数学ノート 1999/2000

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

July 3, 2000

1 コンパクト空間の特徴付け

(柄戸君が見つけたもの . 江田さんに聞く):

Theorem 1 *A Hausdorff space $(X, \mathcal{O})$ is compact iff $(*)$ for any regular κ and any $f : \kappa \to X$ there is an $x^* \in X$ such that for any open neighborhood $O \in \mathcal{O}$ of x^* the set $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \in O\}$ is unbounded in κ.*

Proof "⇒": Suppose that $(*)$ does not hold. Then there are regular κ and $f : \kappa \to X$ such that for any $x \in X$ there is an open neighborhood $O_x \in \mathcal{O}$ of x so that $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \in O_x\}$ is bounded in κ. For $x \in X$ let $\beta_x < \kappa$ be such that $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \in O_x\} \subseteq \beta_x$.

Claim 1.1 *$\{O_x : x \in X\}$ is an open cover of X without any finite subcover.*

⊢ Clearly $\bigcup\{O_x : x \in X\} = X$. Suppose that $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$. Let $\alpha^* = \max\{\alpha_{x_0}, \ldots, \alpha_{x_{n-1}}\} + 1$. Then $f(\alpha^*) \notin O_{x_0} \cup \cdots \cup O_{x_{n-1}}$. ⊣ (Claim 1.1)

"⇐": Suppse that X is not compact. Let $\mathcal{C}$ be an open cover of X without any finite subcover. Take a sequence $\langle O_\xi : \xi < \gamma\rangle$ of elements of $\mathcal{C}$ such that (1) $\bigcup_{\xi<\beta} O_\xi \neq X$ for all $\beta < \gamma$; (2) $O_\xi \not\subseteq \bigcup_{\eta<\xi} O_\eta$ for all $\xi < \gamma$ and (3) $\bigcup_{\xi<\gamma} O_\xi = X$. Let γ be the least possible among such with the sequence $\langle O_\xi : \xi < \gamma\rangle$ as above. Then γ is a limit ordinal. Let $\kappa = \mathrm{cf}(\gamma)$ and $\langle \gamma_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ be a strictly increasing sequence with $\sup_{\alpha<\kappa} \gamma_\alpha = \gamma$. For $\alpha < \kappa$, let $U_\alpha = \bigcup_{\xi<\gamma_\alpha} O_\xi$. Then $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ is a strictly increasing sequence of open subsets of X and $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Let $f : \kappa \to X$ be such that

$$(\dagger) \qquad f(\alpha) \in X \setminus U_\alpha$$

for all $\alpha < \kappa$.

Claim 1.2 *For any $x \in X$ there is $O \in \mathcal{O}$ with $x \in O$ such that $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \in O\}$ is bounded.*

⊢ Let $\eta < \kappa$ be such that $x \in U_\eta$. Then by $(\dagger)$ we have $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \in U_\eta\} \subseteq \eta$. ⊣ (Claim 1.2)

❑ (Theorem 1)

Theorem 2 (Tychonoff) *Suppose that $X_i = (X_i, \mathcal{O}_i)$ is compact for all $i \in I$. Then $\prod_{i\in I} X_i$ is compact.*

Proof We use the previous characterization of the compactness. Let κ be a regular cardinal and let $f : \kappa \to \prod_{i\in I} X_i$ be an arbitrary mapping with

$$f(\alpha) = (f_i(\alpha))_{i\in I}$$

for all $\alpha \in \kappa$. By assumption, there is $x_i \in X_i$ for each $i \in I$ such that for any $O_i \in \mathcal{O}_i$ with $x \in O_i$, the set $\{\alpha \in \kappa : f_i(\alpha) \in O_i\}$ is unbounded in κ. Let $x^* = (x_i)_{i\in I}$, then for any open $O \subseteq X$ with $x^* \in O$, there is open sets $O_i \subseteq X_i$ and a finite set S such that $O_i = X_i$ for all $i \in X \setminus S$ and $x^* \in \prod_{i\in I} O_i \subseteq O$. Suppose that $S = \{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$. Then inductively we can find $\kappa \supseteq A_0 \supseteq \cdots \supseteq A_{n-1}$ such that A_k is cofinal in κ and $f_{i_k}[A_k] \subseteq O_{i_k}$ for $k = 0,\ldots, n-1$. Then $\{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \in \prod_{i\in I} O_i\} \supseteq A_{n-1}$. Hence the set on the left side is unbounded in κ. ❑ (Theorem 2)

2 CH の同値命題

Theorem 3 (Erdős, 1962) 次の命題は CH と同値である：
analytic functions の非可算な族 $\mathcal{F}$ ですべての $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在する．

Proof ¬CH を仮定する．$\mathcal{F}$ を analytic functions の非可算族とするとき，$z \in \mathbb{C}$ で $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が非可算になるようなものが必ず存在することを示す．f_α, $\alpha < \omega_1$ を $\mathcal{F}$ の互いに異なる元とする．$\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$ に対し，$S_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$ とすれば，$S_{\alpha,\beta}$ は可算となる [f, g を異なる analytic functons として，C を $\mathbb{C}$ の 0 の回りのある一定の半径の円盤とすると $\{z \in C : f(z) = g(z)\}$ は有限である — マクロラン展開を比較すればわかる]. したがって，仮定から， $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup\{S_{\alpha,\beta} : \{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2\}$ とすれば $S \neq \emptyset$ となる．$z^* \in S$ とすれば，$f_\alpha(z^*)$, $\alpha < \omega_1$ は互いに異なるから，$\{f(z^*) : f \in \mathcal{F}\}$ は非可算になることがわかる．

次に，CH を仮定して，非可算な analytic functions の族 $\mathcal{F}$ で，どの $z \in \mathbb{C}$ に対しても $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在することを示す．$\mathbb{C} = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ として，analytic functions の列 f_α, $\alpha < \omega_1$ を次を満たすように構成する：

$(*)$ すべての $\beta < \alpha$ に対し，$f_\alpha \neq f_\beta$ で，$f_\alpha(v_\beta)$ は (複素) 有理数．

これが可能であることは次のようにしてわかる: $f_\beta, \beta < \alpha$ が構成されたとき，$\{v_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{w_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおして，複素有理数 $\varepsilon_n > 0$, $n \in \omega$ を十分に早く 0 に収束するように適当にとって，

$$f_\alpha(z) = \varepsilon_0(z - w_0) + \varepsilon_1(z - w_0)(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) + \cdots$$

と定義することにより $(*)$ を満たすような f_α が構成できる．$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とすれば，$\mathcal{F}$ は求めるようなものとなっている． ❑ (Theorem 3)

Theorem 4 (Sierpiński) 次の命題は CH と同値である：
実平面 $\mathbb{R}^2$ の分割 $\mathbb{R}^2 = A \dot\cup B$ で，
(i) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ は可算となり，
(ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し $B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ は可算となる
ようなものが存在する．

Proof CH が成り立つとして，$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とする．このとき，$A = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha > \beta\}$, $B = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \leq \beta\}$ とすれば，$\mathbb{R}^2 = A \dot\cup B$ で，A, B は定理の (i), (ii) を満たす．

次に ¬CH として，$\mathbb{R}^2 = A \dot\cup B$ とする．A が (i) を満たすとして，$r_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \omega_1$ を互いに異なるものとする．このとき，

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : \langle r_\alpha, x\rangle \in A \text{ for some } \alpha < \omega_1\} \\ &= \bigcup\{\{x \in \mathbb{R} : \langle r_\alpha, x\rangle \in A\} : \alpha < \omega_1\} \end{aligned}$$

の濃度は，高々 $\leq \aleph_1$ である．したがって仮定により $\mathbb{R} \setminus C$ は空でないから，$x^* \in \mathbb{R} \setminus C$ をとれば，$\mathbb{R}^2 = A \dot\cup B$ とすれば，$B \cap (\mathbb{R} \times \{x^*\})$ は $\{(x_\alpha, x^*) : \alpha < \omega_1\}$ を含まなくてはならないから，可算ではありえない． ❑ (Theorem 4)

3 Generic ultrafilter

次の Proposition の証明の後半で次の事実を用いる ([Kanamori-book] の Lemma 0.3):

> *For a binary relation R with field X, R is well-founded iff there is a $\rho\colon X \to$ On which is order-preserving, i.e. if $\langle x, y\rangle \in R$, then $\rho(x) < \rho(y)$. In particular, "R is well-founded" is Δ_1^{ZF} and hence absolute for transitive $\in$-models of* ZF.

["R is well-founded" は , "$\forall X'(X' \subseteq X \wedge \ldots)$" という形でも "$\exists f(\forall x \in X \forall y \in X(\ldots))$" いう形でも表せることに注意する .]

Proposition 5 (Proposition 5 in [Foreman])*Suppose that $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ is a countably complete ideal. Then I is precipitous iff the following holds:* precipitous

Suppose that $X \subseteq Z$ is I-positive and $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega\rangle$ is such that $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}(Z)$, each $\mathcal{A}_n$ consists of representatives of a maximal antichain below $[X]_I$ (in $\mathcal{P}(Z)/I$) and that $\mathcal{A}_{n+1}$ is a refinement of $\mathcal{A}_n$ for all $n \in \omega$. Then there are $z \in Z$ and $A_n \in \mathcal{A}_n$ for all $n \in \omega$ such that $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ and $z \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$.

Proof Let G be a generic filter over $B = \mathcal{P}(Z)/I$. Suppose that V^Z/G is not well-founded. Then there are I-positive $X \subseteq Z$ and B-names $\dot{f}_n$, $n \in \omega$ such that

$$[X]_I \Vdash_B \text{“}\forall n \in \omega \Big[\dot{f}_n \in V \ \wedge\ \dot{f}_n : Z \to V \ \wedge\ V^Z/\dot{G} \models [\dot{f}_{n+1}] \in [\dot{f}_n] \Big]\text{”}.$$

This is equivalent to:

$$[X]_I \Vdash_B \text{“}\forall n \in \omega \Big[\cdots \ \wedge\ [\{z \in Z : \dot{f}_{n+1}(z) \in \dot{f}_n(z)\}]_I \in \dot{G} \Big]\text{”}.$$

For each $n \in \omega$, let $\mathcal{A}_n$ consists of representatives of a maximal antichain below $[X]_I$ such that for all $A \in \mathcal{A}_n$

(a) $[A]_I$ desides $\dot{f}_n$ and $\dot{f}_{n+1}$ to be f_n^A, $f_{n+1}^A \in V$;
(b) $\{z \in Z : f_{n+1}^A(z) \in f_n^A(z)\} \supseteq A$;
(c) $\mathcal{A}_{n+1}$ is a refinement of $\mathcal{A}_n$.

Suppose that there were $z \in Z$ and $A_n \in \mathcal{A}_n$ for each $n \in \omega$ such that $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ and $z \in A_n$ for all $n \in \omega$. For $n \in \omega$, we have $f_{n+1}^{A_n}(z) = f_{n+1}^{A_{n+1}}(z)$. Denoting this by z_{n+1} we obtain an $\in$-descending chain $z_1 \ni z_2 \ni z_3 \ni \cdots$. This is a contradiction.

