初等数学ノート

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

主な更新日: 19.05.18(土 23:24(JST)) 19.02.18(月 12:46(JST)) 18.07.30(月 11:41(JST)) 16.01.04(月 02:04(JST)) Jun.15,2015 Jun.01,2014 Feb.17,2014 Jun.18,2011 Mar.22,2011 Dec.1,2008 Aug.3,2008 Jul.14,2008 May 28,2007 Mar.22,2007 May 02,2006 Dec.26,2005 Nov.13,2005 Oct.22,2005 Jul.5,2005 Jun.17,2005 Dec.2,2004 Mar.1,2003 Feb.20,2003

2019 年 09 月 01 日 (01:16)

“初等数学ノート” というのは題としてあまり適当でないかもしれません．要するに，数学の「研究ノート」のようなものとして書くほどの内容では全然ない，初等的な（しかも多くの場合よく知られている）内容の数学関連のノートを整理したものです．リクリエーション数学，教養の微積や線型代数などに関連したメモ（微積や線型代数を教えているうちに気のついた問題や，このように言えば分りやすいのではないか，というような工夫，いつか後で教科書を書くときに使えそうな別証明や記述方法，etc.）また，大学の数学科の講義で話せる内容などを集めたものです．読者は特に想定していません．全体的には自分のための忘備録という性格が強いし，内容や予備知識のレベルにもばらつきがあります．使用言語も日本語になったり英語になったりドイツ語になったりしてばらばらです．しかし，高校数学くらいの予備知識で読めるものも少なくないはずと思います．分野ごとの章分けになっています（下の目次を参照）．このテキストは常に work in progress 状態です．Download して読んだ方は，ぜひ誤植の指摘や改良の示唆等のコメントをください[1)]．

記法に関する注意: 記号の使い方はできるだけ標準的なものを選んでいますが，通常の記法と異る可能性のあるいくつかの点について注意しておきます．

　$\mathbb{N}$ で自然数の全体を表わしています．自然数は 0 から始まるものとしています．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ です．自然数は，集合論でスタンダードとなっている方法 (フォン・ノイマンによる定義) で導入されているものとします．つまり 0 は空集合 $\emptyset$ のこととし，$n-1$ が

[1)] このテキストの最新版は，

　http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-elementary.pdf

としてダウンロードできます．2011 年 03 月 22 日 (火 21:45(JST)) に，本テキストに含まれていたトポロジーの節を，

　http://fuchino.ddo.jp/notes/math-notes-top.pdf

として分離しました．トポロジーに関することを，そのうち書こうと思っている集合論的トポロジーの教科書というかモノグラフのようなものの準備をかねて順不同に書き出しているうちに，だんだん「初等的」でなくなってきてしまったからですが，このテキストもできるかぎり self-contained に書く努力はしていますので興味のある方はこちらも覗いてみてください．

定義されたときに，$n = \{0, ..., n-1\}$ とします．このようにして集合論の外側 (超数学) で定義された自然数の “全体” を $\mathbb{N}$ とあらわし[2)]，集合論の中で定義された自然数の全体を ω (ギリシャ文字オメガ) で表わすという使い分けをすることも多いのですが，このテキストでは，超数学と集合論の中での数学の差が問題になるような微妙な状況は扱わないので (特別な注意をしない限り)，ω も $\mathbb{N}$ も集合論の中の同じ対象を指す記号として使うことにします．

数学的対象の順序対は，丸括弧で (a, b) などと表わすことが多いのですが，開区間と区別するため，山括弧 (angle brackets) を使って $\langle a, b\rangle$ などと表わすことにます．これは最近の集合論の論文やモノグラフなどでは標準となっている記法です．

$A \setminus B$ は A と B の集合差を表わします．$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ です．原則的には，すべての数学的対象は集合である，という想定で議論します．特に集合と集合族は同じものですが，理解の助けのために，両方の言葉を使い分けています．たとえば，$\mathcal{F}$ を集合族と見て，$\bigcup\mathcal{F} = \{x :$ ある $a \in \mathcal{F}$ に対し $x \in a$ である $\}$ とします．集合族 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F} = \{a_i : i \in I\}$ として添字つきの集合列の値域として表されているときには，一般の数学でより頻繁に使われる記号法では $\bigcup\mathcal{F}$ は $\bigcup_{i\in I} a_i$ と表されることに注意．

