \; \wedge \; x \notin y]$$

となるが，V ではこの $\lambda \in \mathcal{H}(\kappa)$ をパラメタとして持つ Σ_2-文は成り立たないから，これは (b) の仮定に矛盾である．κ は regular だったから $\mathcal{H}(\kappa) = V_\kappa$ となる[13]．したがって，$V_\kappa \prec_{\Sigma_2} V$ がわかる．

(c) $\Rightarrow$ (b): 上と同様に，(c) の仮定の下で κ が strong limit となることを示せばよい．なら，κ は limit ordinal だから，$\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa$ である．しがって，$V_\kappa \prec_{\Sigma_2} V$ の仮定により，

$$V_\kappa \models \exists \mu \exists f \ [\mu \in Ord \ \wedge \ f : \mu \to \mathcal{P}(\lambda) \text{ is onto}]$$

が成り立つ．$V_\kappa \cap Ord = \kappa$ だから，このことから $2^\lambda < \kappa$ がわかる． ❑ (Proposition 25)

Theorem 26 (J. Bagaria, S. Friedman[3]) 次は無矛盾等価である：

(0) Σ^1_3-absoluteness for all set forcing.

(1) Σ^1_3-absoluteness for $\{Coll(\omega, < \mu) : \mu \in \text{Card}\}$.

(2) There exists a reflecting cardinal.

Proof $consis(\text{ZFC} + (0)) \Rightarrow consis(\text{ZFC} + (1))$: 明らか．

$consis(\text{ZFC} + (1)) \Rightarrow consis(\text{ZFC} + (2))$: V が (1) を満たすとして，$\kappa = \omega_1$ とする．Proposition 25 により，次の (a) と (b) を示せば，これから $L \models \kappa$ is reflecting が帰結できる．

(a) $L \models \kappa$ is inaccessible （特にこのことから $L \models L_\kappa = V_\kappa$ が言える）

(b) $L_\kappa \prec_{\Sigma_2} L$.

(a): $\lambda < \kappa$ とすると，λ は V の countable ordinal となるから，λ (の order type) を code する real x_0 が存在する．φ を

$$\exists^1 x \ (x \text{ は } x_0 \text{ の code する ordinal よりも大きな ordinal } \alpha \text{ を code する}$$
$$\wedge \ L \models \alpha \text{ is a cardinal})$$

という文とする．φ はパラメタ x_0 を持つ Σ^1_3-文として表せる[14]． "$\mathcal{A}^2 \models \varphi$" は κ の濃度を countable に collapse する p.o. で force できるから，absoluteness の仮定から，$\mathcal{A}^2 \models \varphi$ は V で成立している．したがって，κ は L で limit cardinal となることがわかる．κ $(= (\omega_1)^V e)$ は V で regular だから，もちろん L でも regular である．

(b): ψ を Σ_2-formula とし，$x_1 \in L_\kappa$ とする．$L \models \psi[x_1]$ とする．ある countable ordinal α に対し，$x_1 \in L_\alpha$ となっているから，x_1 はある実数 $\hat{x}_1$ で code できる．したがって，$\hat{x}_1$ をパラメタとして持つ Σ^1_3-文 η：

$$\exists^1 x \ (x \text{ codes some } L_\alpha \ \wedge \ x_1 \in L_\alpha \ \wedge \ L_\alpha \models \psi[x_1] \ \wedge \ L \models \alpha \text{ is a cardinal})$$

---

[13] Regular cardinal κ に対し，$V_\kappa = \mathcal{H}(\kappa) \Leftrightarrow \kappa$ は strongly incaccesible となる (たとえば Kunen の教科書を参照)．

[14] 括弧の中は：

$$\neg\exists^1 y \ (y \text{ codes an infinite descending chain with respect to the well ordering } x \text{ codes}),$$
$$\forall^1 y \ (y \text{ codes a mapping} \in L \text{ with domain} < \alpha \ \to \ y \text{ is not a surjection onto } \alpha)$$

などにより実現できる (後者は Π^1_2 であることに注意 .) ．

が考えられる (これが Σ^1_3 とできることは前と同様にして分る) . "$\mathcal{A}^2 \models \eta$" は ($L_\mu \models \tilde{\eta}$ となるような cardinal μ を countable ordinal に force するような p.o. により[15]) force できる . したがって , absoluteness の仮定により , $\mathcal{A}^2 \models \eta$ は成立していることがわかる . $\alpha < \kappa\ (= \omega_1)$ を , $L_\alpha \models \psi[x_1], L \models \alpha$ is a cardinal となるようにとると , Lemma 24 と同様の証明により $L_\alpha \prec_{\Sigma_1} L_\kappa$ がわかるから , $L_\kappa \models \psi[x_1]$ がわかる .

逆に $L_\kappa \models \psi[x_1]$ とすると , 上と同様に $L_\kappa \prec_{\Sigma_1} L$ となっているから , $L \models \psi[x_1]$ である .

$consis(\mathrm{ZFC} + (2)) \Rightarrow consis(\mathrm{ZFC} + (0))$: κ を reflecting cardinal とする . Proposition 25 により , $V_\kappa \prec_{\Sigma_2} V$ である . $P = Coll(\omega, < \kappa)$ とする[16] . G を V-generic over P とする . $V[G] \models (0)$ を示す .

$\alpha < \kappa$ に対し , $P_\alpha = Coll(\omega, < \alpha)$ として , $G_\alpha = G \cap P_\alpha$ とする . H をある set forcing 上 $V[G]$-generic として , φ を Σ^1_3-formula とし , $x_0 \in {}^\omega\omega \cap V[G]$ とする . $V[G][H] \models \varphi[x_0]$ なら , P は κ-c.c. を満たすから , ある $\alpha < \kappa$ で $x_0 \in V[G_\alpha]$ となっているものがある . $\dot{x}_0$ を x_0 に対応する P_α-name とすると ,

$$V \models \exists \dot{Q}\ [\ \Vdash_{Coll(\omega,<\alpha)*\dot{Q}} \text{“}\mathcal{A}^2 \models \varphi[\dot{x}_0]\text{”}]$$

となるが , この文はパラメタ $\langle Coll(\omega, \alpha), \dot{x}_0 \rangle \in V_\kappa$ を持つ Σ_2-文である . したがって , κ が reflecting cardinal であることと reflecting cadinal の特徴付け Proposition 25 (c) により ,

$$V_\kappa \models \exists \dot{Q}\ [\ \Vdash_{Coll(\omega,<\alpha)*\dot{Q}} \text{“}\mathcal{A}^2 \models \varphi[\dot{x}_0]\text{”}]$$

となる . よって , $\dot{Q} \in V_\kappa$ で $\Vdash_{Coll(\omega,<\alpha)*\dot{Q}}$ "$\mathcal{A}^2 \models \varphi[\dot{x}_0]$" となるものが存在するが , $Coll(\omega, < \alpha) * \dot{Q}$ は $Coll(\omega, < \kappa)$ で countable p.o. に force されるから , $Coll(\omega, < \kappa)$ に completely embeddable である . したがって , $V \subseteq M \subseteq V[G]$ で $M \models \mathcal{A}^2 \models \varphi[\dot{x}_0]$ となるものがある . よって , Schoenfield's Asoluteness Lemma により , $V[G] \models \mathcal{A}^2 \models \varphi[\dot{x}_0]$ である . ∎ (Theorem 26)

[15] $\tilde{\eta}$ で η に対応する L での statement をあらわすことにする .

[16] $P = \{p : |p| < \aleph_0, \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega, \forall \langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)\ [p(\alpha, n) = 0 \ \vee\ p(\alpha, n) < \alpha]\}$ である .

7 Projective Absoluteness

We present here a proof of a result by K. Kunen which states that the projective absoluteness for c.c.c. p.o.s holds in the model obtained by Lévy collapsing a weakly compact cardinal to be ω_1 (Theorem 36). On the other hand, J. Bagaria and Sy Friedman showed that under the projective absoluteness for c.c.c. p.o.s, ω_1 is weakly compact in L (Theorem 39). Hence the projective absoluteness for c.c.c. p.o.s is equiconsistent with the existence of a compact cardinal.

Let

$$\mathcal{B} = \langle {}^{\omega}\omega \dot{\cup}\, \omega, \omega, +, \ldots, appl, \ldots \rangle$$

be the structure in the language $\mathcal{L}_{proj}$ where ω is thought to be a unary relation, $+$,... are functions on ω (e.g. defined to be constantly 0 elsewhere) $appl$ is defined by $appl(f,n) = f(n)$ for $f \in {}^{\omega}\omega$ and $n \in \omega$. Then for $X \subseteq ({}^{\omega}\omega)^n$, we have:

X is a projective set
$(\Leftrightarrow$ X is $\Sigma^1_n(a)$ for some $n \in \omega$ and $a \in {}^{\omega}\omega)$
$\Leftrightarrow$ X is definable in $\mathcal{B}$ with parameters from ${}^{\omega}\omega$
$(\Leftrightarrow$ there is some $\mathcal{L}_{proj}$-formula φ and $g_1, \ldots, g_m \in {}^{\omega}\omega$ such that
$X = \{\langle f_1, \ldots f_n\rangle \in ({}^{\omega}\omega)^n : \mathcal{B} \models \varphi[f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m]\})$
$\Leftrightarrow$ X is definable in $\langle \mathcal{H}(\aleph_1), \in\rangle$ with parameters from $\mathcal{H}(\aleph_1)$
$(\Leftrightarrow$ there is some $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$-formula φ and $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{H}(\aleph_1)$ such that
$X = \{\langle f_1, \ldots f_n\rangle \in ({}^{\omega}\omega)^n : \langle \mathcal{H}(\aleph_1), \in\rangle \models \varphi[f_1, \ldots, f_n, x_1, \ldots, x_m]\})$

The last equivalence follows from the next lemma:

Lemma 27 (a) *$\langle \mathcal{H}(\omega_1), \in\rangle$ is definable in $\mathcal{B}$ (i.e. there are $X \subseteq {}^{\omega}\omega$ and $R \subseteq ({}^{\omega}\omega)^2$ definable in $\mathcal{B}$ such that $\langle X, R\rangle \cong \langle \mathcal{H}(\omega_1), \in\rangle$).* projabsL1

(b) *$\mathcal{B}$ is definable in $\langle \mathcal{H}(\omega_1), \in\rangle$ (in the same sense as above).* □

By the observations above, the projective absoluteness of the model W for a class $\mathcal{C}$ of p.o.s (i.e. $\Sigma^1_n(a)$ absoluteness of W for all p.o.s from $\mathcal{C}$ for any $a \in {}^{\omega}\omega \cap W$ and any $n \in \omega$) amounts to the following assertion in W:

$(*)$ For any $P \in \mathcal{C}$, $\Vdash_P$ "$\mathcal{B}^W \prec \mathcal{B}$".

By Lemma 27, this is equivalent to:

$(*)'$ For any $P \in \mathcal{C}$, $\Vdash_P$ "$\langle \mathcal{H}(\aleph_1), \in\rangle^W \prec \langle \mathcal{H}(\aleph_1), \in\rangle$".

We shall call the weakening of $(*)$ the weak projective absoluteness (of W) for $\mathcal{C}$:

$(**)$ For any $P \in \mathcal{C}$, $\Vdash_P$ "$\mathcal{B}^W \equiv \mathcal{B}$".

The following theorem mentioned at the beginning is the main result of this section:

Theorem 28 *The following assertions are equiconsistent (over* ZFC*):* projabs-mainThm

(1) *the projective absoluteness for c.c.c. p.o.s.*
(2) *there exists a weakly compact cardinal.*

Proof consis(ZFC + (1)) $\Rightarrow$ consis(ZFC + (2)): by Theorem 39. consis(ZFC + (2)) $\Rightarrow$ consis(ZFC + (1)): by Theorem 36. □ (Theorem 28)

7.1 Lévy Collapse

For a cardinal λ and $S \subseteq \mathrm{On}$, let

$$Col(\lambda, S) = \{p : |\,p\,| < \lambda,\ \mathrm{dom}(p) \subseteq S \times \lambda,\ p(\alpha, \cdot) : \lambda \supseteq\!\!\rightarrow \alpha,\ (\text{or constantly 0 if } \alpha = 0)\}$$

be the partial ordering with the order defined by $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$. For a cardinal $\kappa > \lambda$, $Col(\lambda, \kappa)$ is also denoted by $Coll(\lambda, < \kappa)$ and called "the Lévy collapse of cardinals $< \kappa$ to λ".