Now suppose that $X \subseteq Z$ and $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega\rangle$ are as above but without such $z \in Z$ as in the proposition. Then, for each $z \in Z$, the set $\mathcal{B}_z = \{A \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n : z \in A\}$ is well-founded with respect to $\subseteq$. Hence there is a rank fanction $\rho_z : \mathcal{B}_z \to \alpha_z$. Let $\tilde{\rho}_z : \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n \to$ On be defined by:

$$\tilde{\rho}_z(A) = \begin{cases} \rho_z(A), & \text{if } z \in A, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For $n \in \omega$, let $\dot{f}_n$ be a B-name of a function on Z such that for each $z \in Z$ and $A \in \mathcal{A}_n$ $[A]_I \Vdash_B \text{“}\dot{f}_n(z) = \tilde{\rho}_z(A)\text{”}$. $[A]_I$ for $A \in \mathcal{A}_n$ desides $\dot{f}_n$ to be the ground model function $f_A : \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n \to$ On; $z \mapsto \tilde{\rho}_z(A)$. Hence we have $\Vdash_B \text{“}\dot{f}_n \in {}^Z V \cap V\text{”}$.

Claim 5.1 $[X]_I \Vdash_B$ "$V^Z/\dot{G} \models [\dot{f}_{n+1}] \in [\dot{f}_n]$". *for all* $n \in \omega$.

$\vdash$ Suppose that $[\emptyset]_I \neq [Y]_I \leq [X]_I$. Then there is $A \in \mathcal{A}_{n-1}$ such that $[\emptyset]_I \neq [A \cap Y]_I$. Let $A' \in \mathcal{A}_n$ be such that $A \subseteq A'$. We have:

$$[A \cap Y]_I \Vdash_B \text{"}\dot{f}_{n+1} = f_A \ \wedge \ \dot{f}_n = f_{A'}\text{"}.$$

Hence

$$[A \cap Y]_I \Vdash_B \text{"}\{z \in Z : \dot{f}_{n+1}(z) \in \dot{f}_n(z)\} \supseteq A\text{"}.$$

Since $[A \cap Y]_I \Vdash_B$ "$[A]_I \in \dot{G}$", it follows that $[A \cap Y]_I \Vdash_B$ "$V^Z/\dot{G} \models [\dot{f}_{n+1}] \in [\dot{f}_n]$". By density argument, it follows that $[X]_I \Vdash_B$ "$V^Z/\dot{G} \models [\dot{f}_{n+1}] \in [\dot{f}_n]$".

$\dashv$ (Claim 5.1)

❑ (Proposition 5)

イデアル $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ **が** disjointing property **を持つとは，**I **は** countably complete **で** $\mathcal{P}(Z)/I$ **の任意の** antichain $\mathcal{A}$ **に対し，**$\mathcal{A}$ **の** representatives **の族で** pairwise disjoint **なものが存在すること．**

Proposition 6 *If* $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *has the disjointing property then* I *is precipitous.* disjointing

Proof Suppose that $X \subseteq Z$ is I-positive and $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ is such that $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}(Z)$, each $\mathcal{A}_n$ consists of representatives of a maximal antichain below $[X]_I$ (in $\mathcal{P}(Z)/I$) and that $\mathcal{A}_{n+1}$ is a refinement of $\mathcal{A}_n$ for all $n \in \omega$. For each $n \in \omega$, let $\mathcal{A}'_n$ be representatives of the same maximal antichain below $[X]_I$ as the one $\mathcal{A}_n$ represents such that, for any $A \in \mathcal{A}_n$ and $A' \in \mathcal{A}'_n$ representing the same element in the maximal antichain, $A' \subseteq A$ and that the elements of $\mathcal{A}'_n$ are pairwise disjoint. The last condition is possible because of the disjointing property. By σ-completeness of I, $\bigcap\{\bigcup \mathcal{A}'_n : n \in \omega\}$ is non empty. Let $z \in \bigcap\{\bigcup \mathcal{A}'_n : n \in \omega\}$. For each $n \in \omega$ there is the unique $A'_n \in \mathcal{A}'_n$ with $z \in A'_n$. Then

$$A'_0 \supseteq_I A'_1 \supseteq_I A'_2 \supseteq_I \cdots .$$

Let A_n be the unique element of $\mathcal{A}_n$ such that $A_n =_I A'_n$. Then $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ satisfies the condition in Proposition 5. ❑ (Proposition 6)

Proposition 7 *Suppose that* $|Z| = \kappa$ *and* $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *is* κ*-complete and* κ^+*-saturated. Then* I *has the disjointing property. Hence, by Proposition 6,* I *is precipitous.* ❑

Proposition 8 *Suppose that* $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ *and* $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ *is an ideal. Then the following are equivalent:* normality

(1) *For any* $A \in I^+$ *(so* $A \subseteq Z$*) and any* $f : A \to X$ *such that* $f(a) \in a$ *for all* $a \in A$*, there exists* $B \in I^+$ *such that* $B \subseteq A$ *and* $f \restriction B$ *is constant.*

(2) *For any family* $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\} \subseteq I$, $\bigtriangledown \mathcal{A} \in I$. *(Remember:* $\bigtriangledown \mathcal{A} = \{z \in Z : \exists x \in z\, (z \in A_x)\}$*.)*

Proof (1)⇒(2) ($\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$): Suppose that $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\} \subseteq I$ is such that $\bigtriangledown\mathcal{A} \notin I$. Let $A = \bigtriangledown\mathcal{A}$ and $f : A \to X$ be such that $f(z) \in z$ with $z \in A_{f(z)}$. Suppose that there were $B \in I^+$ with $B \subseteq A$ and $x^* \in X$ such that $f\restriction B$ takes the constant value x^*. Then for any $z \in B$, $z \in A_{x^*}$, i.e. $B \subseteq A_{x^*}$. Since $A_{x^*} \in I$, this is a contradiction.

(2)⇒(1): Suppose that $A \in I^+$, $A \subseteq Z$ and $f : A \to X$ is regressive. For each $x \in X$ let $A_x = \{z \in A : f(z) = x\}$. If A and f are a counterexample to (1), then each A_x is in I. Let $C = \bigtriangledown\{A_x : x \in X\}$.

Claim 8.1 $C \supseteq A$.

⊢ If there is a $z \in A \setminus C$, then $z \in A$ and $\forall x \in z\,(f(z) \neq x)$. But this is a contradiction to the regressivity of f. ⊣ (Claim 8.1)

It follows that $C \notin I$ and hence $\{A_x : x \in X\}$ is a counter-example to (2). □ (Proposition 8)

上の Proposition の (1) (または (2)) が成り立ち，I が fine のとき (i.e. すべての $x \in X$ に対し，$\{A \in Z : z \notin A\} \in I$) I は normal ideal であるという．

Proposition 9 *Suppose that $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$, $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ is a normal ideal and $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ with $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\} = \{B_x : x \in X\}$. Then*

$$\bigtriangleup\{A_x : x \in X\} =_I \bigtriangleup\{B_x : x \in X\}.$$

Proof We show that $D = \bigtriangleup\{A_x : x \in X\} \setminus \bigtriangleup\{B_x : x \in X\} \in I$. Suppose on the contrary that $D \notin I$. For $z \in Z$, $z \in D \;\Leftrightarrow\; \forall x \in z\,(z \in A_x) \wedge \exists y \in Z\,(z \notin B_y)$. By normality there is $D' \subseteq D$ and $y^* \in X$ such that

$$z \in D' \;\Leftrightarrow\; \forall x \in Z\,(z \in A_x) \wedge y^* \in z \wedge z \notin B_{y^*}.$$

Now let $x^* \in X$ be such that $B_{y^*} = A_{x^*}$. Then D' is disjoint from $S = \{z \in Z : x^* \in z\}$. Since $S \in \breve{I}$ by fineness of I this is a conradiction. □ (Proposition 9)

$\kappa \leq \lambda$ を基数として，次の原理を考える：

$(\oplus_{\kappa,\lambda})$: There is $Z \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ and a σ-saturated normal ideal $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$.

ここに，I が *σ-saturated* とは $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$ が c.c.c. を満たすことであり，I が *normal* とは I が fine (i.e. すべての $\alpha \in \lambda$ に対し，$\{u \in Z : x \in u\}$ は I の dual filter の元となる) で，次の意味の normality を満たすこと： for any $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha \in \lambda\} \subseteq I$, $\bigtriangledown\mathcal{A} \in I$.

$I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ が normal な (non-trivial な) ideal なら，$\mathcal{P}_\omega\lambda \subseteq Z$ で，したがって $|Z| \geq \lambda$ となることに注意．

Proposition 10 *Suppose that $I \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ is a normal maximal ideal, $\mathbb{P}$ a c.c.c. p.o. and H a P-generic set over V. In $V[H]$, let $Z = (\mathcal{P}_\kappa\lambda)^V$. Then, in $V[H]$, $\tilde{I} = \{a \subseteq Z : a \subseteq b$ for some $b \in I\}$ is a σ-saturated normal ideal on Z. In particular, $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$(\oplus_{\kappa,\lambda})$".* ccc

Proof That $\tilde{I}$ is σ-saturated follows from Kakuda's theorem (see e.g. Theorem 17.1 in [kanamori]). To see that $\tilde{I}$ is normal, let $\dot{\mathcal{A}} = \{\dot{a}_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ be $\mathbb{P}$-names of a family of elements of $\tilde{I}$ indexed by elements of Z. For each $\alpha \in \lambda$, let D_α be a maximal disjoint family of elements of $\mathbb{P}$ such that, for each $d \in D_\alpha$, $d \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{a}_\alpha \subseteq b_{\alpha,d}$" for some $b_{\alpha,d} \in I$. By the c.c.c. of $\mathbb{P}$, each D_α is countable. Hence $b_\alpha = \bigcup_{d\in D_\alpha} b_{\alpha,d} \in I$. Clearly $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{a}_\alpha \subseteq b_\alpha$" for each $\alpha \in \lambda$. Let $b = \bigtriangledown\{b_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Then $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\bigtriangledown \dot{\mathcal{A}} \subseteq b$". Since I is normal, $b \in I$. Hence $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\bigtriangledown \dot{\mathcal{A}} \in \tilde{I}$". ❑ (Proposition 10)

Proposition 11 *Suppose that $Z \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ and $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ is a σ-saturated normal ideal. Then* ideal

(1) *I is precipitous.*

Let $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$, G a $\mathbb{B}$-generic filter over V and $j : V \to M \subseteq V[G]$ the canonical elementary embedding to (the transitive collapse of) the generic ultrapower M.

(2) *$j''\lambda \in M$.*

(3) *$crit(j) = \kappa$ and $j(\kappa) > \lambda$.*

(4) *$\{j(C) : C \in [\lambda]^{<\kappa} \cap V\}$ is cofinal in $[j''\lambda]^{<\kappa} \cap M$ (with respect to $\subseteq$).*

Proof

(1): Since I is σ-saturated I has the disjointing property. Hence by Proposition 6, I is precipitious.

(2): Let $id_Z : Z \to V$; $z \mapsto z$. Then $[id_Z] = j''\lambda$ ("$\supseteq$" by fineness of I and "$\subseteq$" by normality of I (c.f. Proposition 8) and genericity of G).

(3): To show $crit(j) \geq \kappa$, suppose that $[A]_I \Vdash_{\mathbb{B}}$ "$M \models [f] \leq [i_\alpha]$" for $\alpha < \kappa$ and $f \in {}^Z V$. This means

$$[\{z \in Z : f(z) \in \alpha\}]_I \geq [A]_I .$$

By κ-completness

$$\Big\{[\{z \in A : f(z) = \beta\}]_I : \beta < \alpha\Big\} \setminus \{[\emptyset]_I\}$$

is predense below $[A]_I$. It follows that $[A]_I \Vdash_{\mathbb{B}}$ "$M \models [f] = [i_\beta]$ for some $\beta < \alpha$". This shows that $j(\alpha) = [i_\alpha] = \alpha$.

On the other hand, we have $\kappa < j(\kappa)$, since

$$M \models \kappa \leq \lambda = \Big(cf(j''\lambda)\Big)^V = cf(j''\lambda) = cf([id_Z]) < cf\, j(\kappa) = j(\kappa)$$

by the proof of (2) above and Łos's theorem. Hence $crit(j) \leq \kappa$.

(4): Suppose that $D \in [j''\lambda]^{<\kappa} \cap M$. Then $j^{-1}{}''D \in [\lambda]^{<\kappa} \cap V[G]$. Since G is a generic filter over the c.c.c. $\mathbb{B}$, there is $C \in [\lambda]^{<\kappa} \cap V$ with $j^{-1}{}''D \subseteq C$. We have $D \subseteq j(C)$. By $crit(j) = \kappa$, $|\, j(C)\,| < \kappa$. ❑ (Proposition 11)

次の自明な Lemma は Theorem 13 の証明で用いられる：

Lemma 12 *Suppose that $\mathcal{C} \subseteq [A]^{<\kappa}$ is club. If $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ is upwards directed with $|\,\mathcal{D}\,| < \kappa$ then $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{C}$.* upwards-directed

Proof By induction on $|\mathcal{D}|$. If $\mathcal{D}$ is finite the claim of the lemma is trivial.

Suppose that $\mathcal{D}$ is infinite and that the lemma holds for all upwards directed $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{C}$ with $|\mathcal{D}'| < |\mathcal{D}|$. Let $\kappa = |\mathcal{D}|$. Then we can find an increasing sequence $\langle \mathcal{D}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ of upwards directed subsets of $\mathcal{D}$ such that $|\mathcal{D}_\alpha| < |\mathcal{D}|$ for all $\alpha < \kappa$ and $\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{D}_\alpha$. By inductive assumption $D_\alpha = \bigcup \mathcal{D}_\alpha$ is an element of $\mathcal{C}$ for all $\alpha < \kappa$ and hence $\langle D_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ is an increasing sequence in $\mathcal{C}$. It follows that $\bigcup \mathcal{D} = \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha \in \mathcal{C}$. ❑ (Lemma 12)

Theorem 13 mainthm

Suppose that $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ holds. If A is a κ-free algebra and $|A| \leq \lambda$ then A is free.

Proof Let $Z \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ and $I \subseteq \mathcal{P}(Z)$ be a σ-saturated normal ideal. Without loss of generality, we may assume that the underlying set of A is λ. Let $\mathcal{C}$ be a club set $\subseteq [A]^{<\kappa}$ consisting of free subalgebras of A. Let G be a $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$-generic filter. By Proposition 11, (1), I is precipitous. So let $j : V \to M \subseteq V[G]$ be the canonical elementary embedding to the transitive collapse of the generic ultrapower M. Let

$$\mathcal{D} = \{D \in j(\mathcal{C}) : |D| < \kappa,\ D \subseteq j''A\}.$$

By Proposition 11, (2), $\mathcal{D} \in M$. Clearly $M \models \bigcup \mathcal{D} = j''A$.

Claim 13.1 *$\mathcal{D}$ is upwards directed.*

$\vdash$ Suppose that D, $D' \in \mathcal{D}$. Then by Proposition 11, (4), there are C, $C' \in \mathcal{C}$ such that $D \subseteq j(C)$ and $D' \subseteq j(C')$. Let $C'' \in \mathcal{C}$ be such that C, $C' \subseteq C''$. Let $D'' = j(C'')$. Then D, $D' \subseteq D''$ and by Proposition 11, (3), $D'' \in \mathcal{D}$. ⊣ (Claim 13.1)

Now in M let $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ be such that $|\mathcal{D}'| \leq \lambda$, $\bigcup \mathcal{D}' = j''A$ and $\mathcal{D}'$ is upwards directed. Since $j(\kappa) > \lambda$ by Proposition 11, (3), $M \models \bigcup \mathcal{D}' = j''A \in \mathcal{C}$ by Lemma 12. Hence $M \models j''A$ is free. It follows that $V[G] \models A$ is free. But since G is a generic filter over a c.c.c. Boolean algebra, it follows that $V \models A$ is free by Theorem 2.1 in [1]. ❑ (Theorem 13)

Corollary 14 *Suppose that κ is a supercompact cardinal and $\mathbb{P}$ a c.c.c. p.o. Then* ccc-supercompact

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\textit{any } \kappa\textit{-free algebra is free}\text{”}.$$

Proof By Proposition 10 and Theorem 13. ❑ (Corollary 14)

Corollary 15 *If it is consistent that there exists a supercompact cardinal, then* MA *with the following assertion is also consistent:*

For any algebra B, if B is $2^{\aleph_0}$-free then B is free.

Proof Start from a ground model with a supercompact κ. Force $2^{\aleph_0} = \kappa +$ MA by the usual c.c.c. p.o. By Corollary 14, the model thus obtained is as desired. ❑ (Corollary 15)

Proposition 16 *Suppose that $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ holds. If $S \subseteq S^{<\kappa}_\lambda = \{\alpha < \lambda : cf(\alpha) < \kappa\}$ is stationary in λ then there is $\gamma < \lambda$ such that $S \cap \gamma$ is stationary in γ.* stationary

Proof Let G be $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$-generic for Z and I as in $(\oplus_{\kappa,\lambda})$, and $j : V \to M \subseteq V[G]$ be the canonical embedding to the transitive collapse of the generic ultrafilter. Let $\gamma = \sup j''\lambda$. $j''S \in M$ since $j''S = j(S) \cap j''\lambda$ and $j''\lambda \in M$ by Proposition 11, (2).

Claim 16.1 *$M \models$ "$j''S$ is stationary in γ".*

$\vdash$ To see this, it is enough to show that $j''S \subseteq \gamma$ is stationary in $V[G]$: let $C \subseteq \gamma$ be a club in $V[G]$. Further in $V[G]$, let $D = \{\alpha \in \gamma : j(\alpha) \in C\}$ and $\tilde{D}$ be the closure of D. Then $\tilde{D} \cap \{\alpha < \lambda : cf(\alpha) < \kappa\} \subseteq D$. By σ-saturation of $\mathbb{B}$, there is $D' \in V$ such that $D' \subseteq \tilde{D}$ and D' is club in λ. Let D'' be the set of all limit points $< \gamma$ of D'.

Subclaim 16.1.1 $j''D'' \cap j''S^{<\kappa}_{\lambda} \subseteq C \cap j''S^{<\kappa}_{\lambda}$.

$\vdash$ Suppose that $\beta \in j''D'' \cap j''S^{<\kappa}_{\lambda}$, say $\beta = j(\alpha)$ for some $\alpha \in D'' \cap S^{<\kappa}_{\lambda}$. Then there is $u \subseteq \alpha \cap D$ such that $|\,u\,| < \kappa$ and u is cofinal in α. Since $j(u) = j''u$,

$$M \models \beta \text{ is the limit of } j''u$$

by elementarity. Since $j''u \subseteq C$ it follows that $\beta \in C$. $\dashv$ (Subclaim 16.1.1)

Let $\beta \in D'' \cap S$. Then $j(\beta) \in j''D'' \cap j''S \subseteq C \cap j''S$. Since C was arbitrary, this shows that $j''S$ is stationary in $V[G]$ and hence in M. $\dashv$ (Claim 16.1)

Now in M, $j''S \subseteq j(S) \cap \gamma$. Hence

$$M \models \text{"there is a } \gamma < j(\lambda) \text{ such that } j(S) \cap \gamma \text{ is stationary"}.$$

By elementarity of j, it follows that there is $\gamma < \lambda$ such that $S \cap \gamma$ is stationary.

❑ (Proposition 16)

次の Lemma 17 は [Kanamori] の命題 7.9 で，Proposition 18 で用いられる．

Lemma 17 (Kurepa, 1935). κ を正則とし，$\lambda < \kappa$ とする．$\langle T, <_T\rangle$ が κ-木で，各レヴェルの濃度は λ 未満なら，$\langle T, <_T\rangle$ は共終枝を持つ． tree

Proof もし必要なら，T の極限レヴェルの元のいくつかを同一視することで，T の極限レヴェルの異なる元は，前のどれかのレヴェルで，異なった $<_T$ に関する前の元を持つ，としてよい．さらに $T = \kappa$ としてよい．T_α でこの木の α 番目のレヴェルを表すことにする．$|T_\alpha| < \lambda$ である．まず λ が正則であると仮定して結果を導く：

$\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ となる各 $\alpha < \kappa$ に対し，$\xi_\alpha \in T_\alpha$ を選ぶ．このような α に対し，$f(\alpha) < \alpha$ を，任意の $\xi \in T_\alpha - \{\xi_\alpha\}$ に対し，ξ と ξ_α が $T_{f(\alpha)}$ で共通の $<_T$ に関する前の元を持っていないようにとれる．$\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ は κ で定常だから，Fodor の補題により，κ の非有界な部分集合 X で f がこの上で一定の値，例えば γ をとるものがある．$|T_\gamma| < \kappa$ により，κ で非有界な $Y \subseteq X$ で，T_γ の一つの元が $\{\xi_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ のすべての元の $<_T$ に関する前の元となるようなものがある．ところが，このときには，$\{\xi_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ が $\langle \kappa, <_T\rangle$ での連鎖となることはすぐにわかるから，これにより共終枝が得られる．

$\lambda < \kappa$ が特異基数のときには，正則な $\nu < \lambda$ で，$Y = \{\alpha < \kappa \mid |T_\alpha| < \nu\}$ が κ で非有界となるものがある．上の議論により，$\bigcup_{\alpha \in Y} T_\alpha$ により得られる部分木は共終枝を持つ．ところが，そのような枝はもとの木での共終枝を生成する． ❑ (Lemma 17)

Proposition 18 *Suppose that* $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ *holds. Then* κ *has the tree property.* tree-property tree-prop

Proof G be $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$-generic for Z and I as in $(\oplus_{\kappa,\lambda})$, and $j : V \to M \subseteq V[G]$ be the canonical embedding to the transitive collapse of the generic ultrafilter.