Lemma 29 (Lemma 10.17 in Kanamori [7]) L10.17

(a) *$Col(\lambda, S)$ is $<\lambda$-closed.*

(b) *For $S = X \dot\cup Y$, $Col(\lambda, S) \cong Col(\lambda, X) \times Col(\lambda, Y)$.*

(c) *Suppose that $\kappa > \lambda$ is inaccessible. Then $Col(\lambda, \kappa)$ satisfies the $< \kappa$-c.c.*

(d) *$Col(\lambda, \kappa)$ preserves all cardinals $\leq \lambda$. $Col(\lambda, \kappa)$ collapses all cardinals μ with $\lambda < \mu < \kappa$. Hence if $Col(\lambda, \kappa)$ satisfies the $<\kappa$-c.c., then $Col(\lambda, \kappa)$ forces κ to be λ^+.*

(e) *Suppose that $Col(\lambda, \kappa)$ satisfies the $< \kappa$-c.c. For a V-generic filter G over $Col(\lambda, \kappa)$ and $g \in {}^{<\kappa}\mathrm{On} \cap V[G]$, there is a $\delta < \kappa$ such that $g \in V[G \cap Col(\lambda, \delta)]$.*

□

Lemma 30 (Lemma 10.20 in Kanamori [7]) *For an uncountable ordinal α, let P be a separative p.o. such that $|\,P\,| \leq |\,\alpha\,|$ and* L10.20

$$\Vdash_P \text{“}\exists f\ (f \text{ is a surjection from } \omega \text{ onto } \alpha)\text{”}.$$

Then there is a dense embedding of a dense subset of $Col(\omega, \{\alpha\})$ into P. Hence we have $r.o.(P) \cong r.o.(Col(\omega, \{\alpha\}))$.

Proof Let $\nu = |\,\alpha\,|$ and let $\dot f$ be a P-name such that $\Vdash_P \text{“}\dot f$ is a bijection from ω to α”.

Claim 30.1 *For any $p \in P$ there is a maximal antichain in $P\restriction p$ of size ν. In partitular $|\,P\,| = \nu$.*

$\vdash$ **Case I:** $\mathrm{cf}(\nu) = \omega$. Let ν_n, $n < \omega$ be regular cardinals below ν such that $\nu = \lim_{n\in\omega} \nu_n$. It is enough to show that

(†) for any $q \in P$ and $n \in \omega$, there is an antichain below q of size $\geq \nu_n$.

[Suppose that (†) holds. We can then take an antichain $\{p_n : n \in \omega\}$ in $P\restriction p$ and antichains A_n in $P\restriction p_n$ of size $\geq \nu_n$ for all $n \in \omega$. $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ is then an antichain below p of size $\geq \nu$.]

To show (†), let $p_{m,\xi} \leq q$ be such that $p_{m,\xi} \Vdash_P$ "$\dot{f}(m) = \xi$" (or undefined if there is no such $p_{m,\xi}$) for all $m \in \omega$ and $\xi < \nu$. Let

$$A_m = \{p_{m,\xi} : \xi < \nu,\ p_{m,\xi} \text{ is defined}\}$$

for all $m \in \omega$. Clearly A_m is an antichain below q and $|\bigcup_{m\in\omega} A_m| = \nu$ (note that for all $\xi < \nu$ there is some $m \in \omega$ such that $p_{m,\xi}$ is defined). Hence there is an $m \in \omega$ such that $|A_m| \geq \nu_n$.

Case II: $\mathrm{cf}(\nu) > \omega$. The proof in this case is similar to and easier than Case I.

⊣ (Claim 30.1)

Let

$$D_\alpha = \{p \in Col(\omega, \{\alpha\}) : \exists n \in \omega\, (p : \{\alpha\} \times n \to \alpha)\}.$$

D_α is dense in $Col(\omega, \{\alpha\})$. Let $\dot{g}$ be a P-name of a surjection from ω onto V-generic G over P (note that $|P| \leq |\alpha|$). For $n \in \omega$ let $D_{\alpha,n} = \{p \in D_\alpha : |p| = n\}$. Thus $D_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} D_{\alpha,n}$.

We define inductively a dense embedding e of D_α into P as follows.

Let $e(\emptyset) = 1_P$. Suppose that e is defined on $D_{\alpha,n}$. For each $p \in D_{\alpha,n}$, let $\langle a^p_\xi : \xi < \alpha\rangle$ be an injective enumeration of a maximal antichain in $P\restriction e(p)$ such that each a^p_ξ decides $\dot{g}(n)$ (this is possible by Claim 30.1). Let

$$e(p \cup \{\langle \alpha, n\rangle, \xi\}) = a^p_\xi.$$

By construction of a^p_ξ 's, we have:

Claim 30.2 *$\{a^p_\xi : p \in D_{\alpha,n}, \xi < \alpha\}$ is a maximal antichain in P for all $n \in \omega$.*

Now we are done by showing that $e''D_\alpha$ is dense in P: For $r \in P$, we have $r \Vdash_P$ "$r \in \dot{G}$". Hence there are $s \leq_P r$ and $n \in \omega$ such that $s \Vdash_P$ "$\dot{g}(n) = r$". By Claim 30.2, there is a $p \in D_{\alpha,n}$ such that $e(p)$ is compatible with s. As $e(p)$ also desides $\dot{g}(n)$, we have $e(p) \Vdash_P$ "$\dot{g}(n) = r$". Hence $e(p) \Vdash_P$ "$r \in \dot{G}$". By separability of P, it follows that $e(p) \leq r$. ❑ (Lemma 30)

With the same proof, we can actually show the following more general statement:

Lemma 31 *Suppose that λ is a cardinal, $\alpha \geq \lambda$, $\lambda^{<|\alpha|}$ and P is a separative $<\lambda$-closed p.o. such that $|P| \leq |\alpha|$ and*

$$\Vdash_P \text{"}\exists f\ (f \text{ is a surjection from } \lambda \text{ onto } \alpha \wedge f \notin V)\text{"}$$

Then there is a dense embedding of a dense subset of $Col(\lambda, \{\alpha\})$ into P. Hence we have $r.o.(P) \cong r.o.(Col(\lambda, \{\alpha\}))$.

Corollary 32 C10.20

(a) *For any $\alpha \geq \omega$, $r.o.(Col(\omega, \{\alpha\})) \cong r.o.(Col(\omega, \alpha + 1))$.*

(b) *For any $\alpha \geq \omega$, $r.o.(Col(\omega, \kappa)) \cong r.o.(Col(\omega, \kappa \setminus \alpha))$.*

7.2 Weakly compact cardinal

Theorem 33 *For a cardinal κ, the following are equivalent:* hanf-scott

(1) *κ is weakly compact.*

(2) (Hanf-Scott, see Theorem 6.4 in Kanamori [7]) *κ is Π^1_1-indescribable (i.e. for any $R \subseteq V_\kappa$ and any Π^1_1-sentence φ in $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$, if $\langle V_\kappa, \in, R\rangle \models \varphi$ then there is an $\alpha < \kappa$ such that $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha\rangle \models \varphi$).*

(3) *κ is uncountable and $\kappa \to (\kappa)^2_2$ holds i.e. for any $f : [\kappa]^2 \to 2$ there is $H \in [\kappa]^\kappa$ such that $f''[H]^2$ is a singleton.*

The proofs of the following propositions use these characterizations of the weak compactness.

Proposition 34 *Suppose that κ is weakly compact.* wc-levy

(a) *If B is a $< \kappa$-c.c. complete Boolean algebra, then for any $X \in [B]^{<\kappa}$, the complete subalgebra $[X]^{cm}_B$ of B generated from X has cardinality $< \kappa$.*

(b) *For a $Col(\omega, \kappa)$-name $\dot{P}$ such that*

$$\Vdash_{Col(\omega,\kappa)} \text{“}\dot{P} \text{ is a c.c.c. p.o.”}$$

and $X \subseteq Col(\omega, \kappa) * \dot{P}$ with $|X| < \kappa$, there is a regular subordering $Q \lessdot Col(\omega, \kappa) * \dot{P}$ of the form $Col(\omega, \alpha) * \dot{R}$ for some $\alpha < \kappa$ such that $X \subseteq Q$ and $|Q| < \kappa$.

Proof We prove (b). The proof of (a) can be done similarly. Since $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}$ has the $< \kappa$-c.c. we can find a $Col(\omega, \kappa)$-name $\dot{P}'$ such that $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}'$ is a regular subordering of $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}$ of cardinality $\leq \kappa$ and $X \subseteq Col(\omega, \kappa) * \dot{P}'$. Without loss of generality, we may assume that $\dot{P}'$, $\leq_{\dot{P}'} \subseteq V_\kappa$ and hence $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}'$, $\leq_{Col(\omega,\kappa)*\dot{P}'} \subseteq V_\kappa$. Then $X \in V_\kappa$ as $|X| < \kappa$. Let

$$\begin{aligned} R &= R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 \\ &= Col(\omega, \kappa) * \dot{P}' \times \leq_{Col(\omega,\kappa)*\dot{P}'} \times \{X\} \times \{\langle \alpha, \{A_\alpha\}\rangle : \alpha < \kappa\} \end{aligned}$$

where $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ is an enumeration of maximal antichains in $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}'$. Note that $A_\alpha \in V_\kappa$ by $<\kappa$-c.c. of $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}$. Now consider the Π^1_1-formula ψ which asserts:

> R_1 with R_2 is a partial ordering of the form $Col(\omega, \mathrm{On}) *$ something,
>
> R_3 is non-empty,
>
> For any maximal antichain A of (R_1, R_2) there is an $\alpha \in On$ such that A is the unique element of $R_4(\alpha)$.

Applying Theorem 33, we can find $\alpha < \kappa$ such that $\langle V_\alpha, R \cap V_\alpha\rangle \models \psi$. The subordering $\langle R_1 \cap V_\alpha, R_2 \cap V_\alpha\rangle$ of $Col(\omega, \kappa) * \dot{P}'$ is then as desired. □ (Proposition 34)

Proposition 35 *Suppose that κ is weakly compact. If P and Q are $<\kappa$-c.c. p.o.s then $P \times Q$ has the $<\kappa$-c.c.* wc-prod

Proof By (3) of Theorem 33

7.3 Main theorems

7.4 Main theorems

Theorem 36 (K. Kunen, [?]) *Suppose that κ is weakly compact, G a V-generic filter over* projabs1
$Col(\omega,\kappa)$ and H a $V[G]$-generic filter over a c.c.c. p.o. P in $V[G]$. Then we have

$$\mathcal{B}^{V[G]} \prec \mathcal{B}^{V[G][H]}.$$

Proof It is enough to show the following assertion for all $n \in \omega$ by induction on $n \in \omega$:

$(\dagger)_n$ For any V-generic G over $Col(\omega,\kappa)$, $\mathcal{L}_{proj}$-formula φ of quantifier rank $\leq n$ and $a_1,\ldots, a_n \in {}^{\omega}\omega \cap V[G]$,

$$V[G] \models \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n]$$

if and only if for some/any p.o. $P \in V[G]$ which is c.c.c. in $V[G]$ and $V[G]$-generic H over P,

$$V[G][H] \models \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n].$$

The crucial point in an induction step is to prove the following assertion:

$(*)_n$ Suppose that $(\dagger)_n$ holds. For any V-generic G over $Col(\omega,\kappa)$, $\mathcal{L}_{proj}$-formula $\varphi = \varphi(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ of quantifier rank n and $a_1,\ldots, a_n \in {}^{\omega}\omega \cap V[G]$, if

$$V[G][H] \models \mathcal{B} \models \exists x_0\, \varphi[x_0,a_1,\ldots,a_n]$$

for some $V[G]$-generic H over a c.c.c. p.o. $P \in V[G]$ then

$$V[G] \models \mathcal{B} \models \exists x_0 \varphi[x_0,a_1,\ldots,a_n].$$

To prove $(*)_n$, suppose that $(\dagger)_n$ holds and G, φ, $a_1,\ldots,$ a_n, P, H are as in $(*)_n$. Let $\dot{P}$ be a $Col(\omega,\kappa)$-name of P. By Proposition 34,(a), Corollary 32,(b) and since $(Col(\omega,\kappa) * \dot{P}) \restriction p$ is equivalent[17] to $Col(\omega,\kappa) *$ something for any $p \in Col(\omega,\kappa) * \dot{P}$, we may assume that $a_1,\ldots, a_n \in V$ and

$$\Vdash_{Col(\omega,\kappa)*\dot{P}} \text{“}\, \mathcal{B} \models \exists x_0\, \varphi[x_0,\check{a}_1,\ldots,\check{a}_n]\,\text{”}.$$

Let $\dot{a}_0$ be a $Col(\omega,\kappa) * \dot{P}$-name such that

$$\Vdash_{Col(\omega,\kappa)*\dot{P}} \text{“}\, \mathcal{B} \models \varphi[\dot{a}_0,\check{a}_1,\ldots,\check{a}_n]\,\text{”}.$$

By Proposition 34,(b), there is a regular subordering Q of $Col(\omega,\kappa) * \dot{P}$ of the form $Col(\omega,\alpha) * \dot{R}$ such that $\dot{a}_0$ is a Q-name and $|\,Q\,| = |\,\alpha\,| < \kappa$. Let $G_0 = G * H \cap Q$. Then there is a $Col(\omega,\kappa\setminus\alpha)$-name $\dot{S}$ of a c.c.c. p.o. in $V[G_0]$ and $V[G_0]$-generic $G_1 * H_1$ over $Col(\omega,\kappa\setminus\alpha) * \dot{S}$ such that $V[G][H] = V[G_0][G_1][H_1]$. In particular, $V[G_0][G_1][H_1] \models$

[17] Here, we say p.o.s P and P' are (forcing) equivalent (notation: $P \sim P'$) if they are co-complete, i.e. if $r.o.(P) \cong r.o.(P')$.