Suppose that T is a κ-tree in V. Without loss of generality, we may assume that $T \subseteq V_\kappa$. Then we have

$$M \models \text{“}j(T) \text{ is a } j(\kappa)\text{-tree”}.$$

Since κ is the critical point of j and $|\,T_\alpha\,| < \kappa$ for all $\alpha < \kappa$, we have $j(T)\restriction \kappa = T$. Let $t^* \in j(T)_\kappa$ and $\dot{t}^*$ be a $\mathbb{B}$-name of t^* (in V). In V, let

$$T' = \{t \in T : b \Vdash_{\mathbb{B}} \text{“}\, t \le \dot{t}^* \text{ for some } b \in \mathbb{B}^+ \text{”}\}.$$

By the c.c.c. of $\mathbb{B}$, T' is a subtree of T of width $\le \omega$ and height κ. Hence, by Lemma 17, there is a κ-branch b through T'. Of course b is a κ-branch through T as well.

❑ (Proposition 18)

Proposition 16 は $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ が 大きな large cardinal の consistency strength を内包していることを示している．

まず復習をしておくと，

$\square_\lambda$: *There exists* $\langle C_\alpha : \alpha \in Lim(\lambda^+)\rangle$ *such that, for all* $\alpha \in Lim(\lambda^+)$,
- (i) C_α *is club in* α*;*
- (ii) $o.t.(C_\alpha) \le \lambda$*; and*
- (iii) (Coherency) $\beta \in lim(C_\alpha) \Rightarrow C_\beta = C_\alpha \cap \beta$.

Lemma 19 $\square_\lambda$ が成り立つとする．$S \subseteq \lambda^+$ を *stationary* とするとき，*stationary* な $T \subseteq S$ で，すべての *limit ordinal* $\alpha < \lambda^+$ に対し，$T \cap \alpha$ は α で *non-stationary* となるようなものが存在する． box

Proof $T \subseteq S \cap Lim(\lambda^+)$ を stationary で，ある $\beta^* < \lambda^+$ に対し，$\alpha \in T \Rightarrow o.t.(C_\alpha) = \beta^*$ となるようなものとする（regressive な $(S \cap Lim(\lambda^+)) \setminus (\lambda+1) \ni \alpha \mapsto o.t.(C_\alpha) \in \lambda$ に Fodor's lemma を適用することでこのような T がとれる）．

T が求めるようなものであることを示す．$\alpha \in Lim(\lambda^+)$ に対し $T \cap \alpha$ が α で non-stationary になることを示せばよい．$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ ならこれは明らか．

そこで $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ とする．$\gamma \in lim(C_\alpha)$ とすると，上の (iii) により $C_\gamma = C_\alpha \cap \gamma$ となるから，このような γ で $o.t.(C_\gamma) = \beta^*$ となるようなものは高々 1 つしかない．このことから $|\,T \cap \alpha \cap lim(C_\alpha)\,| \le 1$ となる．(i) により $lim(C_\alpha)$ は α で club だから，$T \cap \alpha$ は non-stationary であることがわかる． ❑ (Lemma 19)

Corollary 20 $(\oplus_{\kappa,\lambda^+})$ *implies* $\neg\square_\lambda$.

Proof By Proposition 18 and Lemma 19. ❑ (Corollary 20)

次は [Cummings, Large Cardinal Properties of Small Cardinals] からの引用．

> *If* $0^\#$ *does not exist then for every singular* λ*, we have* $\lambda^+_V = \lambda^+_L$*, from which it follows that* $V \models \square_\lambda$ *for every singular* .

これはやはり [Cummings, Large Cardinal Properties of Small Cardinals, Fact 3.10] によると，以下のように改良できる．

Theorem 21 (follows form results by Mitchell, Schimmerling, Steel and Woodin) *If λ is singular and every stationary subset of λ^+ reflects then Projective Determinacy holds. In particular for every n there is an inner model of "*ZFC + *there exist n Woodin cardinals".*

❑

$(\oplus_{\kappa,\lambda})$ からは $\mathcal{P}_\mu(\lambda)$ $(\mu < \kappa)$ での stationarity の reflection も導ける．

Lemma 22 $\lambda > \kappa$ を *regular cardinals* として，$\mathbb{P}$ は κ-*c.c.* を満たすとする．このとき，
(1) $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\mathcal{P}_\kappa(\lambda)^V$ は $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ で *cofinal*";
(2) $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{C} \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda) \ \wedge \ \dot{C}$ は *club*" なら，*club* $D \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$D \subseteq \dot{C}$" となるものが存在する (ただし一般には $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "D は club" とは限らないことに注意);
(3) $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ が *stationary* なら，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary". pkappalambda

Proof (1): $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{x} \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$" なら，$\mathbb{P}$ が κ-c.c. を満たすことから，ある $\mu < \kappa$ と $\mathbb{P}$-name $\dot{f}$ で，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{f} : \mu \to \lambda \ \wedge \ f[\mu] = \dot{x}$" となるものがある．ふたたび $\mathbb{P}$ が κ-c.c. を満たすことから，各 $\alpha < \mu$ に対し，$y_\alpha \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{f}(\alpha) \in y_\alpha$" となるものがとれる．$y = \bigcup_{\alpha<\mu} y_\alpha$ とすれば，$y \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ で，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{x} \subseteq y$" である．
(2): $D = \{x \in \mathcal{P}_\kappa(\lambda) : \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \in \dot{C}$"$\}$ とすればよい．
(3): (2) から明らか． ❑ (Lemma 22)

Proposition 23 $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ を仮定する．任意の *regular* な $\mu < \kappa$ に対し，$S \subseteq \mathcal{P}_\mu(\lambda)$ が *stationary* で $C \subseteq \mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ が *club* なら，$X \in C$ で $S \cap \mathcal{P}_\mu(X)$ が $\mathcal{P}_\mu(X)$ で *stationary* になるようなものが存在する．

Proof Z と I を $(\oplus_{\kappa,\lambda})$ でのようなものとし，G を $\mathbb{B} = \mathcal{P}(Z)/I$-generic, $j : V \to M \subseteq V[G]$ を generic ultrafilter (の transitive collapse) への canonical embedding とする．このとき，Lemma 22, (3) により，

$$V[G] \models \text{"}j''S \text{ is stationary in } \mathcal{P}_\mu(j''\lambda)\text{"}$$

となる．$j''S \subseteq j(S) \cap \mathcal{P}_\mu(j''\lambda)$ だから，

$$M \models j(S) \cap \mathcal{P}_\mu(j''\lambda) \text{ is stationary in } \mathcal{P}_\mu(j''\lambda)$$

が成り立つ．また，$\lambda < j(\kappa)$ と $j(C)$ の closedness により，$M \models j''\lambda \in j(C)$ となるから，

$$M \models \text{"there is } X \in j(C) \text{ such that } j(S) \cap X \text{ is stationary in } X\text{"}$$

が成り立つ．したがって elementarity により，

$$V \models \text{"there is } X \in C \text{ such that } S \cap X \text{ is stationary in } X\text{"}$$

となり，Proposition が成り立つことがわかる． ❑ (Proposition 23)

References

[1] Sakaé Fuchino, On potential embedding and versions of Martin's axiom, Notre Dame Journal of Logic, Vol. 33, No. 4 (1992), 481–492.

4 nowhere dense ultrafilters etc.

ω 上の ultrafilter U が p-point であるとは，任意の ω の分割 $\omega = \dot{\bigcup}_{n\in\omega} A_n$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，$A_n \notin U$ となるものに対し，$B \in U$ で，$|\, B \cap A_n \,| < \aleph_0$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在すること．

Fact 24 *ω 上の ultrafilter U が p-point となるのは，次が成り立つちょうどその時である：*

(∗) 任意の U の元の $\subseteq$ に関する下降列 $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ に対し，$A \in U$ で $A \subseteq^* A_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する．

Proof まず U を p-point とする．$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ を U の元の下降列とする．このとき，$A_{-1} = \omega$ として，$n \in \omega$ に対し，$B_n = A_{n-1} \setminus A_n$ とすれば，$\langle B_n : n \in \omega\rangle$ は $\mathcal{P}(\omega) \setminus U$ の元による ω の partition となるから，$A \in U$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，$|\, B_n \cap A \,| < \aleph_0$ となるものが存在する．すべての $n \in \omega$ に対し，

$$|\, (\omega \setminus A_n) \cap A \,| = |\, (B_0 \cup \cdots \cup B_n) \cap A \,| < \aleph_0$$

となるから，$A \subseteq^* A_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つことがわかる．

次に (∗) が成り立つとして，$\omega = \dot{\bigcup}_{n\in\omega} A_n$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，$A_n \notin U$ とする．このとき，$B_n = \omega \setminus (\bigcup_{m\le n} A_m)$ とすると $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ は U の元の $\subseteq$ に関する下降列となるから，(∗) により，$B \in U$ で，$B \subseteq^* B_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する．このとき，すべての $n \in \omega$ に対し，$B \cap A_n \subseteq B \setminus B_n$ だから，$|\, B \cap A_n \,| < \aleph_0$ となり，B は p-point の定義でのようなものとなっていることがわかる．

□ (Fact 24)

ω 上の filter F が nowhere dense とは，どんな $f : \omega \to {}^{\omega}2$ に対しても，$A \in F$ で，$f''A$ が ${}^{\omega}2$ の nowhere dense subset となるようなものが存在すること．

Proposition 25 *U が ω 上の p-point なら U は nowhere dense.*

Proof U を p-point として，$f : \omega \to {}^{\omega}2$ を任意にとる．U の元の $\subseteq$ に関する下降列 A_n, $n \in \omega$ をうまくとり，$A \subseteq^* A_n$ がすべての $n \in \omega$ に対して成り立つような A について $f''A$ が nowhere dense になるようにする．

$A_0 = \omega$ とする．s_n, $n \in \omega$ を $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ の enumeration として，$A_0, \ldots, A_n$ が既に選ばれたとき，A_{n+1} を次のようにして決める: $A_n \cap f^{-1}''[s_n{}^\frown 0]$ と $A_n \cap f^{-1}''[s_n{}^\frown 1]$ を考えるとこれらの少なくともどちらかは U の元でない．$i < 2$ を $A_n \cap f^{-1}''[s_n{}^\frown i] \notin U$ となるような最小のものとして，$A_{n+1} = A_n \setminus f^{-1}''[s_n{}^\frown i]$ とする．このとき $A_{n+1} \in U$ で，$f''A_{n+1}$ は $[s_n{}^\frown i]$ と素になる．

仮定により U は p-point だから，$A \in U$ で $A \subseteq^* A_n$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものがある．

$f''A$ が ${}^{\omega}2$ で nowhere dense となることを示すために，O を ${}^{\omega}2$ の任意の開集合とする．このとき，$n \in \omega$ で $[s_n] \subseteq O$ となるものがある．A_{n+1} の構成から，$i < 2$ で $f''A_{n+1} \cap [s_n{}^\frown i] = \emptyset$ となるものがある．この i に対し，$f''A \cap [s_n{}^\frown i]$ は有限となるから，$s_n{}^\frown i \subseteq s$ となる $s \in \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ で，$f''A \cap [s] = \emptyset$ となるものがとれる． □ (Lemma 25)

Lemma 26 $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$ なら *p-point* が存在する．❑

Corollary 27 $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$ なら *nowhere dense filter* が存在する．

Fact 28 *Nowhere dense filter* U は *almost ultrafilter* である．つまり，$U \cup \{a\}$ が *finite intersection property* を持つような $a \subseteq$ で，*ultrafilter* を生成するようなものが存在する．

Theorem 29 (Błaszczyk-Shelah) *Nowhere dense ultrafilter* が存在する $\Leftrightarrow$ *σ-centered atomless Boolean algebra* で *Cohen reals* を付加しないようなものが存在する．

あるいは，別の言い方をすると：

Nowhere dense ultrafilter が存在しない $\Leftrightarrow$ *σ-centered atomless Boolean algebra* はすべて *Cohen reals* を付加する．❑

Fact 30 P が *Knaster property* つ *atomless* な *p.o.* なら，P は *real* を付加する．

Proof $\alpha \in \mathrm{On}$ と P-name, $\dot{\tau}$ と $p \in P$ を $p \Vdash_P$ “$\dot{\tau} \subseteq \alpha \ \wedge \ \dot{\tau} \notin V$” となるようにり，$\alpha$ はこのようなもののうち最小とする．このとき，$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ であることを示す: そうでないとすれば，α の元の上昇列 $\langle \alpha_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$, P の元の列 $\langle p_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ および，α の部分集合の列 $\langle s_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ で，

$$p_\beta \Vdash_P \text{“}\dot{\tau} \cap \alpha_\beta = s_\beta\text{”}$$

となるものが存在する．P は Knaster property を持つから非可算な $S \subseteq \omega_1$ で，$\{p_\beta : \beta \in S\}$ は pairwise compatible となるようなものがある．さらに，S の非可算な部分集合 S' と P の元の列 $\langle q_\beta : \beta \in S' \rangle$ で，すべての $\beta \in S'$ と $\beta' = \min S' \setminus (\beta + 1)$ に対し，$q_\beta \leq_P p_\beta$ かつ，$q_\beta \Vdash_P$ “$s_{\beta'} \neq \dot{\tau} \cap \alpha_{\beta'}$” となるようなものがとれる．ところがこのとき q_β, $\beta \in S'$ は pairwise incompatible となるから，これは P が Knaster property を持ち，特に c.c.c. を満たすことに矛盾である．したがって，$\mathrm{cf}(\alpha)$ は可算となるから，$\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ を $\alpha = \sup_{n \in \omega} \alpha_n$ となる上昇列とすれば，T を

$$S_n = \{s \in \mathcal{P}({}^{\alpha_n}2) : p \Vdash_P \text{“}s\,''\{1\} = \dot{\tau} \cap \alpha_n\text{”} \text{ for some } p \in P\}$$

を n 番目の lebel としてとる end-extension を順序とする高さが ω の木を考えれば，P はこの木に新しい枝を付加することがわかる．P が c.c.c. を満たすことから，各 S_n は可算である．したがって，T の枝に相当する real が P によって新しく付加されるから，命題が証明できた． ❑ (Fact 30)

Remark 31 上の *Fact* で *“P は Knaster property を満たす”* は *“P は c.c.c. を満たす”* に弱めることはできない．例えば P を *Suslin tree*（を順序を反転させて考えたもの）とすると，P は *c.c.c.* を満たすが，P は *real* を付加しない．すべての *“c.c.c. p.o. は reals を付加する”* は *Suslin tree* の非存在と同値である．

F を ω 上の filter とする．このとき，次の性質を考察してみる：

(1) $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ で $F \cup \{A\}$ は nontrivial ultrafilter を生成する．

（$F \cup \{A\}$ の生成するフィルターを F^A と書くことにする．）

(2) $\mathcal{P}(\omega)/F$ は atom を持つ．
(3) $\mathcal{P}(\omega)/F$ は有限．

明らかに (3) $\Rightarrow$ (2) である (逆が言えないことの例は？)．

Lemma 32 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Proof (2) $\Rightarrow$ (1): $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ を $[A]_F$ が $\mathcal{P}(\omega)/F$ の atom となるようなものとする．このとき，F^A が ultrafilter となることを示す．任意の $B \in \overline{F}$ (i.e. $\omega \setminus B \notin F$) に対し，$[A]_F$ が atom であることから，

$$B \cap A \in \overline{F} \quad \text{または} \quad A \setminus B \in \overline{F}$$

のどちらかが成り立つ．$A \setminus B \in \overline{F}$ なら，$C \in F$ で，$(A \setminus B) \cap C = \emptyset$ となるものがある．このとき，$A \cap C \subseteq B$ となるから，$B \in F^A$ である．もし $B \cap A \in \overline{F}$ とすると，$B' = \omega \setminus B$ として，$B' \cap A \notin \overline{F}$ である ($B' \cap A \in \overline{F}$ だったとすれば，$A = (B \cap A) \cup (A' \cap A) \in F$ となるがこれは $[A]_F$ が atom である，したがって non zero であることに矛盾する)．したがって，仮定から $B' \setminus B \in \overline{F}$ となり，上で示したことから $B' \in F^A$ がわかる．したがって F^A は ultrafilter である．

(1) $\Rightarrow$ (2): $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ で，F^A は ultrafilter とする．このとき，$[A]_F$ が F の atom になることを示す．$B \in [\omega]^{\aleph_0}$ を $[B]_F$ が $\mathcal{P}(\omega)/F$ の positive element となるようにとる．$[B]_F \cdot [A]_F \neq [0]_F$ として，$[A]_F \leq [B]_F$ となることを示す．$[B]_F \cdot [A]_F \neq [0]_F$ から，$B \cap A \notin \overline{F}$ となる．このことから $F^A \cup \{B \cap A\}$ は finite intersection property を持つことがわかるから，F^A が ultrafilter により，$B \cap A \in F^A$ となる．したがって，$C \in F$ で，$C \cap A \subseteq B \cap A$ となるものが存在する．このことから，$C \cap A \subseteq B$ がわかり，$[A]_F \leq [B]_F$ が帰結できる． ❑ (Lemma 32)

Lemma 33 F を ω 上の *filter* とする．このとき，F が *nowhere dense* でないことは，次の性質と同値である：

$(*)$: $g : \omega \to {}^{\omega>}2$ で，次を満たすものが存在する： $A \in F$ を任意にとるとき，$g''A$ は ${}^{\omega>}2$ で *somewhere dense* となる．つまり

$$\exists s \in {}^{\omega>}2 \ \forall t \in {}^{\omega>}2 \ (s \subseteq t \ \rightarrow \ \exists u \in {}^{\omega>}2 (t \subseteq u \ \wedge \ u \in g''A))$$

が成り立つ．

somewhere-dense

Proof "F が nowhere dense でない" は，次と同値である：

$(**)$: $f : \omega \to {}^{\omega}2$ で次を満たすものが存在する： $A \in F$ を任意にとるとき，$g''A$ は ${}^{\omega}2$ で nowhere dense でない．つまり，

$$\exists s \in {}^{\omega>}2 \ \forall t \in {}^{\omega>}2 \ (s \subseteq t \ \rightarrow \ [t] \cap f''A \neq \emptyset)$$

が成り立つ．

まず，F は nowhere dense でないと仮定して，$(*)$ が成り立つことを示す．f を $(**)$ でのようにとる．$\{s_n : n \in \omega\}$ を ${}^{\omega>}2$ の enumeration として，$g : \omega \to {}^{\omega>}2$ を

$$g(n) = f(n)\restriction m_n$$

として定義する．ここに，

$$m_n = \max\{l(s_k) : k \leq n \ \wedge \ s_k \subseteq f(n)\}$$

とする．

g が $(*)$ でのようなものとなっていることを示す．$A \in F$ とすると，$(**)$ により $s \in {}^{\omega>}2$ で，

$$\forall t \in {}^{\omega>}2 \ (s \subseteq t \ \to \ [t] \cap f''A \neq \emptyset)$$

となるものがある．$t \in {}^{\omega>}2$ が $s \subseteq t$ なら，$t = s_n$ となるような $n \in \omega$ をとる．このとき，$n' \in A, n' > n$ で $t \subseteq f(n')$ となるものがとれる： $(**)$ により，$\{m \in A : f(m) \in [t]\}$ は無限となるからである．g の定義から，$t \subseteq g(n')$ となることがわかる．したがって g が $(*)$ でのような性質を持つことが示せた．

次に F が $(*)$ を満たすとして，F が nowhere dense でないことを示す．g を $(*)$ でのようなものとする．各 $s \in {}^{\omega>}2$ に対し，$f_s \in {}^{\omega}2$ を $s \subseteq f_s$ となるように選んでおき，

$$f(n) = f_{g(n)}$$

で $f : \omega \to {}^{\omega}2$ を定義する．このとき，f が $(**)$ でのようなものとなっていることを示せばよい．$A \in F$ をとり，$s \in {}^{\omega>}2$ を g に対し，$(*)$ でのようなものとする．このとき，任意の $t \in {}^{\omega>}2$ に対し，$n \in A$ で $t \subseteq g(n)$ となるものがある．したがって，f の定義から，$t \subseteq g(n) \subseteq f(n)$ となり，$f(n) \in [t]$ である．したがって $(**)$ が成り立つことがわかる．

❑ (Lemma 33)

Lemma 34 *F を ω 上の nowhere dense filter とするとき，$\mathcal{P}(\omega)/F$ は有限になる．*

Proof $\mathcal{P}(\omega)/F$ が無限として F が nowhere dense でないことを示す．A_n, $n \in \omega$ を ω の分割で，$[A_n]_F \neq [\emptyset]_F$ つまり，$A_n \notin \overline{F}$ がすべての $n \in \omega$ で成り立つようなものとする．$\{s_n : n \in \omega\}$ を ${}^{\omega>}2$ の enumeration として，$g : \omega \to {}^{\omega>}2$ を

$$g(k) = s_n \ \Leftrightarrow \ \ k \in A_n$$

で定義する．このとき任意の $A \in F$ に対し，$f''A = {}^{\omega>}2$ となるから，g は上の $(*)$ でのようなものとなっていることがわかる．したがって Lemma 33 により F は nowhere dense でない．

❑ (Lemma 34)

5 Free Set Theorem

以下は主に Lajos Soukup に教わった．証明も主に彼が教えてくれたものである．$F : \kappa \to \mathcal{P}(\kappa)$ のとき，$A \subseteq \kappa$ が F-free とは，$\forall \alpha \in A \ F(\alpha) \cap A \subseteq \{\alpha\}$ となることとする．

Theorem 35 $\lambda < \kappa$ で $F : \kappa \to [\kappa]^{<\lambda}$ なら，$A \in [\kappa]^{\kappa}$ で F-*free* なものが存在する．

Proof まず κ が regular の場合について定理を証明する．

$\alpha < \lambda$ に関対し帰納的に $A_\alpha \subseteq \kappa$, $\alpha < \lambda$ を次を満たすようにとる：

> $A_\alpha \subseteq \kappa \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ で F-free, かつ，A_α はこのようなもののうちで maximal となっている．