$\mathcal{B} \models \varphi[\dot{a}_0^{G_0}, a_1, \ldots, a_n]$. Since $Col(\omega, \kappa \setminus \alpha)$ is equivalent to $Col(\omega, \kappa)$, it follows by induction hypothesis that $V[G_0][G_1] \models \mathcal{B} \models \varphi[\dot{a}_0^{G_0}, a_1, \ldots, a_n]$. Since $V[G_0][G_1]$ is a generic extension of V by a generic filter over $Col(\omega, \kappa)$, it follows by homogeneity of $Col(\omega, \kappa)$ that

$$\Vdash_{Col(\omega,\kappa)} \text{“}\mathcal{B} \models \exists x_0 \varphi[x_0, \check{a}_1, \ldots, \check{a}_n]\text{”}.$$

□ (Theorem 36)

Theorem 37 *Suppose that κ is a weakly compact cardinal. Let $P = Col(\omega, \kappa)$ and $\dot{Q}$ be a P-name for a c.c.c p.o.-set and $\dot{R}$ a $P * \dot{Q}$-name for a c.c.c. p.o.-set. Suppose that G is a V-generic filter over P, H a $V[G]$-generic filter over $\dot{Q}^{V[G]}$ and F a $V[G][H]$-generic filter over $\dot{R}^{V[G][H]}$.*

Then we have:

$$\mathcal{B}^{V[G]} \prec \mathcal{B}^{V[G][H]} \prec \mathcal{B}^{V[G][H][F]}.$$

Proof The first “$\prec$” is just Theorem 36. For the second “$\prec$”, let $a_1, \ldots, a_n \in {}^{\omega}\omega \cap \mathcal{B}^{V[G][H]}$ and φ a formula such that

$$V[G][H][F] \models \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

We show that $V[G][H] \models \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Let $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n$ be $P * \dot{Q}$-names for $a_1, \ldots, a_n$. For $X \subseteq \kappa$, let F_X denotes the p.o. $Col(\omega, X)$. So $P = P_\kappa$.

By Proposition 34,(b), we can find $\alpha < \kappa$ and P_α-name $\dot{Q}_1$ of a p.o. such that $P_\alpha * \dot{Q}_1 \lessdot P * \dot{Q}$, $|P_\alpha * \dot{Q}_1| < \kappa$ and $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n$ are all $P_\alpha * \dot{Q}_1$-names. Then $P * \dot{Q}$ is equivalent to $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha} * \dot{S}$ over $P_\alpha * \dot{Q}_1$ for some $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha}$-name $\dot{S}$ of a c.c.c. p.o.-set. Hence $P * \dot{Q} * \dot{R}$ is equivalent to $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha} * \dot{S} * \dot{R}'$ where $\dot{R}'$ is a $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha} * \dot{S}$-name of a c.c.c. p.o.-set corresponding to $\dot{R}$.

Let U_1 be a V-generic filter over $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha}$, U_2 a $V[U_1]$-generic filter over $\dot{S}^{V[U_1]}$ and U_3 a $V[U_1][U_2]$-generic filter over $\dot{R}'^{V[U_1][U_2]}$ such that:

$$V[G * H \cap P_\alpha * \dot{Q}_1] \subseteq V[U_1] \subseteq V[U_1][U_2] = V[G][H] \subseteq V[U_1][U_2][U_3] = V[G][H][F].$$

Now since $P_\alpha * \dot{Q}_1 * P_{\kappa\setminus\alpha}$ is equivalent to $Col(\omega, \kappa)$ and $V[U_1][U_2][U_3]$ is an extension of $V[U_1]$ by a generic filter over a c.c.c. p.o.-set, it follows from Theorem 36 and $V[U_1][U_2][U_3] \models \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ that

$$V[U_1] \models \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\,.$$

Hence, again by Theorem 36

$$V[U_1][U_2] \models \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\,.$$

□ (Theorem 37)

Corollary 38 *If consis*(ZFC + ∃ a weakly compact cardinal), *then consis*(ZFC + MA + ¬CH + projective absoluteness for c.c.c. p.o.s), *consis*(ZFC + $\mathcal{P}(\omega)$ has the WFN + ¬CH + projective absoluteness for c.c.c. p.o.s), *etc.* □

Theorem 39 (J. Bagaria, Sy Friedman, [3]) *If Σ^1_4-absoluteness for c.c.c. p.o.s holds then ω_1 is weakly compact in L.*

projabs2
bagaria-friedman-x

7.5 Measure and category under projective absoluteness

Theorem 40 *Suppose that strong projective absoluteness for c.c.c. p.o.s holds. Then:* q-m

(a) *every projective set is measurable.*

(b) *every projective set has Baire property.*

(c) *every projective set has Ramsey property.*

Proof (a): Suppose that $X \subseteq {}^{\omega}\omega$ is a projective set with $X = \{b \in {}^{\omega}\omega : \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}, b]\}$ for a fomula φ and $\bar{a} \in {}^{\omega}\omega$ where $\mathcal{B}$ is as at the beginning of this section.

Let P be a c.c.c. p.o. such that

$$\Vdash_P \text{“}add(measure) > (2^{\aleph_0})^V\text{”}$$

and G a V-generic filter over P. Since the assertion “$\varphi[\bar{a}, \cdot]$ defines a measurable set” can be formulated as a formula in the language of $\mathcal{B}$, it is enough by projective absoluteness to show that

$$X^* = \{b \in ({}^{\omega}\omega)^{V[G]} : \mathcal{B}^{V[G]} \models \varphi[\bar{a}, b]\}$$

is measurable in $V[G]$.

In the following, we work in $V[G]$:

Claim 40.1 *$Z^* = \{x \in {}^{\omega}\omega : x$ is not random over $V\}$ is a null set.*

$\vdash$ Note that

x is not random over $V \quad \Leftrightarrow$

there is a null-set Z coded by some $y \in ({}^{\omega}\omega)^V$ such that $x \in Z$

Hence we have

$$Z^* = \bigcup\{Z \subseteq {}^{\omega}\omega : Z \text{ is a null-set coded by some } y \in ({}^{\omega}\omega)^V\}.$$

The left side is the union of $(2^{\aleph_0})^V$ null-sets. Since $add(measure) > (2^{\aleph_0})^V$, it follows that the union is still a null-set. $\dashv$ (Claim 40.1)

By the claim above, it is enough to show that

$$X^{**} = X^* \cap \{x \in {}^{\omega}\omega : x \text{ is random over } V\}$$

is a measurable set.

Suppose that $x \in X^{**}$. x is then random over V. Hence there is a V-generic filter H_x over the random p.o. R ($= \mathcal{B}^*$ in [7]) such that $\bigcap\{U^{V[G]} : U \in H_x\} = \{x\}$ where $U^{V[G]}$ denotes the closed set in $V[G]$ corresponding to the closed set U in V. By $x \in X^*$, there is a closed set U in V such that $U \Vdash_R \text{“}\mathcal{B}^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\bar{a}, \dot{x}]\text{”}$ where $\dot{x}$ is the satndard name of the $\mathcal{B}$-generic real x. Conversely, if y is random over V such that $y \in U^{V[G]}$ for U as above, then clearly we have $y \in X^{**}$. Hence

$$X^{**} = \bigcup\{U^{V[G]} : U \text{ is a closed set in } V \text{ such that } U \Vdash_R \text{“}\mathcal{B}^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\bar{a}, \dot{x}]\text{”}\} \cap ({}^{\omega}\omega \setminus Z^*).$$

The set $\bigcup\{\cdots\}$ on the right side of the equation is the union of $(2^{\aleph_0})^V$ measurable sets. Hence X^{**} is also measurable. $\square$ (Theorem 40)

8 Two step iteration

この節では Kunen による projective absoluteness の結果の証明の細部で用いた議論の基礎付けのチェックを行う．

$Q \lessdot P$ とする[18]．G を V-generic over Q として，$p, q \in P$ に対し，

$$p \leq_{P,G} q \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G \forall r \leq p \ (r \perp q \to r \perp g)$$

(つまり "$p \cdot -q$" は G の意味で無視できる) とし，$P^0_G = \{p \in P : \exists g \in G \ (p \perp g)\}$, $P^+_G = P \setminus P^0_G$ とする．

まず復習から：

Lemma 41 *P, Q を $p.o.s$ として，$Q \leq P$ とする．このとき，*

$$Q \lessdot P \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } Q \text{ の } predense\ subset \text{ は } P \text{ でも } predense.$$

Proof "⇒": $Q \lessdot P$ を仮定する．$D \subseteq Q$ で D が P で predense でなかったとすると，$p \in P$ で D のどの元とも compatible でないようなものが存在する．q を p の Q への reduction とする．このとき，$d \in D$ で q と compatible なものがあったとすれば，$r \in Q$ を $r \leq_Q d, q$ となるようにとると，$r \not\perp p$ となるから，$d \not\perp p$ となってしまい，p のとり方に矛盾する．したがって，D は Q でも predense でない．

"⇐": $Q \lessdot P$ でなかったとすると，$p \in P$ で次を満たすものがある: どんな $q \in Q$ に対しても $r \in Q$ で $r \leq q \ \wedge \ r \perp p$ となるようなものが存在する．このとき

$$D = \{r \in Q : r \perp p\}$$

とすれば，D は Q で dense したがって predense となるが，$p \in P$ により，D は P では predense でない． □(Lemma 41)

以下では $Q \lessdot P$ を常に仮定する．

Lemma 42 *$p \in P$, $q \in Q$ とするとき，* q-x

$$q \Vdash_Q \text{"}p \in P^+_{\dot G}\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad q \text{ は } p \text{ の } Q \text{ への } reduction.$$

Proof "⇒": q が p の Q への reduction でなかったとすると，$r \in Q$ で $r \leq q \ \wedge \ r \perp p$ となるものが存在する．ところが，$r \Vdash_Q \text{"}\exists s \in \dot G \ (s \perp p)\text{"}$ となるから，$r \Vdash_Q \text{"}p \notin P^+_{\dot G}\text{"}$ となるから，$q \not\Vdash_Q \text{"}p \in P^+_{\dot G}\text{"}$ である．

"⇒": $q \not\Vdash_Q \text{"}p \in P^+_{\dot G}\text{"}$ とすると，$r \leq_Q q$ で $r \Vdash_Q \text{"}p \in P^0_{\dot G}\text{"}$ となるものがある．したがって，$s \in Q, s \not\leq r$ で $p \perp s$ となるものが存在する．このとき $s \leq r$ としてよい．

$s \leq q$ だから，q は p の Q への reduction ではないことがわかる． □(Lemma 42)

Lemma 43 (a) *$q \in Q$ として，$q \Vdash_Q \text{"}p, p' \in P^+_{\dot G} \ \wedge \ p \leq_{P,\dot G} p'\text{"}$ なら，$q^* \in P$ で，* q-a
$q^* \leq q, p, p'$ となるものが存在する．

(b) *$q \in Q$ として，$q \Vdash_Q \text{"}p, p', p'' \in P^+_{\dot G} \ \wedge \ p \leq_{P,\dot G} p', p''\text{"}$ なら，$q^* \in P$ で，*
$q^* \leq q, p, p', p''$ となるものが存在する．

[18] $Q \lessdot P \ \Leftrightarrow \ \forall q, q' \in Q (q \perp_Q q' \ \leftrightarrow \ q \perp_P q')$ and $\forall p \in P \exists q \in Q \forall r \in Q \ (r \leq q \to r \not\perp p)$. $p \in P$ に対し，$\forall r \in Q \ (r \leq q \to r \not\perp p)$ となるような $q \in Q$ を p の Q への reduction と呼ぶ．"a reduction" であることに注意．

Proof (a) は (b) の特別な場合と見なせるから，(b) を証明すれば十分である．

$q \Vdash_Q$ “$p \leq_{P,\dot{G}} p', p''$” により，

$$q \Vdash_Q \text{“}\exists g \in \dot{G} \forall r \leq_P p \ \Big((r \perp p' \to r \perp g) \ \wedge \ (r \perp p'' \to r \perp g) \Big) \text{”}$$

が成り立つ．したがって $q' \in Q$, $q' \leq q$ で

$$(*) \qquad \forall r \leq_P p \ \Big((r \perp p' \to r \perp q') \ \wedge \ (r \perp p'' \to r \perp q') \Big)$$

となるものがある．Lemma 42 により $q' \not\perp p$ だから，$p^\dagger \leq_P q', p$ となるような $p^\dagger \in P$ がとれる．$p^\dagger \leq_P p$ で，$p^\dagger \leq_P q'$ により $p^\dagger \not\perp q'$ だから，$(*)$ により，$p^\dagger \not\perp p'$ となる．したがって，$p^\ddagger \leq_P p^\dagger, p'$ がとれる．同様に，$p^\ddagger \leq_P p$ で， $p^\ddagger \leq_P q'$ により $p^\ddagger \not\perp q'$ だから，$(*)$ により，$p^\ddagger \not\perp p''$ となる．したがって，$p^* \leq_P p^\ddagger, p''$ となる $p^* \in P$ がとれるが，これが求めるようなものとなっている． ❑ (Lemma 43)

Lemma 44 $p \in P$, $q \in Q$ で $p \leq_P q$ とする． q-b

$q^* \in Q$ を p の Q への任意の *reduction* とする．このとき，p の *reduction* q^{**} で $q^{**} \leq_P q^*, q$ となるものが存在する．

Proof q^* を p の reduction とすると，$\forall r \in Q \ (r \leq_Q q^* \to r \not\perp p)$ である．特に，$q^* \not\perp p$ だから，$q^* \not\perp q$ である．$q^{**} \in Q$ を $q^{**} \leq_Q q^*, q$ となるようにとれば，q^* はふたたび p の reduction となるから，これが求めるようなものとなっている． ❑ (Lemma 44)

Lemma 45 P を *p.o.* として $p, q \in P$ とし， q-c

$$\forall r \in P \ (r \leq_P p \to r \not\perp q)$$

となっているとする．G が *V-generic filter over P* で $p \in G$ のとき，$q \in G$ である．

Proof

$$D = \{r \in P : (r \leq_P p \wedge r \leq_P q) \vee (r \perp p \wedge r \leq_P q) \vee (r \perp p \wedge r \perp q)\}$$

とする．仮定から $r \leq_P p \wedge r \perp q$ となるような $r \in P$ は存在しないから，D は P で open dense であることがわかる．$r \in D \cap G$ として，$r' \leq_P r, p$ とすると，$r \in D$ で $r' \leq_P p$ だから，$r \leq_P q$ となる．したがって $q \in G$ である． ❑ (Lemma 45)

$p, q \in P$ に対し，$p \sim_P q \ \Leftrightarrow \ \forall r \in P \ (r \perp p \ \leftrightarrow \ r \perp q)$ とする．

Corollary 46 $p, q \in P$ で，$p \sim_P q$ とする．このとき，任意の *V-generic filter G over P* に対し，$p \in G \ \Leftrightarrow \ q \in G$ となる． ❑

Lemma 47 $G \subseteq P$ が q-d

(a) G は上方向に閉じている；

(b) G の元は互いに *compatible*；

(c) 任意の *open dense* な $D \subseteq P$, $D \in V$ に対し，$D \cap G \neq \emptyset$,

を満たすとする．このとき G は *V-generic filter over P* となる．

Proof $p, q \in G$ に対し，$r \in G$ で $r \leq p, q$ となるものが存在することを言えばよい．

$$D = \{r \in P : (r \leq p \wedge r \leq q) \vee (r \leq p \wedge r \perp q) \vee (r \perp p \wedge r \leq q) \vee (r \perp p \wedge r \perp q)\}$$

とすれば，明らかに D は P で open dense となるから，(c) により，$r \in D \cap G$ がとれる．このとき，(b) により，$r \leq p \wedge r \leq q$ が成り立たなければならないことがわかる．

□ (Lemma 47)

Theorem 48 (a) *$\tilde{G}$ を V-generic over P とする．このとき，$G = \tilde{G} \cap Q$ は V-generic over Q となり，$\tilde{G}$ は $V[G]$-generic over $\langle P_G^+, \leq_{P,G}\rangle$ となる．また，$V[\tilde{G}] = V[G][\tilde{G}]$ である．*

(b) *G を V-generic over Q として，$\tilde{G}$ を $V[G]$-generic over $\langle P_G^+, \leq_{P,G}\rangle$ とするとき，$G = \tilde{G} \cap Q$ となり，$\tilde{G}$ は V-generic over P となる．*

Proof (a): まず $G = \tilde{G} \cap Q$ が V-generic filter over Q となることを示す．G が Lemma 47 の (a), (b) を満たすことは明らかだから，任意の open dense な $D \subseteq Q$, $D \in V$ に対し，$G \cap D \neq \emptyset$ となることを示せばよい．

$$\tilde{D} = \{p \in P : p \leq q \text{ for some } q \in D\}$$

とすれば，$\tilde{D}$ は P で dense となる: $r \in P$ を任意にとるとき，q を r の Q への reduction とする．D は Q で dense だから，$q \in D$ としてよい．このとき $q \not\perp r$ だから，$p \leq q, r$ が存在するが，$p \in \tilde{D}$ である．

したがって，$\tilde{G}$ の genericity から $g \in \tilde{G} \cap \tilde{D}$ がとれるが，$\tilde{D}$ の定義から $q \in D$ で $g \leq q$ となるものが存在する．このとき $q \in G \cap D$ である．

次に $\tilde{G}$ が $V[G]$-generic over P_G^+ となることを示す．$\tilde{g} \in \tilde{G}$ なら，$\tilde{g}$ はすべての $g \in G$ と compatible になるから，$\tilde{G} \subseteq P_G^+$ である．$\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{G}$ なら，$\tilde{r} \leq_P \tilde{p}, \tilde{q}$ となる $\tilde{r} \in \tilde{G}$ があるが，このとき $\tilde{r} \in P_G^+$ で，$\tilde{r} \leq_{P,G} \tilde{p}, \tilde{q}$ である．

$\tilde{p} \in \tilde{G}$, $\tilde{q} \in P_G^+$ で $\tilde{p} \leq_{P,G} \tilde{q}$ なら $\tilde{q} \in \tilde{G}$ となる: $\tilde{p} \leq_{P,G} \tilde{q}$ により，$g \in G$ で $\forall r \leq \tilde{p}\ (r \perp \tilde{q} \to r \perp g)$ となるものがある．$\tilde{r} \in \tilde{G}$ を $\tilde{r} \leq_P g, \tilde{p}$ となるようにとる．任意の $r \leq \tilde{r}$ に対し，$r \leq_P \tilde{p}$ かつ $r \leq_P g$ だから，$r \not\perp g$ となり，したがって $r \not\perp \tilde{q}$ である．したがって，Lemma 45 により $\tilde{q} \in \tilde{G}$ である．

$\dot{D}$ を Q-name で $\Vdash_Q$ “$\dot{D}$ is an open dense subset of $P_{\dot{G}}^+$” とする．このとき，$\dot{D}^{V[G]} \cap \tilde{G} \neq \emptyset$ が言えればよい．

$$D = \{p \in P : q \Vdash_Q \text{“}p \in \dot{D}\text{”} \text{ for all reduction } q \in Q \text{ of } p\}$$

とする．

Claim 48.1 *D は P の dense subset である．*

$\vdash$ $p_0 \in P$ として q_0 を p_0 の Q への reduction とする．Lemma 42 により $q_0 \Vdash_Q$ “$p_0 \in P_{\dot{G}}^+$” となるから，$q_1 \in Q$, $q_1 \leq_Q q_0$ と $p_1 \in P$ で，

$$q_1 \Vdash_Q \text{“}p_1 \leq_{P,\dot{G}} p_0 \ \wedge\ p_1 \in \dot{D}\text{”}$$

となるものが存在する．Lemma 43(a) により，$p_2 \in P$ で $p_2 \leq q_1, p_1, p_0$ となるものが存在する．このとき $p_2 \in D$ であることが言えれば証明が完了する: q を p_2 の reduction とする．もし $q \| \not\vdash_Q$ "$p_2 \in \dot{D}$" とすれば，$q' \in Q$, $q' \leq_Q q$ で $q' \| \vdash_Q$ "$p_2 \notin \dot{D}$" となるものがとれるが，q' は p_2 の reduction だから，Lemma 44 により $q'' \in Q$ で $q'' \leq_Q q', q_1$ となるものがとれる．$q_1 \| \vdash_Q$ "$p_1 \in \dot{D}$" と $p_2 \leq p_1$ により，$q'' \| \vdash_Q$ "$p_2 \in \dot{D}$" となる．ところが，$q'' \leq_Q q'$ だから，$q'' \| \vdash_Q$ "$p_2 \notin \dot{D}$" だからこれは矛盾である． $\dashv$ (Claim 48.1)

上の Claim と $\tilde{G}$ の genericity により $D \cap \tilde{G} \neq \emptyset$ となるから $p \in D \cap \tilde{G}$ とすれば，Lemma 45(b) により，p の Q への reduction q で $q \in G$ となるものが存在する．D の定義から，$q \| \vdash_Q$ "$p \in \dot{D}$" だから，$p \in \dot{D}^{V[G]}$ である．

(b): $g \in G$ とすると $1_P \leq_{P,G} g$ となるから $g \in \tilde{G}$ である．したがって，$G \subseteq \tilde{G}$ である．$p \in Q \setminus G$ なら $g \in G$ で $p \perp g$ となるものがあるから，$p \in P_G^0$ となり $p \notin \tilde{G}$ である．したがって $\tilde{G} \cap Q = G$ がわかる．

次に $\tilde{G}$ が V-generic filter over P であることを示す．$\tilde{G}$ が $\leq_P$ に関し上方向に閉じていることは明らかである．$\tilde{g}, \tilde{g}' \in \tilde{G}$ なら，$\tilde{G}$ が P_G^+ 上の filter であることから，$\tilde{g}'' \in \tilde{G}$ で，$\tilde{g}'' \leq_{P,G} \tilde{g}, \tilde{g}'$ となるものが存在する．したがって Lemma 43(b) により $\tilde{p} \leq_P \tilde{g}, \tilde{g}'$ となるような $\tilde{p} \in P$ が存在する．よって，Lemma 47 により，任意の open dense な $D \in V$, $D \subseteq P$ に対し，$D \cap \tilde{G} \neq \emptyset$ が言えれば $\tilde{G}$ が P 上 V-generic filter であることが帰結できる．

このためには $\tilde{D} = D \cap P_G^+$ が P_G^+ で $\leq_P$ の意味で dense になることを示せば十分である: $\tilde{D}$ が P_G^+ で $\leq_P$ の意味で dense でなかったとすると，$p \in P_G^+$ で $D \cap P{\restriction}p \subseteq P_G^0$ となるものが存在する．したがって，各 $r \in D \cap P{\restriction}p$ に対し，$g_r \in G$ で $r \perp g_r$ となるものが存在する．

$$E = \{q \in Q : q \text{ is either a reduction of some } r \in D \cap {\restriction} p \text{ or } q \perp p\}$$

とすると E は Q で dense となる．$p \in P_G^+$ だから，$q \in G \cap E$ をとると q はある $r \in D \cap P{\restriction}p$ の reduction でなくてはならない．ところが $r \perp g_r$ だから $q \perp g_r$ となってしまい矛盾である． $\square$ (Theorem 48)

Two step iteration の定義について復習しておく：
P を p.o. として，$\| \vdash_P$ "$\dot{Q}$ is a p.o." とする．このとき，

$$\alpha_{_P} = \min\{\beta : \forall p \in P\ \forall \dot{q} \in V^P \left(p \| \vdash_P \text{“} \dot{q} \in \dot{Q} \text{”} \ \rightarrow \right.$$
$$\left. \exists \dot{q}' \in V^P \cap V_\beta\ (p \| \vdash_P \text{“} \dot{q} = \dot{q}' \text{”}) \right)\}$$

として，

$$P * \dot{Q} = \{\langle p, \dot{q} \rangle : p \in P, \dot{q} \in V^P \cap V_{\alpha_{_P}}, p \| \vdash_P \text{“} q \in \dot{Q} \text{”}\}$$

上の半順序を，

$$\langle p_1, q_1 \rangle \leq \langle p_2, q_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \leq_P p_2 \ \wedge \ p_1 \| \vdash_P \text{“} \dot{q}_1 \leq_{\dot{Q}} \dot{q}_2 \text{”}$$

で定義する．R を $P * \dot{Q}$ の

$$\{\langle p, \dot{q} \rangle \in P * \dot{Q} : \| \vdash_P \text{“} \dot{q} \in \dot{Q} \text{”}\}$$

への制限とする．このとき，

Lemma 49 $P * \dot{Q} \sim R$.