ある $\alpha < \lambda$ に対し，$|A_\alpha| = \kappa$ ならよい．そこで，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$|A_\alpha| < \kappa$ と仮定する．したがって，$A = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ とすると，κ は regular だから，$|A| < \kappa$ となり，さらに $A^* = A \cup \bigcup F''A$ とすると，$|A^*| < \kappa$ である．したがって，$x^* \in \kappa \setminus A^*$ がとれるが，各 $\alpha < \lambda$ に対して $x^* \in \kappa \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ で A_α が maximal であることから，$A_\alpha \cup \{x\}$ は F-free ではない．ところが $x^* \notin \bigcup F''A_\alpha$ だから， $F(x^*) \cap A_\alpha \neq \emptyset$ となることがわかる．各 $\alpha < \lambda$ に対し，$x_\alpha \in F(x^*) \cap A_\alpha$ をとると，$F(x^*) \supseteq \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ となるが，これは $|F(x^*)| < \lambda$ に矛盾である．

次に，κ が singular である場合を考える，regular な μ を $\lambda, \mathrm{cf}(\kappa) < \mu < \kappa$ となるようにとり，$\langle \kappa_\nu : \nu < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ を regular な cardinals の上昇列で，$\kappa_0 > \mu$, $\lim_{\nu<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\nu = \kappa$ となるものとする．

$\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ に対し，F-free な $A_\alpha \in [\kappa]^{\kappa_\alpha}$ を，$A_\alpha \subseteq \kappa \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \cup \bigcup F''(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta))$ となるようにとる (これは regular の場合の証明により可能である)．$\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ に関する induction で pairwise disjoint な $B^\alpha_\gamma \in [A_\alpha]^{\kappa_\alpha}$, $\gamma < \mu$ と $\rho_\alpha < \mu$ を

$$(*) \quad (\forall \beta < \alpha)(\forall \xi > \rho_\alpha)(\forall x \in \textstyle\bigcup_{\gamma<\mu} B^\alpha_\gamma)\,[\,F(x) \cap B^\beta_\xi = \emptyset\,]$$

となるようにとる．このようなものがとれることは次のようにしてみることができる： 今 $\beta < \alpha$ に対しては $\{B^\beta_\gamma : \gamma < \mu\}$ が $(*)$ を満たすように構成できたとして，$\rho_\alpha < \mu$ を $A'_\alpha = \{x \in A_\alpha : \forall \beta < \alpha \ \bigcup_{\rho_\alpha<\xi<\mu} B^\beta_\xi \cap F(x) = \emptyset\}$ が濃度 κ_α となるようにとる．各 $x \in A_\alpha$ に対し，$|F(x)| < \lambda < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$ だから，$\rho < \mu$ で，$\bigcup_{\rho<\xi<\mu} B^\beta_\mu \cap F(x) = \emptyset$ となるものが存在する．したがって，このような ρ_α がとれることがわかる．$\langle B^\alpha_\gamma : \gamma < \mu\rangle$ を A'_α の濃度 κ_α の部分集合への partition とすればよい．

このとき，$A = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} B^\alpha_{\rho_\alpha}$ とすれば，A は濃度が κ の F-free set となる．

□ (Theorem 35)

Theorem 36 (Free-Set-Theorem, Fodor) $\lambda < \kappa$ で $F : \kappa \to [\kappa]^{<\lambda}$ なら，F-*free* な A_α, $\alpha < \lambda$ で $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ となるものが存在する．特に κ が *regular* のときには，F-*free* な $A \subseteq \kappa$ で κ の *stationary subset* となるものが存在することがわかる． free-set-theorem

Proof まず次の補題を証明する：

Lemma 37 $T \subseteq \kappa$ に対し，次を満たす $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ が存在する：

> 各 $\alpha < \lambda$ に対し $B_\alpha \subseteq T$ で B_α は F-*free*
>
> B_α, $\alpha < \lambda$ は *pairwise disjoint*
>
> $(\forall x \in T \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha)\,[\,F(x) \cap (\bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha) \neq \emptyset\,]$

Proof of Lemma 37: $[\kappa]^\lambda$ の元の列 $\langle S_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ で，各 S_α は F-closed で $\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$ となるものが存在する．$\alpha < \kappa$ に対し，$R_\alpha = (S_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta) \cap T$ とおく．$R_\alpha = \{r_{\alpha,\xi} : \xi < \lambda\}$ として，$f_\alpha : R_\alpha \to 2$ を

$$f_\alpha(r_{\alpha,\xi}) = \begin{cases} 1, & F(r_{\alpha,\xi}) \cap \{r_{\alpha,\eta} : \eta < \xi,\ f_\alpha(r_{\alpha,\eta}) = 1\} = \emptyset \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

と定義して，$B_\alpha = f_\alpha^{-1}[\{1\}]$ とする．このとき，$\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ は F-free な集合の族となるが，$x \in T \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$ なら，ある $\alpha < \kappa$ と $\xi < \lambda$ に対し，$x = r_{\alpha,\xi}$ となり，$f_\alpha(r_{\alpha,\xi}) = 0$ だから，f_α の定義から $F(r_{\alpha,\xi}) \cap B_\alpha \neq \emptyset$ がわかる． ❑ (Lemma 37)

Theorem 36の証明の続き： $T^0 = \kappa$ として $\mathcal{B}^0$ を上の補題でのようにとる．同様に，帰納的に $T^\nu = \kappa \setminus \bigcup\{\bigcup \mathcal{B}_\mu : \mu < \nu\}$ として，B_ν をこの T^ν に対し上の補題を適用して得られるものとする．$\mathcal{B}^* = \bigcup\{\mathcal{B}_\nu : \nu < \lambda\}$ とすると $\mathcal{B}^*$ は κ の F-free な部分集合の族となるが，次により $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} = \mathcal{B}^*$ とすれば，これが求めるような性質を持つものとなっていることがわかる．

$\bigcup \mathcal{B}^* = \kappa$ である： $x \in \kappa \setminus \bigcup \mathcal{B}^*$ が存在するとすれば，各 $\nu < \lambda$ に対し，$x \in T_\nu \setminus \bigcup \mathcal{B}_\nu$ だから，$F(x) \cap \bigcup \mathcal{B}_\nu \neq \emptyset$ となる．各 $\nu < \lambda$ に対し，$x_\nu \in F(x) \cap \bigcup \mathcal{B}_\nu$ を選べば，T^ν, $\mathcal{B}^\nu$, $\nu < \lambda$ の定義から x_ν, $\nu < \lambda$ は互いに異るが，$F(x) \supseteq \{x_\nu : \nu < \lambda\}$ だから，これは $|F(x)| < \lambda$ に矛盾である． ❑ (Theorem 36)

6 Adding a club set $\subseteq \omega_1$ with finite conditions

次の半順序 P を考える:

$$p \in P \quad \Leftrightarrow \quad p \in \mathrm{Fn}(\omega_1, \omega_1) \ \wedge \ \exists f : \omega_1 \to \omega_1 \text{ continuously increasing with } p \subseteq f.$$

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad q \subseteq p.$$

このとき P は generic function $f_G : \omega_1 \to \omega_1$ を付加するが，

Theorem 38 (Baumgartner [1]) P を上のような *p.o.* とするとき，

(a) f_G は *continuously increasing function* となる．
(b) P は *proper p.o.* である．
(c) P は *axiom A* を満たさない．

Proof (a): 示したいことは $\Vdash_P$ “ $\dot{f}_G$ is continuously increasing” である．$f_G : \omega_1 \to \omega_1$ で，f_G が increasing になることは明らか．$V[G]$ で f_G が continuous でなかったとすると，$\alpha \in Lim(\omega_1)$ で，$\beta' = f_G(\alpha) > \beta = \sup_{\gamma<\alpha} f_G(\gamma)$ となるものがある．今，$p \in P$ がこの事実を force するようにとれば，continuousely increasing な $f \in V$, $f : \omega_1 \to \omega_1$ で $p \subseteq f$ となるものがとれるが，$f(\alpha) = \beta'$ となるから，$\alpha' < \alpha$, $\alpha' \notin \mathrm{dom}(p)$ で $f(\alpha') > \beta$ となるものがある．$p' = p \cup \{(\alpha', f(\alpha'))\}$ とすれば，$p' \subseteq f$ だから，$p' \in P$ となり，$p' \leq p$ だが，

$$p' \Vdash_P \text{“ } \beta < f(\alpha') \leq \sup_{\gamma<\alpha} \dot{f}_G(\gamma) \text{ ”}$$

となり矛盾である．

(b): P が proper p.o. であることを示すが，このために，P での proper game $\mathcal{G}$ で Player II が winning strategy を持つことを言う．

復習: proper game $\mathcal{G}$ とは長さが ω の二人ゲームで，$\mathcal{G}$ での Players I, II の手は，

I	$p; W_0$	W_1	W_2	$\cdots$	W_n		$\cdots$
II	B^0_0	$B^1_0; B^1_1$	$B^2_0; B^2_1; B^2_2$	$\cdots$	$B^n_0; \ldots; B^n_n$		$\cdots$

ここに，$p \in P$; W_i は p の分割; $B^n_i \in [W_i]^{\aleph_0}$ for $i \leq n < \omega$ で，

$$\text{II winns} \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \leq p \ \forall n \in \omega \ (\bigcup \{B^k_n : k \in \omega \setminus n\} \text{ is predense below } q).$$

次のような player II の strategy を考える： χ を十分に大きくとっておき，countable な elementary submodels $M_i \prec \mathcal{H}(\chi)$ の上昇列を，$M_i \cap \omega_1 \in \omega_1$,

$$p, W_0, B^0_0, W_1, \ldots, W_{i-1}, B^{i-1}_0, \ldots, B^{i-1}_{i-1}, W_i \in M_i$$

となるようにとり，$B^i_j = W_j \cap M_i$ とする．$M = \bigcup_{i<\omega} M_i$, $\gamma = M \cap \omega_1$ とする．

Claim 38.1 $q = p \cup \{(\gamma, \gamma)\} \in P$.