Proof $\langle p, \dot{q}\rangle \in P * \dot{Q}$ としたとき，$\langle p', \dot{q}'\rangle \in R$ で $\forall t \in P * \dot{Q}\ (t \perp \langle p, q\rangle \ \leftrightarrow\ t \perp \langle p', q'\rangle)$ となるものが存在することを言えばよい．

$\dot{q}'$ を，$p \Vdash_P$ “$\dot{q}' = \dot{q}$” で，任意の $r \perp p$ となる $r \in P$ に対し，$r \Vdash_P$ “$\dot{q}' = 1_{\dot{Q}}$” となるような P-name とする．このとき，$\Vdash_P$ “$\dot{q}' \in \dot{Q}$” だから，$\langle p, \dot{q}'\rangle \in R$ となるが，これが求めるものである． □ (Lemma 49)

したがって，$P * \dot{Q}$ の定義での $p \Vdash_P$ “$q \in \dot{Q}$” は $\Vdash_P$ “$\dot{q} \in \dot{Q}$” で置き換えてもよい．

次の 2 つの Lemmas では，$P = P_1 \times P_2$ として，G_1 を V-generic filter over P_1 とする．p.o. P に対する P-names は Kunen の本でのように定義されているものとする．V での P-name $\dot{a}$ に対し，$V[G_1]$ での P_2-name $\pi_{G_1}(\dot{a})$ を，

$$\pi_{G_1}(\dot{a}) = \{\langle \pi_{G_1}(\dot{b}), p_2\rangle : \exists p_1 \in G_1\ (\langle \dot{b}, \langle p_1, p_2\rangle\rangle \in \dot{a})\}$$

により recursive に定義する．このとき，

Lemma 50 任意の $V[G_1]$-*generic filter* G_2 *over* P_2 と P-*name* $\dot{a}$ に対し，$V[G_1][G_2]$ で， q-f

$$\dot{a}^{V[G_1\times G_2]} = (\pi_{G_1}(\dot{a}))^{(V[G_1])[G_2]}$$

が成り立つ．

Proof $\dot{a}$ の rank に関する帰納法により示す：

$$\begin{aligned}\dot{a}^{V[G_1\times G_2]} &= \{\dot{b}^{V[G_1\times G_2]} : \langle \dot{b}, \langle p_1, p_2\rangle\rangle \in \dot{a} \text{ for some } \langle p_1, p_2\rangle \in G_1 \times G_2\}\\ &= \{\pi_{G_1}(\dot{b})^{(V[G_1])[G_2]} : \langle \pi_{G_1}(\dot{b}), p_2\rangle \in \pi_{G_1}(\dot{a}) \text{ for some } p_2 \in G_2\}\\ &= (\pi_{G_1}(\dot{a}))^{(V[G_1])[G_2]}.\end{aligned}$$

□ (Lemma 50)

Lemma 51 $p_2 \in P_2$, P-*names* $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n$ と *formula* φ に対し， q-g

$$p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\varphi(\pi_{G_1}(\dot{a}_1), \ldots, \pi_{G_1}(\dot{a}_n))\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \exists p_1 \in G_1\ \langle p_1, p_2\rangle \Vdash_P \text{“}\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)\text{”}.$$

Proof まず，$p_2 \Vdash_{P_2}$ “$\varphi(\pi_{G_1}(\dot{a}_1), \ldots, \pi_{G_1}(\dot{a}_n))$” を仮定する．すべての $p_1 \in G_1$ に対し，$\langle p_1, p_2\rangle \not\Vdash_P$ “$\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$” だったとすると，$p_1 \in G_1$ と $p_2' \in P_2$, $p_2' \le_{P_2} p_2$ で，

$$(*) \qquad \langle p_1, p_2'\rangle \Vdash_P \text{“}\neg\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)\text{”}$$

となるものがとれる．G_2 を $V[G_1]$-generic filter over P_2 で，$p_2' \in G_2$ となるものとすると，$G_1 \times G_2$ は V-generic over P で $V[G_1 \times G_2] = V[G_1][G_2]$ だから，仮定から，

$$V[G_1][G_2] \models \varphi[(\pi_{G_1}(\dot{a}_1))^{(V[G_1])[G_2]}, \ldots, (\pi_{G_1}(\dot{a}_n))^{(V[G_1])[G_2]}]$$

となる．ところが，$(*)$ により，

$$V[G_1][G_2] \models \neg\varphi[\dot{a}_1^{V[G_1\times G_2]}, \ldots, \dot{a}_n^{V[G_1\times G_2]}]$$

である．Lemma 50 によりこれは矛盾である．

次に，$p_1 \in G_1$ で $\langle p_1, p_2\rangle \Vdash_P$ “$\varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$” となるものがあると仮定する．$V[G_1]$ で，$p_2 \not\Vdash_{P_2}$ “$\varphi(\pi_{G_1}(\dot{a}_1), \ldots, \pi_{G_1}(\dot{a}_n))$” だとすると，$p_2' \le_{P_2} p_2$ で，

(†) $$p_2' \Vdash_{P_2} \text{“}\neg\varphi(\pi_{G_1}(\dot a_1),\dots,\pi_{G_1}(\dot a_n))\text{”}$$

となるものがとれる．G_2 を $V[G_1]$-generic filter over P_2 で $p_2' \in G_2$ となるものとすると，仮定により，

$$V[G_1][G_2] \models \varphi[\pi_{G_1}(\dot a_1),\dots,\pi_{G_1}(\dot a_n)]$$

となるが，一方 (†) により，

$$V[G_1][G_2] \models \neg\varphi[\pi_{G_1}(\dot a_1)^{(V[G_1])[G_2]},\dots,\pi_{G_1}(\dot a_n)^{(V[G_1])[G_2]}]$$

となる．Lemma 50 により，これは矛盾である． □ (Lemma 51)

Lemma 52 $\langle p,\dot q\rangle,\ \langle p',\dot q'\rangle \in P*\dot Q$ とするとき，$\exists p''\le_P p,p'\ (p''\Vdash_P \text{“}\dot q \not\perp_Q \dot q'\text{”}) \Leftrightarrow$ q-h
$\langle p,\dot q\rangle \not\perp_{P*\dot Q} \langle p',\dot q'\rangle$ となる．

Proof “⇒”: 仮定から，$p'''\le_P p''$ と P-name $\dot q''$ を $p'''\Vdash_P \text{“}\dot q''\le_P \dot q,\dot q'\text{”}$ となるようにとれるが，このとき，$\langle p''',\dot q\rangle \le_{P*\dot Q} \langle p,\dot q\rangle,\langle p',\dot q'\rangle$ である．

“⇐”: $\langle p'',\dot q''\rangle \le \langle p,\dot q\rangle,\langle \dot q'\rangle$ とすると，$p''\le_P p,\ p'$ で $p''\Vdash_P \text{“}\dot q''\le_{\dot Q}\text{”}\dot q,\dot q'$ だから，$p''\Vdash_P \text{“}\dot q\not\perp_{\dot Q}\dot q'\text{”}$ である． □

Proposition 53 $P=P_1\times P_2$ とする．P_1 と $P_1\times\{1_{P_2}\}$ を同一視することにより $P_1\lessdot P$ と考える．P_2 についても同様．$\dot Q$ を *p.o.* の P-*name* として，$\dot R$ を *p.o.* の P_1-*name* とする．

(a) $\Vdash_P \text{“}\dot R\lessdot\dot Q\text{”} \Leftrightarrow P_1*\dot R\lessdot P*\dot Q$.

(b) $P_1,\ P_2$ を *separative* として，$P_1*\dot R\lessdot P*\dot Q$ となっているとする．G_1 を V-*generic over* P_1, H_1 を $V[G_1]$-*generic over* $\dot R^{V[G_1]}$ とする．このとき $V[G_1][H_1]$ で *p.o.* の P_2-*name* $\dot S$ を適当にとると，$(P*Q)^+_{G_1*H_1} \sim P_2*\dot S$ とできる．

Proof (a): “⇒”: $\langle p,\dot q\rangle\in P*\dot Q$ とする．このとき，$p=\langle p_1,p_2\rangle$ として，$p'=\langle p_1,1_{P_2}\rangle$ とし，$\dot q'$ を $\dot q$ の $\dot R$ への reduction の P-name とする．つまり，$\dot R$ の元の P-name で，

$$\Vdash_P \text{“}\forall r\in\dot R\ (r\le\dot q'\to r\not\perp\dot q)\text{”}$$

となるものとする．$\dot q'$ は $\langle p',\dot q'\rangle\in P_1*\dot R$ となるように選ばれているとしてよい．

$\langle p'',\dot q''\rangle\in P_1*\dot R$ で，$\langle p'',\dot q''\rangle\le_{P_1*\dot R}\langle p',\dot q'\rangle$ とすると $p''\le_{P_1}p'$ だから $p''\not\perp_P p$ となる．また $p''\Vdash_P \text{“}\dot q''\le_{\dot Q}\dot q'\text{”}$ だから，$p''\Vdash_P \text{“}\dot q''\not\perp_{\dot Q}\dot q\text{”}$, したがって，Lemma 52 により，$\langle p'',\dot q''\rangle\not\perp_{P*\dot Q}\langle p,\dot q\rangle$ となる．したがって上の $\langle p',\dot q'\rangle$ は $\langle p,\dot q\rangle$ の reduction となっていることがわかる．

“⇐”: $\dot q$ を $\dot Q$ の元の P-name とするとき，$\Vdash_P \text{“there is a reduction of }\dot q\text{ to }\dot R\text{”}$ を言えばよい．仮定から，P_1 の元の maximal antichain A と $\dot R$ の元の P_1-names の族 $\langle\dot q_a : a\in A\rangle$ で，各 $a\in A$ に対し $\langle a,\dot q_a\rangle$ が $\langle 1_P,\dot q\rangle$ の $P_1*\dot R$ への reduction になっているようなものがとれる．$\dot R$ の元の P_1-name $\dot q'$ で，すべての $a\in A$ に対し $a\Vdash_{P_1}\text{“}\dot q'=\dot q_a\text{”}$ となるようなものをとる．このとき

$$\Vdash_P \text{“}\dot q'\text{ is a reduction of }\dot q\text{ to }\dot R\text{”}$$

が成り立つことを示す．$p \in P$ として $\dot{r}$ を $\dot{R}$ の元の P-name で $p \Vdash_P$ “$\dot{r} \leq_{\dot{Q}} \dot{q}'$” となっているものとする．$\dot{r}$ は P_1-name としてよい（より正確には $p^* \leq_P p$ と P_1-name $\dot{r}^*$ で $p^* \Vdash_P$ “$\dot{r}^* = \dot{r}$” となるものがとれるから，これらで p と $\dot{r}$ を置き換えればよい）．

このとき，A の maximality （と $P_1 \lessdot P$ ）により，$a \in A$ で $p \not\perp_P a$ となるものがあるが，$p' \in P_1$, $p' \leq_{P_1} a$ を p の reduction となるようにとれる（Lemma 44 を参照）．このとき $p' \Vdash_P$ “$\dot{r} \leq_{\dot{Q}} \dot{q}_a$” となるから，$\langle p', \dot{r} \rangle \leq_{P_1 * \dot{R}} \langle a, \dot{q}_a \rangle$ となる．$\langle a, \dot{q}_a \rangle$ は $\langle 1_{P_1}, \dot{q} \rangle$ の reduction だったから，$\langle p', \dot{r} \rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle 1_P, \dot{q} \rangle$ である．したがって，Lemma 52 により，$p'' \leq_P p'$ で，$p'' \Vdash_P$ “$\dot{r} \not\perp \dot{q}$” となるものが存在する．

(b): $V[G_1][H_1]$ で考える．$\pi_{G_1} : V^P \to (V[G_1])^{P_2}$ を Lemma 50 の前のようなものとする．P_2-name $\dot{S}$ を，P_2-name $\dot{r}$ に対し，

$$p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\dot{r} \in \dot{S}\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\dot{r} \in \pi_{G_1}(\dot{Q})\text{”} \ \wedge \ \forall v \in H_1 \ (p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{Q}) \models \dot{r} \not\perp \check{v}\text{”})$$

となるものとして，$\dot{S}$ 上の partial order の P_2-name $\leq_{\dot{S}}$ を，$p_2 \in P_2$ と P_2-name $\dot{r}, \dot{r}'$ に対し，

$$\begin{aligned} p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\dot{r} \leq_{\dot{S}} \dot{r}'\text{”} \quad \Leftrightarrow \ & p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\dot{r}, \dot{r}' \in \dot{S}\text{”} \wedge \\ & \exists v \in H_1 \ (p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{Q}) \models \forall r \leq \dot{r} \, (r \perp \dot{r}' \to r \perp \check{v})\text{”}) \end{aligned}$$

となるものとする．このとき，$(P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ の元 $\langle \langle p_1, p_2 \rangle, \dot{q} \rangle$ に $\langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q}) \rangle$ を対応させる写像 Φ は，$r.o.((P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1})$ から $r.o.(P_2 * \dot{S})$ への同型写像ををひきおこす．

このことの証明を以下で行う．簡単のために $(P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ の ordering を $\sqsubseteq$ で，$P_2 * \dot{S}$ の ordering を $\trianglelefteq$ で表すことにする．

Claim 53.1 $\langle \langle p_1, p_2 \rangle, \dot{q} \rangle \in (P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ なら，$\langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q}) \rangle \in P_2 * \dot{S}$ である．

$\vdash$ $\langle \langle p_1, p_2 \rangle, \dot{q} \rangle \in (P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ とすると，$(P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ の定義から，

$$\forall \langle \langle g_1, 1_{P_2} \rangle, \dot{h} \rangle \in G_1 * H_1 \ \Big(\langle \langle g_1, 1_{P_2} \rangle, \dot{h} \rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle \langle p_1, p_2 \rangle, \dot{q} \rangle \Big)$$

となる．特に，$\forall g_1 \in G_1 \ (g_1 \not\perp_{P_1} p_1)$ だから，$p_1 \in G_1$ である．$v \in H_1$ として，$\dot{v}$ を v の P_1-name とすると，

$$\langle \langle 1_{P_1}, 1_{P_2} \rangle, \dot{v} \rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle \langle p_1, p_2 \rangle, \dot{q} \rangle$$

となるから（$V[G_1][H_1]$ で）$\dot{v}^{V[G_1]} = v$ と Lemma 51 により，$p_2 \Vdash_{P_2}$ “$\pi_{G_1}(\dot{q}) \not\perp_{\pi_{G_1}(\dot{Q})} \check{v}$” となる．したがって，$p_2 \Vdash_{P_2}$ “$\pi_{G_1}(\dot{q}) \in \dot{S}$” で，このことから $\langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q}) \rangle \in P_2 * \dot{S}$ がわかる． $\dashv$ (Claim 53.1)

以上で $\Phi : (P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1} \to P_2 * \dot{S}$ となっていることが分かったが，

Claim 53.2 Φ は上射である．

$\vdash$ $\langle p_2, \dot{s} \rangle \in P_2 * \dot{S}$ とすると，$\langle \langle 1_{P_1}, p_2 \rangle, \dot{s} \rangle \in (P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ である（ただし，$P_2 \lessdot P$ と見て，$V^{P_2} \subseteq V^P$ と考える）: $\langle \langle g_1, 1_{P_2} \rangle, \dot{h} \rangle \in G_1 * H_1$ とする．$\pi_{G_1}(\dot{s}) = \dot{s}$, $\pi_{G_1}(\check{v}) = \check{v}$ となることに注意する．$\dot{S}$ の定義から，

$$\forall v \in H_1 \ (p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{Q}) \models \dot{s} \not\perp \check{v}\text{”})$$

となるから，Lemma 51 により $p_1 \in G_1$ で $\langle p_1, p_2\rangle \Vdash_P$ “$\dot{Q} \models \dot{s} \not\perp \check{v}$” となるものがある．$g_1 \in G_1$ だから，Lemma 52 により，$\langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{h}\rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle 1_{P_1}, p_2\rangle, \dot{s}\rangle$ となることがわかる．

明らかに $\Phi(\langle\langle 1_{P_1}, p_2\rangle, \dot{s}\rangle) = \langle p_2, \dot{s}\rangle$ である． $\dashv$ (Claim 53.2)

したがって次の Claim から定理が導かれる：

Claim 53.3 $\langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle,\ \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle \in (P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ に対し，$\langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle \sqsubseteq \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}\rangle \Leftrightarrow \langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q})\rangle \trianglelefteq \langle p_2', \pi_{G_1}(\dot{q}')\rangle$ が成り立つ．

$\vdash$ “$\Rightarrow$”: $\langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle \sqsubseteq \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}\rangle$ とすると，“$\sqsubseteq$” の定義から，$\langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{h}\rangle \in G_1 * H_1$ で

$$(\odot)\qquad \forall\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \le_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle \Big(\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle \to \langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{h}\rangle\Big)$$

となるものがある．ここで g_1 は小さくとりなおしてよいが，$(P * \dot{Q})^{+}_{G_1 * H_1}$ の定義から，$p_1,\ p_1' \in G_1$ となるので，$g_1 \le p_1, p_1'$ としてよい．$(\odot)$ と P_2 が separative であることから，$p_2 \le_{P_2} p_2'$ がわかる．したがって，$\langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q})\rangle \trianglelefteq \langle p_2', \pi_{G_1}(\dot{q}')\rangle$ をいうには，

$$p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{Q}) \models \forall r \le \pi_{G_1}(\dot{q})\ \Big(r \perp \pi_{G_1}(\dot{q}') \to r \perp \pi_{G_1}(\dot{h}))\Big)\text{”}$$

を示せばよい．Lemma 51 により，このことは，

$$\exists p_1 \in G_1\ \Big(\langle p_1, p_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{Q} \models \forall r \le \dot{q}\ (r \perp \dot{q}' \to r \perp \dot{h})\Big)\text{”}$$

と同値だが，p_1 として上の g_1 をとれば $(\odot)$ により，これが成り立っていることがわかる: $\langle g_1, p_2\rangle \not\Vdash_P$ “$\dot{Q} \models \forall r \le \dot{q}\ (r \perp \dot{q}' \to r \perp \dot{h})$” だったとすれば，$\langle p_1^*, p_2^*\rangle \le_P \langle g_1, p_2\rangle$ と P-name $\dot{r}^*$ で，

$$\langle p_1^*, p_2^*\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{Q} \models \dot{r}^* \le \dot{q}\ \wedge\ \dot{r}^* \perp \dot{q}'\ \wedge\ \dot{r}^* \not\perp \dot{h}\text{”}$$

となるものがある．このとき，$\langle\langle p_1^*, p_2^*\rangle, \dot{r}^*\rangle \le_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle$ となる．また Lemma 52 により，$\langle\langle p_1^*, p_2^*\rangle, \dot{r}^*\rangle \perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle$ で，$\langle\langle p_1^*, p_2^*\rangle, \dot{r}^*\rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{h}\rangle$ となる．これは，$(\odot)$ に矛盾する．

“$\Leftarrow$”: $\langle p_2, \pi_{G_1}(\dot{q})\rangle \trianglelefteq \langle p_2', \pi_{G_1}(\dot{q}')\rangle$ とすると，“$\trianglelefteq$” の定義から，$p_2 \le p_2'$ で

$$p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{q}) \le_{\dot{S}} \pi_{G_1}(\dot{q}')\text{”}$$

となる．後者は，“$\le_{\dot{S}}$” の定義から，

$$p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{q}), \pi_{G_1}(\dot{q}') \in \dot{S}\ \wedge\ \exists v \in H_1\Big(p_2 \Vdash_{P_2} \text{“}\pi_{G_1}(\dot{Q}) \models \forall r \le \pi_{G_1}(\dot{q})\ (r \perp \pi_{G_1}(\dot{q}') \to r \perp \check{v})\text{”}\Big)\text{”}$$

と同値である．したがって，Lemma 51 により，上のような v の P_1-name を $\dot{v}$ として，$g_1 \in G_1$ で，

$$(\text{ア})\qquad \langle g_1, p_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{Q} \models \forall r \le \dot{q}\ (r \perp \dot{q}' \to r \perp \dot{v})\text{”}$$

となるものがとれる．$p_1, p_1' \in G_1$ だから，$g_1 \leq p_1, p_1'$ としてよい．$\langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{v}\rangle \in G_1 * H_1$ だから，“$\sqsubseteq$” の定義により，

$$(\dagger) \qquad \forall\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \leq_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle \Big(\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle \rightarrow \langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{v}\rangle\Big)$$

が言えれば，これから $\langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle \sqsubseteq \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle$ が帰結できる．これを示すために，

$$(\text{イ}) \qquad \langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \leq_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1, p_2\rangle, \dot{q}\rangle$$

で $\langle\langle r_1, r_2, \dot{r}\rangle\rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{v}\rangle$ となるものをとる．必要なら，$\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle$ を $P * \dot{Q}$ でさらに小さくとりなおすことにより，

$$(\text{ウ}) \qquad \langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \leq_{P*\dot{Q}} \langle\langle g_1, 1_{P_2}\rangle, \dot{v}\rangle$$

となっていると仮定してよい．したがって，$\langle r_1, r_2\rangle \leq_P \langle g_1, p_2\rangle$ だから，(ア) により，

$$(\text{エ}) \qquad \langle r_1, r_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{Q} \models \forall r \leq \dot{q}\ (r \perp \dot{q}' \rightarrow r \perp \dot{v})\text{”}$$

となる．$g_1 \leq_{P_1} p_1'$ だから (ウ) により，$r_1 \leq_{P_1} p_1'$ である．

ここで (イ) により，$\langle r_1, r_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{r} \leq_{\dot{Q}} \dot{q}\text{”}$，また (ウ) により，$\langle r_1, r_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{r} \leq_{\dot{Q}} \dot{v}\text{”}$ だから，(エ) により，$\langle r_1, r_2\rangle \Vdash_P \text{“}\dot{r} \not\perp \dot{q}'\text{”}$ である．(イ) により，$r_2 \leq p_2$ で $p_2 \leq_{P_2} p_2'$ だから，$r_2 \leq p_2'$ である．したがって，Lemma 52 により，$\langle\langle r_1, r_2\rangle, \dot{r}\rangle \not\perp_{P*\dot{Q}} \langle\langle p_1', p_2'\rangle, \dot{q}'\rangle$ となる．以上で (†) が示せた． ⊣ (Claim 53.3)

□ (Proposition 53)

9 Theorem 39 の証明

以下の Facts と Propositions は主に Harrington and Shelah [4] からの引用である．

T を Aronszajn tree on ω_1 とする (i.e. T は ω_1-tree without ω_1-branch)．

$$P(T) = \{p \in \mathrm{Fn}(T, \mathbb{Q}) : p \text{ は order preserving}\}$$

$p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$ とする．$P(T)$ specializes T i.e. $P(T)$ adds an order preserving $F : T \to \mathbb{Q}$. これにより，T が Aronszajn であることが indestructible になることに注意．

Fact 54 $P(T)$ は *c.c.c.* を満たす．

Proof $P(T)$ の uncountable antichain $\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ があったとして矛盾を導く．Δ-lemma により，pairwise disjoint な $\hat{x}$, x_α, $\alpha < \omega_1$ があって，$\mathrm{dom}(p_\alpha) = \hat{x} \dot{\cup} x_\alpha$ となっているとしてよい．さらに，$p_\alpha \restriction \hat{x}$ は一定としてよい．また，$\alpha < \beta$ なら，すべての $t \in \hat{x}$, $t' \in x_\alpha$ $t'' \in x_\beta$ に対して，$ht(t) < ht(t') < ht(t'')$ が成り立つとしてよい．さらに，x_α, $\alpha < \omega_1$ はすべて同じサイズを持つとしてよい．このサイズを n として，$x_\alpha(0), \ldots, x_\alpha(n-1)$ を x_α の小さい順の enumeration とする．