$\vdash$ $p \in P$ で $p \in M$ だから，continuously increasing な $f \in M$ で $p \subseteq f$ となるものがあるが，f が continuously increasing であることから，$f(\gamma) = \gamma$ がわかる．したがって $q \subseteq f$ である． $\dashv$ (Claim 38.1)

上の Claim と，次により，前述の Player II の strategy が $\mathcal{G}$ での winning strategy になっていることがわかる．

Claim 38.2 すべての $n \in \omega$ に対し，$\bigcup\{B^k_n : k \in \omega \setminus n\}$ は q 以下で *predense* となっている．

$\vdash$ $q' \leq q$ とすると，continuously increasing な $g : \omega_1 \to \omega_1$ で，$q' \subseteq f$ となるものがある．$(\gamma, \gamma) \in q'$ だから，$f(\gamma) = \gamma$ である．$q'' = q' \cap (\gamma \times \gamma)$ とすると，$q'' \in M$ だから，ある $i \in \omega$ に対し，$q'' \in M_i$ となる．$i \geq n$ としてよい．このとき，$M_i \models$ "W_n は p の分割" となっているから，$q^* \in M_i \cap W_n$ で q'' と compatible なものが存在する．$q^{**} \in P$ を $q^{**} \leq q^*, q''$ となるようにとる．このとき，continuously increasing な $g : \omega_1 \to \omega_1, g \in M_i$ で $q^{**} \subseteq g$ となるものが存在するが，$g \in M$ だから，$g(\gamma) = \gamma$ となる．したがって，

$$h = g\restriction \gamma \cup f\restriction (\omega_1 \setminus \gamma)$$

とすると $r = q^{**} \cup q' \subseteq h$ で h は continuously increasing である．したがって $r \in P$ で $r \leq q', q^*$ となる． $\dashv$ (Claim 38.2)

(c) : P が Axiom A を満たさないことを示すには，P でのゲーム $\mathcal{G}_\omega$ で Player I が winning strategy を持つことを示せばよい．ここで，$\mathcal{G}_\omega$ のゲームは，

$$\begin{array}{lccccc} I & p; W_0 & W_1 & W_2 & \ldots \\ II & & B_0 & B_1 & B_2 & \ldots \end{array}$$

という形をしている．ここに，$p \in P$ で，各 W_i は p の分割で $B_i \in [W_i]^{\aleph_0}$ である．このゲームで II が勝つのは，$\prod_{n\in\omega} \sum B_n \neq 0$ となるとき，つまり，$q \leq p$ で，すべての $n \in \omega$ に対し，B_n が q 以下で predense となるようなものがあるときである．

I の winning startegy は次のような $\mathcal{G}_\omega$ の言い換えを用いるとわかりやすい．ゲーム（これを $\mathcal{G}^{ord}_\omega$ と呼ぶことにする）での Players I, II の手は，

$$\begin{array}{lccccccc} I & p; \dot\alpha_0 & \dot\alpha_1 & \dot\alpha_2 & \cdots & \dot\alpha_i & \cdots \\ II & & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots \end{array}$$

という形をしている．ここに $p \in P$ で $\dot\alpha_i$ は ordinal の P-name で A_i は ordinals の (V での) 可算集合である．Player II が勝つのは，ある $q \leq p$ で，$q \Vdash_P$ "$\dot\alpha_i \in A_i$" がすべての $i \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在するときとする．

$\mathcal{G}_\omega$ のゲームは $\mathcal{G}^{ord}_\omega$ のゲームに自然に翻訳でき，逆翻訳も自然なものとして一意に決まる．したがって，Player I が $\mathcal{G}^{ord}_\omega$ で winning strategy を持つことを示せばよい．$\dot f$ を P の付加する generic function の P-name として，χ を十分に大きくとっておく．Player I は，彼の手と平行して可算な elementary submodels $M_i \prec \mathcal{H}(\chi)$ の上昇列を $P, p, \dot f \in M_0$, $M_i \cap \omega_1 \in \omega_1$ ($\gamma_i = M_i \cap \omega_1$ とする),

$$M_n, W_n, A_n \in M_{n+1}$$

を満たすようにとってゆき，α_i として，$\dot{f}(\gamma_i)$ に相当する P-name をとる．この strategy が Player I の winning strategy であることを示すために，$M = \bigcup_{i\in\omega} M_i$ として，$\gamma = M \cap \omega_1$ とする．$q \leq p$ を任意にとる．このとき，$i^* \in \omega$ を十分に大きくとって，$\mathrm{dom}(q) \cap \gamma \subseteq \gamma_{i^*}$ となるようにする．このとき $q' \in P$, $q' \leq q$ で $q'(\gamma_{i^*+1}) \geq \gamma_{i^*+2}$ となるようなものがとれる： $f : \omega_1 \to \omega$ を continuously increasing で $q \subseteq f$ となるようなものとして，$g \in M$ を

$$M \models g : \omega_1 \to \omega_1 \ \wedge \ g \text{ is continuously increasing } \wedge \ g\restriction \gamma_{i^*} = id_{\gamma_{i^*}}$$
$$\wedge\, g(\gamma_{i^*+1} \geq \gamma_{i^*+2}) \ \wedge \ \exists \alpha < \omega_1 \, [\, g\restriction (\omega_1 \setminus \alpha) = id_{\omega_1 \setminus \alpha}\,]$$

となるようにとる．$f' = f \circ g$ とすれば，$f' : \omega_1 \to \omega_1$ で f' は continuously increasing, $q \subseteq f'$ で $f'(\gamma_{i^*+1}) \geq \gamma_{i^*+2}$ となるから，$q' = q \cup \{\langle \gamma_{i^*+1}, f'(\gamma_{i^*+1})\rangle\}$ とすればよい．

このような $q' \leq q$ に対し，

$$q' \Vdash_P \text{“}\, \dot{f}(\gamma_{i^*+1}) \geq \gamma_{i^*+2} \,\text{”}$$

で，$\sup A_{i^*+1} < \gamma_{i^*+2}$ だから，

$$q' \Vdash_P \text{“}\, \dot{\alpha}_{i^*+1} \notin A_{i^*+1} \,\text{”}$$

となる．したがって

$$q \nVdash_P \text{“}\, \dot{\alpha}_{i^*+1} \in A_{i^*+1} \,\text{”}$$

である．したがって，上の strategy は Player I の winning strategy となっていることがわかる． ❑ (Theorem 38)

References

[1] J.E. Baumgartner, Applications of the Proper Forcing Axiom, Hanndbook of Set-Theoretic Topology, 913–960, (North-Holland, 1984).

7 Club guessing

以下の証明は平田君によるものである：

Theorem 39 (S. Shelah, Club Guessing Lemma の特殊な場合) $\lambda > \omega_1$ を *regular cardinal* として[1]，$S = S^{\omega}_{\lambda} = \{\alpha < \lambda : cf(\alpha) = \omega\}$ とする．このとき，列 $\langle c_\gamma : \gamma \in S\rangle$ で，すべての $\gamma \in S$ に対し，$c_\gamma \subseteq \gamma$ は *cofinal* かつ $otp(c_\gamma) = \omega$ で，すべての *club set* $C \subseteq \lambda$ に対し，$\{\gamma \in S : c_\gamma \subseteq C\}$ が *stationary* になるような (つまり，すべての λ の *club subsets* に対し ♣-*sequence* となるような) ものが存在する．

Proof 各 $\gamma \in S$ に対し，$d_\gamma \subseteq \gamma$ を cofinal で $otp(d_\gamma) = \omega$ となるように選んでおく．club set $D \subseteq \lambda$ に対し，$d^D_\gamma, \gamma \in S$ を

$$d^D_\gamma = \{\sup(D \cap \alpha) : \alpha \in d_\gamma\}$$

とする．$d^D_\gamma \subseteq D \cap \gamma$ である．$D \subseteq \lambda$ が club のとき，D' を D の limit points の全体からなる集合とすれば D' も λ の club subset となるが，

$$S \cap D' \subseteq \{\gamma \in S : d^D_\gamma \text{ は } \gamma \text{ の cofinal な subset}\}$$

となることに注意しておく．

Claim 39.1 *club set* $D^* \subseteq \lambda$ で，すべての *club set* $C \subseteq \lambda$ に対し，$\{\gamma \in S : d^{D^*}_\gamma \subseteq C\}$ が *stationary* になるようなものが存在する．

$\vdash$ このような D^* が存在しないと仮定して矛盾を導く．このとき，inductive に club sets の $\subseteq$ に関する下降列 $C_\xi, \xi < \omega_1$ で，

$$C_{\xi+1} \cap \{\gamma \in S : d^{C_\xi}_\gamma \subseteq C_{\xi+1}\} = \emptyset$$

となるようなものがとれる (limit $\gamma < \omega_1$ では $C_\gamma = \cap_{\xi<\gamma} C_\xi$ とすればよい)．

$$(*) \qquad C = \bigcap_{\xi<\omega_1} C_\xi$$

として，C' を C の limit points の全体からなる集合とする．$\gamma \in S \cap C'$ に対し，$\xi^* < \omega_1$ が，すべての $\xi^* \le \xi < \omega_1$ に対し，$d^{C_\xi}_\gamma = d^{C_{\xi^*}}_\gamma$ となるようとれる： ordinals の列 $\langle$“$d^{C_\xi}_\gamma$ の k 番目の元” : $\xi < \omega_1\rangle$ は decreasing だから，ある $\xi_k < \omega_1$ から一定になるので，$\xi^* = \sup_{k\in\omega} \xi_k$ とすればよい．特に，$d^{C_{\xi^*}}_\gamma = d^{C_{\xi^*+1}}_\gamma$ である．ところが，$d^{C_{\xi^*+1}}_\gamma \subseteq C_{\gamma^*+1}$ だが，一方 $\gamma \in C_{\gamma^*+1}$ により，$d^{C_{\xi^*}}_\gamma \not\subseteq C_{\gamma^*+1}$ である．これは矛盾である． $\dashv$ (Claim 39.1)

上の claim でのような D^* をとり，$\gamma \in S$ に対し，c_γ を $d^{D^*}_\gamma$ が γ で cofinal なときには，$c_\gamma = d^{D^*}_\gamma$, そうでないときには c_γ は γ の任意の cofinal な部分集合で $otp(c_\gamma) = \omega$ となるもの，とすれば，$\langle c_\gamma : \gamma \in S\rangle$ は求めるようなものとなる： $C \subseteq \lambda$ を club とすれば，$S' = \{\gamma \in S : d^{D^*}_\gamma \subseteq C\}$ は stationary となるが，$D^{*\prime}$ を D^* の limit points の全体の集合とすれば，Claim の前での議論により，

$$S' \cap D^{*\prime} \subseteq \{\gamma \in S : d^{D^*}_\gamma = c_\gamma \ \wedge\ d^{D^*}_\gamma \subseteq C\} \subseteq \{\gamma \in S : c_\gamma \subseteq C\}$$

となる．この包含式の左辺は stationary だから，右辺も stationary となる． $\square$ (Theorem 39)

[1] $\lambda > \omega_1$ は，$(*)$ により必要である．

8 weakly compact cardinals の elementary embedding による特徴付け

κ が weakly compact とは，高々 κ 個の non logical symbols しか含まないような任意の $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$-文の集合 T が κ-satisfiable (つまり任意の $T' \in [T]^{<\kappa}$ が satisfiable)なら，satisfiable となること．

Theorem 40 κ を *strongly inaccessible* とするとき，以下は同値である：
(1) κ は *weakly compact.*
(2) 任意の *transitive set* N で $\kappa \in N$ かつ $|N| = \kappa$ となるものに対し，*transitive set* M と *elementary embedding* $j : N \to M$ で $crit(j) = \kappa$ となるようなものが存在する．

Proof (1)$\Rightarrow$(2): N を (2) でのようにとる．$\mathcal{L}$ を ZFC の言語として，$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{\underline{a} : a \in N\} \cup \{\underline{c}\}$ とする．ここに各 $a \in N$ に対し，$\underline{a}$ はそれぞれ異なる新しい constant symbol とする．また $\underline{c}$ は $\underline{a}$, $a \in N$ のどれとも異なる新しい constant symbol とする．

$$\begin{aligned} T = \{&\varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) : \varphi \text{ は } \mathcal{L}\text{-formula で } N \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \} \\ &\cup \{\text{“}\underline{c} \text{ is an ordinal”}\} \cup \{\text{“}\underline{c} < \underline{\kappa}\text{”}\} \cup \{\text{“}\underline{\alpha} < \underline{c}\text{” } : \alpha < \kappa\} \\ &\cup \{\forall x < \underline{\alpha}\, [\textstyle\bigvee_{\beta<\alpha} x = \underline{\beta}] : \alpha < \kappa\} \cup \{\neg\, \exists x_1 \exists x_2 \cdots [\textstyle\bigwedge_{n\in\omega} x_{n+1} \in x_n]\ \} \end{aligned}$$