$\alpha < \beta < \omega_1$ なら，仮定から $p_\alpha \cup p_\beta$ は $P(T)$ の元とならないから，

$$\exists i \in n\ \exists j \in n\ (x_\alpha(i) \text{ と } x_\beta(j) \text{ は compatible})$$

が成り立つ．$ht(x_\alpha(i)) < ht(x_\beta(j))$ だから，

$$\exists i \in n\ \exists j \in n\ (x_\alpha(i) <_T x_\beta(j))$$

である．

U を ω_1 上の uniform ultrafilter として，quantifier $a.e.\ x$ を，

$$\models a.e.\ x\ \varphi(x, \ldots) \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha \in \omega_1 : \models \varphi(\alpha, \ldots)\} \in U$$

という解釈で考えることにする．このとき，

$$\models a.e.\ \alpha\ a.e.\ \beta\ \exists i \in n\ \exists j \in n\ (x_\alpha(i) <_T x_\beta(j))$$

だから (U の completeness により)

$$\models \exists i \in n\ \exists j \in n\ a.e.\ \alpha\ a.e.\ \beta\ (x_\alpha(i) <_T x_\beta(j))$$

となる．$i^*, j* \in n$ を，

$$\models a.e.\ \alpha\ a.e.\ \beta\ (x_\alpha(i^*) <_T x_\beta(j^*))$$

となるようにとると，

$$X = \{\alpha \in \omega_1 : a.e.\ \beta\ (x_\alpha(i^*) <_T x_\beta(j^*))\} \in U$$

となる．$\alpha, \beta \in X, \alpha < \beta$ なら，$\gamma \in \omega_1$ で，$x_\alpha(i^*) <_T x_\gamma(j^*)$ かつ $x_\beta(i^*) <_T x_\gamma(j^*)$ となるようなものがとれる．したがって，T が tree であることと，$ht(x_\alpha(i^*)) < ht(x_\beta(i^*))$

から，$x_\alpha(i^*) <_T x_\beta(i^*)$ がわかる．したがって，$B = \{x_\alpha(i^*) : \alpha \in X\}$ は T での chain となるが，$|B| = \aleph_1$ だから，B は T の ω_1-branch を生成する．しかし，これは，T が ω_1-Aronszajn tree であることに矛盾である． ❑(Fact 54)

T を ω_1-Aronszajn tree で，hight 0 の元が $\aleph_0$ 個あるようなものとする．$\vec{d} = \langle d_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を ω の subsets の列とする．このとき，

$$P(T,\vec{d}) = \{p \in P(T) : \forall t \in \mathrm{dom}(p)\ (ht(t) = \omega\cdot\alpha \ \wedge\ p(t) \in \omega\ (\subseteq \mathbb{Q}) \to p(t) \in d_\alpha)\}$$

として，$p \leq_{P(T,\vec{d})} q \Leftrightarrow p \supseteq q$ とする．このとき，Fact 54 と同様に，

Fact 55 $P(T,\vec{d})$ は *c.c.c.* を満たす． ❑

Fact 56 G を $P(T,\vec{d})$ 上の *generic set* として，$F = \bigcup G$ とするとき， fact4

(0) $F : T \to \mathbb{Q}$.
(1) $d_\beta = \{F(t) : t \in T,\ ht(t) = \omega\cdot\beta\} \cap \omega$.
(2) $t \in T,\ ht(t) \in \mathrm{Lim}(\omega_1) \Rightarrow F(t) = \sup\{F(t') : t' <_T t\}$.

Proof G の genericity からよい． ❑(Fact 56)

Proposition 57 T を ω_1-*Aronszajn tree* として，$\vec{b} = \langle b_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を ω の *subsets* の列とする．このとき，*c.c.c. p.o* による V-*generic* G と $V[G]$ の *real* c で，$\vec{b} \in L[T,c]$ となるものが存在する． single-c

Proof $n \in \omega$ に対し，$\vec{d}_n = \langle d^n_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ および G_n と F_n を n に関する induction により，次のようにとる：

(1) $\langle d^0_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle = \vec{b}$;
(2) G_n は $V[G_0]\cdots[G_{n-1}]$-generic over $P(T,\vec{d_n})$;
(3) $F_n = \bigcup G_n$ （したがって $F_n : T \to \mathbb{Q}$）;
(4) d^{n+1}_α は $F_n \restriction T_{\omega\cdot(\alpha+1)}$ を[19] code する ω の部分集合[20] ．

P を上の (1) ∼ (4) に対応する長さ ω の FS-iteration の limit として，G を V-generic over P とする．G できまる $\langle d^n_\alpha : \alpha < \omega_1, n \in \omega \rangle$ を取り，c を $\{d^n_0 : n \in \omega\}$ を code する real とする．

以下でこの c が求めるようなものとなっていることを示す．このためには，$\langle d^n_\alpha : n \in \omega,\ \alpha < \omega_1 \rangle$ が $L[T,c]$ で uniform に定義可能であることが示せればよい．

$\langle d^n_\alpha : n \in \omega, \alpha < \beta \rangle \in L[T,c]$ が決まったとして，$\langle d^n_\beta : n \in \omega \rangle$ が $L[T,c]$ の中で $\langle d^n_\alpha : n \in \omega, \alpha < \beta \rangle$ から uniform に定義できることを示す．

$\beta = 0$ のときは，$\langle d^n_0 : n \in \omega \rangle$ は c により code されているからよい．

β が successor のとき，たとえば，$\beta = \alpha_0 + 1$ のときには，Fact 56 (1) により，

$$d^n_\beta = d^n_{\alpha_0+1} = \{F_n(t) : t \in T, ht(t) = \omega\cdot(\alpha_0+1)\} \cap \omega$$

---

[19] T_ξ で $\{t \in T : ht(t) < \xi\}$ をあらわすことにする．

[20] canonical な coding で，$F_n \restriction T_{\omega\cdot(\alpha+1)} \in L[d^{n+1}_\alpha]$ となるようなものををあらかじめ fix しておく．

だが，この右辺は，(4) により，$d^{n+1}_{\alpha_0}$ から算出できる．

β で が limit のときは，(4) により，$\langle d^{n+1}_\alpha : \alpha < \beta\rangle$ から $\langle F_n{\restriction} T_{\omega\cdot(\alpha+1)} : \alpha < \beta\rangle$ が再現できる．Fact 56 (1), (2) から，

$$d^n_\beta = \{F_n(t) : t \in T, ht(t) = \omega\cdot\beta\} \cap \omega = \{\sup\{F_n(t') : t' <_T t\} : t \in T_{\omega\cdot\beta}\} \cap \omega$$

として d^n_β が算出できるが，右辺は，$\langle F_n{\restriction} T_{\omega\cdot(\alpha+1)} : \alpha < \beta\rangle$ から算出できる．□(Proposition 57)

Proposition 58 L で κ が *regular* で *weakly compact* でない，とする．このとき，κ-*tree* $T \in L$ で，任意の *model* $K \supseteq L$ で T が κ-*branch* を持つなら，$K \models cf(\kappa) = \omega$ となるようなものが存在する． HaSh-claim5

Proof L で考える．κ は weakly compact でないから，κ-tree T_0 で κ-branch を持たないようなものが存在する（つまり κ-Aronszajn tree in L）．$T_0 \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\alpha$ としてよい．T を次のように定義する．

(1) $\eta = \langle\alpha, M, b\rangle \in T \Leftrightarrow \alpha < \kappa, M = L_\beta$ for some $\beta, b \in M, \alpha \subseteq M, M =$ (Skolem hull of $\alpha \cup \{\alpha\}$)^M and $b{\restriction}\alpha \in T_0$;

(2) $\langle\alpha', M', b'\rangle <_T \langle\alpha, M, b\rangle \Leftrightarrow$ (i) $\alpha' \geq \alpha$, (ii) $h : M \cong$ (transitive collapse of Skolem hull of $\alpha \cup \{b'\}$)$^{M'}$, (iii) $h(b) = b'$.

ある $K \supseteq L$ で T が κ-branch $\langle\alpha_\xi, M_\xi, b_\xi\rangle, \xi < \kappa$ を持つとすると，これに対応して direct system

$$h_{\xi,\xi'} : \langle\alpha_\xi, M_\xi, b_\xi\rangle \to \langle\alpha_{\xi'}, M_{\xi'}, b_{\xi'}\rangle, \qquad \xi < \xi' < \kappa$$

が考えられる．ここに，$h_{\xi,\xi'}$ は上の (2),(ii) での h に相当する写像である．この direct system の極限を $\mathcal{M}^* = \langle\alpha^*, M^*, b^*\rangle$ とする．もし M^* が well-founded なら，β^* をうまくとって $M^* = L_{\beta^*}$ となっているとしてよいが，このときには，上の (2),(iii) と $b^* \in L$ により，L に属す T の κ-chain が b^* から構成できてしまい，T のとりかたに矛盾する．したがって，M^* は non-well-founded であるが，各 $M_\xi, \xi < \kappa$ は well-founded だから，これは $cf(\kappa) = \omega$ でなければ不可能である． □(Proposition 58)

Proof of Theorem 39 : Theorem 21 により，ω_1 は，L 上 inaccessible to reals となる．もし L で ω_1^V が weakly compact でなければ，Proposition 58 により，ω_1-tree $T \in L$ で，すべての model $K \supseteq L$ で，T が ω_1-branch を持つなら，$cf^K(\omega_1) = \omega$ となるようなものがとれる．特に T は V で ω_1-Aronszajn tree である．したがって，$\vec{d} = \langle d_\alpha : \alpha < \omega_1^V\rangle$ を injective な reals の列とすると，Proposition 57 により，V での c.c.c. p.o. 上の V-generic な G と $c \in V[G]$ で，

$$V[G] \models L[T, c] \ni \vec{d}$$

となるものがとれる．$T \in L$ だったから，$L[T, c] = L[c]$ である．特に

$$V[G] \models L[c] \text{ は非可算個の reals を持つ}$$

だから，

$$V[G] \models \exists x \in {}^\omega\omega\Big(\ L[x] \text{ は非可算個の reals を持つ}\Big)$$

となるが，

$$\exists x \in {}^{\omega}\omega\Big(\ L[x] \text{ は非可算個の reals を持つ}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}(\omega_1) \models \varphi$$

となるような φ がとれる[21] ．（実は φ は Σ^1_3 sentence として書ける）．

ここで

$$V[G] \models \mathcal{H}(\aleph_1) \models \varphi$$

だから，projective absoluteness for c.c.c. により

$$V \models \mathcal{H}(\aleph_1) \models \varphi$$

となるが，すべての real c に対し，$L[c] \models \mathrm{GCH}$ だから，これは，ω_1^V が inaccessible in reals over L である（Theorem 21）ことに矛盾である． ❑ (Theorem 39)

[21] "there are uncountably many x satisfying ψ" は，$\mathcal{H}(\aleph_1)$ で，$\forall x \exists y(y \notin x \ \wedge \ \varphi(y, \ldots))$ とあらわせる．

10 Elementary submodels in generic extensions

Lemma 59 *Suppose that χ is a regular uncountable cardinal and $P \in \mathcal{H}(\chi)$ a p.o. Then for any V-generic filter G over P, we have:*

$$(\mathcal{H}(\chi))^{V[G]} = (\mathcal{H}(\chi))[G].$$

Proof Note that $\Vdash_P$ "χ is a cardinal" by $\chi > |P|$. Suppose that $\Vdash_P$ "$\dot{x} \in (\mathcal{H}(\chi))^{V[G]}$" for a P-name $\dot{x}$. We show, by induction on $rank(\dot{x})$, that there is $\dot{x}' \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$ such that $\Vdash_P$ "$\dot{x}' = \dot{x}$". By $\chi > |P|$ and since $\Vdash_P$ "$\dot{x} \in \left[(\mathcal{H}(\chi))^{V[G]}\right]^{<\chi}$", there is a sequence $\langle \langle \dot{y}_\alpha, p_\alpha \rangle : \alpha < \gamma \rangle$ for some $\gamma < \chi$ where $\dot{y}_\alpha$ is a P-name such that $\Vdash_P$ "$\dot{y}_\alpha \in \mathcal{H}(\chi)^{V[G]}$", $p_\alpha \in P$ for all $\alpha < \gamma$; $\{\langle \dot{y}_\alpha, p_\alpha \rangle : \alpha < \gamma\} \subseteq \dot{x}$ and

$$\Vdash_P \text{"}\dot{x} = \{\langle \dot{y}_\alpha, p_\alpha \rangle : \alpha < \gamma\}\text{"}$$

By induction hypothesis, there are $\dot{y}'_\alpha \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$, $\alpha < \gamma$ such that $\Vdash_P$ "$\dot{y}_\alpha = \dot{y}'_\alpha$" for each $\alpha < \gamma$. Letting $\dot{x}' = \{\langle \dot{y}'_\alpha, p_\alpha \rangle : \alpha < \gamma\}$, we have $\dot{x} \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$ and $\Vdash_P$ "$\dot{x} = \dot{x}'$".

Suppose now that $\dot{x} \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$. Then again by induction on $rank(\dot{x})$ we can prove that $\Vdash_P$ "$\dot{x} \in (\mathcal{H}(\chi))^{V[\dot{G}]}$". ❑ (Lemma 59)

Lemma 60 *Suppose that χ is a regular uncountable cardinal, $P \in \mathcal{H}(\chi)$ a p.o. and* q-i
$p \in P$. Let $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$ (Note that, by the previous lemma, we have $\Vdash_P$ "$\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in \mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]}$") and φ a $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$-formula. Then

$$p \Vdash_P \text{"}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{"}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"}.$$

Proof By induction on φ. The lemma is clear if φ is quantifier free.

The crucial step in the induction is to show the claim for φ of the form $\exists x \psi(x, \bar{y})$ assuming the lemma for ψ.

So suppose that $p \Vdash_P$ "$\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots \dot{a}_n]$". By the previous lemma, for any $q \leq_P p$, we can find $q' \leq_P q$ and $\dot{a}_{q'} \in \mathcal{H}(\chi)$ such that

$$q' \Vdash_P \text{"}\mathcal{H}(\chi)^V[\dot{G}] \models \psi[\dot{a}_{q'}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"}.$$

Since $|P| < \chi$ we can find $\dot{a} \in \mathcal{H}(\chi)$ such that $q' \Vdash_P$ "$\dot{a}_{q'} = \dot{a}$" for a maximal pairwise incompatible family of such $\dot{q}'$s as above. Clearly we then have: $p \Vdash_P$ "$\mathcal{H}(\chi)^V[\dot{G}] \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]$". By induction hypothesis it follows that

$$\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{"}\psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"}.$$

Hence $\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P$ "$\exists x\, \psi[x, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]$". I.e.

$$\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{"}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"}.$$

Conversely, suppose that

$$\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{"}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{"}.$$

Then by Maximal Principle in $\mathcal{H}(\chi)$, there is $\dot{a} \in V^P \cap \mathcal{H}(\chi)$ such that

$$\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{“}\psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}.$$

By induction hypothesis, it follows that $p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$. Hence

$$p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}.$$

□ (Lemma 60)

Lemma 61 χ を *regular uncountable cardinal* とする．$\sqsubseteq$ を $\mathcal{H}(\chi)$ 上の *well ordering* として，$M \prec \langle \mathcal{H}(\chi), \sqsubseteq \rangle$ とするとき[22] ， q-j

$$[M]^{\aleph_0} \cap M \textit{ is cofinal in } [M]^{\aleph_0} \quad \Leftrightarrow \quad [On \cap M]^{\aleph_0} \cap M \textit{ is cofinal in } [On \cap M]^{\aleph_0}$$

となる．

Proof “⇒” は明らかである．

“⇐”: $x \in [M]^{\aleph_0}$ とする．このとき，M の elementarity により，$\beta \in \omega_1 \cap M$ と $f \in M$ で，$f : \beta \to M$ で $f\text{“}\beta \supseteq x$ となっているようなものが存在する．各 $y \in x$ に対し，$f(\xi_y) = y$ となるような $\xi_y \in On \cap M$ をとり，$a = \{\xi_y : y \in x\}$ とすれば，$a \in [On \cap M]^{\aleph_0}$ だから，仮定により，$b \in [On \cap M]^{\aleph_0} \cap M$ で $a \subseteq b$ となるものがとれる．このとき，$x' = f\text{“}b$ とすれば，$x' \in [M]^{\aleph_0} \cap M$ で，$x \subseteq x'$ である． □ (Lemma 61)

Proper p.o. の定義の復習をしておく．P.o. P が proper とは，任意の / すべての十分に大きな regular な $\chi \in On$ に対し，club set $\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{H}(\chi)]^{\aleph_0}$ で，すべての $M \in \mathcal{C}$ に対し，

(1) $M \prec \mathcal{H}(\chi)$ and
(2) for any $p \in P \cap M$ there is $q \leq p$ such that q is (P, M)-generic

となるようなものが存在すること．ここに $q \in P$ が (P, M)-generic とは，for all $\dot{\alpha} \in V^P \cap M$, if $\Vdash_P \text{“}\dot{\alpha}$ is an ordinal” then $q \Vdash_P \text{“}\dot{\alpha} \in M$” となることであった．

Lemma 62 P を *proper p.o.* として，$\dot{a}$ を *ordinals* の *countable set* の P-*name* とする． q-k
このとき，$q \in P$ と $b \in [On]^{\aleph_0}$ で，$q \Vdash_P \text{“}\dot{a} \subseteq \check{b}$” となるものが存在する．

Proof $\Vdash_P \text{“}\dot{a} = \{\dot{\alpha}_n : n \in \omega\}$” とする．$\mathcal{C}$ を上の proper p.o. の定義でのようにとり，$M \in \mathcal{C}$ を $\dot{\alpha}_n \in M$ for all $n \in \omega$ となるようにとり，$q \in P$ を (P, M)-generic とすれば，$q \Vdash_P \text{“}\dot{a} \subseteq On \cap M$” となる． □ (Lemma 62)

Proposition 63 *Supose that χ is a regular uncountable cardinal and $P \in \mathcal{H}(\chi)$ a p.o. For a V-generic filter G over P and $M \prec \mathcal{H}(\chi)$ with $P \in M$, we have:*

(1) $M[G] \prec \mathcal{H}(\chi)^{V[G]}$.

Further, suppose that P is proper and satisfies the $\aleph_2$-c.c. Suppose also that M is elementary submodel of $\langle \mathcal{H}(\chi), \in, \sqsubseteq \rangle$ for a well ordering $\sqsubseteq$ of $\mathcal{H}(\chi)$ and $\omega_1 \subseteq M$. Then:

[22] $\alpha \in \mathcal{H}(\chi)$ のとき，$V_\alpha \in \mathcal{H}(\chi)$ と限らないため，V_χ での議論でのように V_α を standard な oberset として用いることができない．$\sqsubseteq$ はこれを補うために必要．

(2) $On \cap M = On \cap M[G]$.

(3) *If* $[M]^{\aleph_0} \cap M$ *is cofinal in* $[M]^{\aleph_0}$ *with respect to* $\subseteq$ *and* P *is proper then*

$$V[G] \models \Big[M[G]\Big]^{\aleph_0} \cap M[G] \text{ is cofinal in } \Big[M[G]\Big]^{\aleph_0}.$$

Proof (1): $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$-formula φ に関する帰納法で，

$(*)$ 任意の $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in V^P \cap M$ と $p \in P$ に対し，

$$p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad p \Vdash_P \text{“}M[\dot{G}] \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$$

を示せばよい．φ が $\exists x \psi(x, \bar{y})$ の形をしているときの induction step が問題となるので，これを示す：

まず，$p \Vdash_P \text{“}M[\dot{G}] \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ とすると，任意の $q \leq_P p$ に対し，$q' \leq_P q$ と $\dot{a} \in V^P \cap M$ で $q' \Vdash_P \text{“}M[\dot{G}] \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ となるものがある．帰納法の仮定から，$q' \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ となる．したがって，$q' \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ である．$q \leq_P p$ は任意だったから，このことから，$p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ がわかる．

次に，$p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ と仮定してみる．Lemma 60 により，

$$(**) \qquad \mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{“}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$$

である．$p \in M$ とは限らないので，以下のようなトリックが必要になる：

$$\mathcal{H}(\chi) \models \exists a \Big(a \in V^P \ \wedge \ \forall q \in P \ (q \Vdash_P \text{“}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”} \ \rightarrow \ q \Vdash_P \text{“}\psi[a, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”})\Big)$$

である．$\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n \in M$ だから，M の elementarity により，$\dot{a} \in V^P \cap M$ で，

$$\mathcal{H}(\chi) \models \forall q \in P \ (q \Vdash_P \text{“}\varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”} \ \rightarrow \ q \Vdash_P \text{“}\psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”})$$

となるものが存在する．このとき，$(**)$ により，$\mathcal{H}(\chi) \models p \Vdash_P \text{“}\psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ である．したがって，Lemma 60 により，$p \Vdash_P \text{“}\mathcal{H}(\chi)^{V[\dot{G}]} \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ となり，帰納法の仮定により，$p \Vdash_P \text{“}M[\dot{G}] \models \psi[\dot{a}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ となる．したがって，$p \Vdash_P \text{“}M[\dot{G}] \models \varphi[\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n]\text{”}$ である．

(2): Suppose that $\dot{\alpha}$ is a P-name for an ordinal. In $\mathcal{H}(\chi)$ for any $p \in P$, there are $q \leq_P p$ and countable set c of ordinals such that $q \Vdash_P \text{“}\dot{\alpha} \in c\text{”}$. Hence this assertion also holds in M. By $\aleph_2$-c.c. of P and $\omega_1 \subseteq M$, we can find $\{\langle p_\beta, c_\beta \rangle : \beta < \omega_1\} \in M$ such that p_β, $\{p_\beta : \beta < \omega_1\}$ is maximal pairwise incompatible, $c_\beta \in M$, $c_\beta \in [On]^{\aleph_0}$ $p_\beta \in P$, c_β is countable and $p_\beta \Vdash_P \text{“}\dot{\alpha} \in c_\beta\text{”}$. Then $\Vdash_P \text{“}\alpha \in \bigcup_{\beta<\omega_1} c_\beta\text{”}$. But $\bigcup_{\beta<\omega_1} c_\beta \subseteq On \cap M$

(3): Lemma 61 と (1) により，

$$V[G] \models [On \cap M[G]]^{\aleph_0} \cap M[G] \text{ is cofinal in } [On \cap M[G]]^{\aleph_0}$$

を言えばよい．$\dot{a}$ を $\Big([On \cap M[G]]^{\aleph_0}\Big)^{V[G]}$ の元の P-name とする．このとき，(2) により，$On \cap M = On \cap M[G]$ だから，$\dot{a}$ は $\Big([On \cap M]^{\aleph_0}\Big)^{V[G]}$ の元の P-name となっている．した

がって，Lemma 62 により，$a \in [On \cap M]^{\aleph_0} \cap M$ と $p \in G$ で $p \Vdash_P$ “$\dot{a} \subseteq \check{a}$” となるものがある．仮定から，$b \in [On \cap M]^{\aleph_0}$ で $a \subseteq b$ となるものがとれるが，$b \in \left([On \cap M[G]]^{\aleph_0}\right)^{V[G]}$ で，$\dot{a}^{V[G]} \subseteq b$ である． (Proposition 63)

上の Lemma 63 (2) で “$\aleph_2$-c.c.” は落とせない： $P = \mathrm{Fn}(\omega_1, \omega_2, <\aleph_2)$ とすると，P ha σ-closed だから proper だが，$\dot{f}$ を $(\omega_1)^V$ から $(\omega_2)^V$ への surjection の P-name として，$M \subseteq \mathcal{H}(\chi)$ を $\omega_1 \subseteq M$, $\dot{f} \in M$, $|M| = \aleph_1$ となるようにとれば，$V[G]$ で $On \cap M \neq \omega_2 = \{\dot{f}^{V[G]}(\alpha) : \alpha < \omega_1\} \subseteq On \cap M[G]$ となる．

References

[1] D. Asperó, Bounded forcing axioms and the continuum, Ph.D. Thesis.

[2] J. Bagaria, Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness, to appear in Archive for Mathematical Logic.

[3] J. Bagaria, S. Friedman,.

[4] L. Harrington, S. Shelah,.

[5] I. Juhász and K. Kunen, The power set of ω, elementary submodels and weakenings of CH, preprint.

[6] I. Juhász, L. Soukup and Z. Szentmiklóssy, Combinatorial Principles from adding Cohen reals, in Proceedings of Logic Colloquium (1995).

[7] A. Kanamori, The Higher Infinite, Springer–Verlag (1994).

[8] S. Todorcevic, .

[9] W.H. Woodin, On the consistency strength of projective uniformization, Proceedings of the Herbrand Symposium (1982), 365–384.