とすると，T は κ-satisfiable となるから，仮定により T は satisfiable となる．T のモデル $\overline{M}$ をとりこれの transitive collapse を M とする．各 $a \in N$ に対し $\underline{a}$ の M での解釈を対応させる mapping を j とすれば，j は elementary embedding で κ は j の critical point となる．

(2)$\Rightarrow$(1): T を高々 κ 個の non logical symbols しか含まないような $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$-文の集合とする．$\kappa$ は strongly inaccessible だから，$|T| \leq \kappa$ である．T は κ-satisfiable と仮定する．$\varphi \in T$ なら $|\mathrm{TC}(\varphi)| < \kappa$ としてよい．$f : \kappa \to T$ を bijection とする．また各 $\alpha < \kappa$ に対し，N_α を $N_\alpha \models f''\alpha$ で $|\mathrm{TC}(N_\alpha)| < \kappa$ となるようにとり，$g : \kappa \to V$ を $\alpha \mapsto N_\alpha$ により定義する．今，transitive な N を f, g, T, $\kappa \in N$, $|N| = \kappa$ で，十分に大きな ZFC の fragment を満たすようにとり，M, j を (2) でのようにとる．このとき，elementarity から，

$$M \models \text{“}j(g)(\kappa) \models j(f)''\kappa\text{”}$$

が成り立つが，$j(f)''\kappa = f''\kappa = T$ である．したがって $\models$ の absoluteness から $j(g)(\kappa) \models T$ がわかる． □ (Theorem 40)

上の証明をよく見ると，さらに Theorem 40 の (1), (2) は次とも同値になることがわかる:

(3) 任意の transitive set N で $\kappa \in N$ かつ $|N| = \kappa$ となるものと，任意の $\xi < \kappa^+$ に対し，transitive set M と elementary embedding $j : N \to M$ で $\xi \in M$, $crit(j) = \kappa$, $j(\kappa) > \xi$ となるようなものが存在する．

9 PFA を force する

[T. Jech: Multiple Forcing による．]

Lemma 41 (Laver function) κ を *supercompact* とするとき，$f : \kappa \to V_\kappa$ で，すべての $x \in V$ に対し，十分に大きな λ をとると，*elementary embedding* $j : V \to M$ で，

(0) $crit(j) = \kappa$;
(i) $j(\kappa) > \lambda$;
(ii) ${}^{\lambda}M \subseteq M$;
(iii) $(j(f))(\kappa) = x$

となるようなものが存在する．ここで "十分に大きな" は $\lambda \geq \kappa$ かつ $\lambda \geq |\,\mathrm{TC}(x)\,|$ で十分である． □

上のような f を Laver function と呼ぶ．

9.1 PFA を満たすモデルの構成

κ を supercompact とし，f を Laver function とする．CS-iteration $\langle P_\alpha, \dot{Q}_\beta : \alpha \leq \kappa, \beta < \kappa \rangle$ を次のように定義する： iteration の α-stage で，もし $f(\alpha)$ が P_α-names の組 $\langle \dot{P}, \dot{\mathcal{D}} \rangle$ で，

$$\Vdash_{P_\alpha} \text{“}\dot{P} \text{ は proper p.o. で } \dot{\mathcal{D}} \text{ は } \dot{P} \text{ の dense subsets の } < \kappa\text{-sequence である．”}$$

なら，$\dot{Q}_\alpha = \dot{P}$ とし，そうでないなら $\dot{Q}_\alpha$ は trivial p.o.（の P_α-name）とする．

このとき，$\Vdash_{P_\kappa}$ “$\kappa = \aleph_2 \ \wedge$ PFA” を示す．このために G を P_κ-generic over V とする．P_κ は proper だから，P_κ は $\aleph_1$ を保存する．$f(\alpha) \in V_\kappa$ により，$\alpha < \kappa$ に対しては，$|\,P_\alpha\,| < \kappa$ となっている．したがって，P_κ は κ-c.c. を満たすから，V の cardinals $\geq \kappa$ は保存されている．また $|\,P_\kappa\,| = \kappa$ により，$2^{\aleph_0} \leq \kappa$ だが，命題：

($*$) P が proper で $\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ for some $\gamma < \kappa$ が P の dense sets の列なら，P 上の filter F で $D_\alpha \cap F = \emptyset$ がすべての $\alpha < \gamma$ に対し成り立つようなものが存在する．

が $V[G]$ で成り立つことを証明する．これにより $V[G] \models \kappa \leq \aleph_2$ と $V[G] \models$ PFA がわかる．

($*$) を証明するために，$V[G]$ で P を proper p.o. とし，$\mathcal{D} = \langle D_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ を P の dense subsets の γ-列とする（$\gamma < \kappa$）．$\dot{P}$ と $\dot{\mathcal{D}}$ を対応する P_κ-names とする．λ を十分に大きくとる．簡単のために $P \subseteq \lambda$ とする．f は Laver function だったから，elementary embedding $j : V \to M$ で，

(0) $crit(j) = \kappa$;
(i) $j(\kappa) > \lambda$;
(ii) ${}^{\lambda}M \subseteq M$ かつ
(iii) $(j(f))(\kappa) = \langle \dot{P}, \dot{\mathcal{D}} \rangle$

となるようなものが存在する．(ii) により $P \in M$ で，$M \subseteq V$ だから，G は M 上 P_κ-generic だが，

Lemma 42 ${}^{\lambda}(M[G]) \subseteq M[G]$.

Proof まず，$\dot{a}$ を P_κ-name で $\Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{a} \in M[\dot{G}]$” となっているものとすると，P_κ の maximal pairwise incompatible elements の列 $\langle p_\alpha : \alpha < \eta \rangle$ と P-names の列 $\langle \dot{a}_\alpha : \alpha < \eta \rangle$ で，すべての $\alpha < \eta$ に対し，$\dot{a}_\alpha \in M$ で，$p_\alpha \Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{a} = \dot{a}_\alpha$” となるようなものがとれる．

$$\dot{a}' = \{\langle p_\alpha, \dot{a}_\alpha \rangle : \alpha < \eta\}$$

とすると，$\Vdash_{P_\kappa}$ “$\{\dot{a}\} = \dot{a}'$” となるが，P_κ の κ-c.c. により $\eta < \lambda$ だから，(ii) により $\dot{a}' \in M$ である．ここで $\dot{a}'' \in V^P \cap M$ を $M \models \Vdash_{P_\kappa}$ “$\{\dot{a}''\} = \dot{a}'$” となるようなものとすれば，$\Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{a} = \dot{a}''$” となる．

${}^\lambda(M[G]) \subseteq M[G]$ を示すために，$b \in {}^\lambda(M[G])$ として，$\dot{b}$ を b の P_κ-name で，$\Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{b} \in {}^\lambda(M[G])$” となっているものとする．$P_\kappa$-names $\dot{a}_\alpha$, $\alpha < \lambda$ を $\Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{b} = \{\dot{a}_\alpha : \alpha < \lambda\}$” となるものとする．前のパラグラフでの考察から，各 $\dot{a}_\alpha$ は M の元としてよい．

$$\dot{b}' = \{\langle 1_{P_\kappa}, \dot{a}_\alpha \rangle : \alpha < \lambda\}$$

とすると，(ii) により，$\dot{b}' \in M$となるが，$\Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{b} = \dot{b}'$” である．したがって，$b \in M[G]$ がわかる． ❑ (Lemma 42)

$P \in M$ だったから，$P \in M[G]$ であるが，

Lemma 43 $M[G] \models$ “P は *proper* である．”

Proof P は $V[G]$ で proper だから，このことは，ある $2^{|P|} < \eta < \lambda$ に対する countable models の club set $\mathcal{C} \subseteq [V_\eta]^{\aleph_0}$ (in $V[G]$) によって保証される．したがって，前の Lemma により，$\mathcal{C} \in M[G]$ となり，$M[G] \models$“P は proper” がわかる． ❑ (Lemma 43)

さて，$j(P_\kappa)$ を M で考えると，elementarity から，

$$M \models \text{“}j(P_\kappa) \text{ は長さ } j(\kappa) \text{ の CS-iteration”}$$

が成り立つ．$j\restriction\kappa$ は identity だから，$P_\kappa = j(P_\kappa)\restriction\kappa$ となっている．M での iteration の κ-step では，$j(f)(\kappa) = \langle \dot{P}, \dot{\mathcal{D}} \rangle$ となっており，上の Lemma から，$M \models \Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{P}$ は proper” だから，$j(P_\kappa)$ は M で（したがって V でも）$P_\kappa * \dot{P} * \dot{R}$ という形に分解できる．H を $V[G]$ 上 $(\dot{P})^{V[G]}$-generic filter, K を $V[G][H]$ 上 $(\dot{R})^{V[G][H]}$-generic filter として，以下 $V[G][H][K]$ で議論を進める．Elementary embedding $j^* : V[G] \to M[G][H][K]$ を，P_κ-name $\dot{x}$ に対し，

$$j^*(\dot{x}^{V[G]}) = j(\dot{x})^{M[G][H][K]}$$

により定義する．これが well-defined であることは，$V \models p \Vdash_{P_\kappa}$ “$\dot{x} = \dot{y}$” なら，elementarity により

$$M \models j(p) \Vdash_{j(P_\kappa)} \text{“}j(\dot{x}) = j(\dot{y})\text{”}$$

となり，$j(p) = p$ $(= p * 1_{\dot{P}} * 1_{\dot{R}})$ であるからよい．j^* の elementarity も同様に示せ，$j^* \supseteq j$ も容易にわかる．

$F = \{j^*(p) : p \in H\}$ とすると，$P \subseteq \lambda \subseteq M$ だから $F = \{j(p) : p \in H\}$ となり，$j\restriction\lambda \in M$ により，$F \in M[G][H][K]$ がわかる．F は $j(P)$ の filter G^* を生成する．H は $V[G]$ で P-generic だったから，すべての $\alpha < \gamma$ に対し，$H \cap D_\alpha \neq \emptyset$ となる．したがっ

て，すべての $\alpha < \gamma$ に対し，$G^* \cap j^*(D_\alpha) \neq \emptyset$ である．一方，$\gamma < \kappa = crit(j) = crit(j^*)$ により，$j^*(\mathcal{D}) = \langle j^*(D_\alpha) : \alpha < \gamma \rangle$ である．よって，

$$M[G][H][K] \models \text{“}j^*(\mathcal{D})\text{-generic filter over } j^*(P) \text{ が存在する．”}$$

となる．したがって j^* の elementarity により，

$$V[G] \models \text{“}\mathcal{D}\text{-generic filter over } P \text{ が存在する．”}$$

が導け，証明が完了する．