目次

[2)] 集合論の外では無限集合はフィクションにすぎないので，「全体」という単語に quotation marks をかけています．たとえば超数学で，“$n \in \mathbb{N}$ とする” と言ったときには，これは，『n を，(“$\emptyset$”, “$\{\emptyset\}$”, “$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$” などの) 自然数を表現する (具体的に与えられた) 記号列とする』という表明の略記だと思うことにします．

1 解析学

analysis

1.1 三角関数の (基礎)^2 知識

trigonometry

この節は中部大学工学部で 2007 年春学期に開講した，微分積分学 I の補足授業として行なった三角関数の導入の講義を基にしています．私が中部大学で担当していたこの講義を含め，色々な事項の説明を「高校で習っているから」という理由で省略してしまうことが，難しくなりつつある，というのが今日（これを書いたのは 2007 年ですが，この「今日」は現在でも有効なように思えます）の日本の大学での理学基礎教育のかなり一般的な現状のようです．

いずれにしても，手をこまねいて教えることを放棄するわけにはいかないので，「高校で習っている」はずのことや，「中学校で習っている」はずのことでも大学の講義としての品格を失なわないようなやり方で，ていねいに（再）導入する必要があると思われます．

以下は，そのような再導入の試みの 1 つです．といっても特に特別な導入の仕方を目指しているわけではありません．逆に，目標は，できるだけ標準的な導入に近いやり方でしかも，ごまかしのない，self-contained な，中学校の知識だけを前提にしても理解にさしさわりのないような記述を試みるということです．

* * *

角度は日常生活では 45°, 90°, 180° など度数で表現されることが多いですが，この度数は，ぐるっと一回りした角度を 360° として，これを等分して角度を表すシステムです．ところが，この 360 という数はよく考えてみると何の必然性もなさそうに思えます．数学では，通常この度数法の代わりに弧度法 (radiant [ˈreɪdɪənt]) が用いられます．これは 360° に相当する角度を（単位なしの） 2π で表す（一回りの角度との比率が α の角度は $2\pi\alpha$ で表す[3)]）ものです．2π は（π の定義から）半径が 1 の円の円周の長さなので，弧度法の角

[3)] たとえば直角は一回転の $\dfrac{1}{4}$ なので，$2\pi \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ で表されます．

度は，次のように考えることができます:

(1.1) $x \in \mathbb{R}$ の弧度法で表している角度は，xy-平面の原点を中心に半径が 1 の円を描いたとき，x 軸の正の部分を原点を中心にこの円上の円弧の長さが x になるように左回りに回転させたとき，この直線ともとの x 軸の正の部分とのなす角とする.

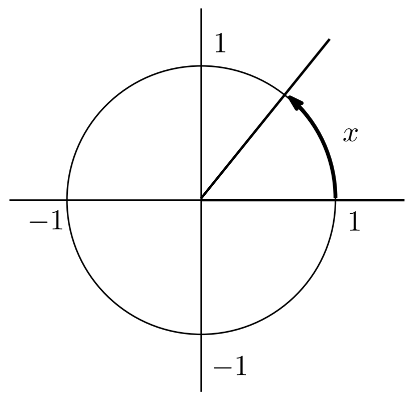


図 1

弧度法での角度を上のように定義すると，x が 0 と 2π の間の数でなくても，またマイナスの数でも，x の表している角度を考えることができることになります．ちなみにマイナスの数が弧度法で表す角度は，右回りの回転をマイナスの円弧の長さと考えることで，この文脈で自然に解釈できます.

弧度法での円周一回りに相当する角度は 2π で，これは 0 の表す角度と同じものです．より一般的には次が成立つことがわかります:

(1.2) $x, y \in \mathbb{R}$ を弧度法で考えるとき，x と y が同じ角（度）を表しているのは，ある整数 m があって $x = y + 2\pi m$ となるときである.

また数の足し算で弧度法での角度の足し算が自然に導入できていますが，これは次のようにして見ることができます: 今 $x, x' \in \mathbb{R}$ が弧度法で同じ角度をあらわし，$y, y' \in \mathbb{R}$ も弧度法で同じ角度をあらわしているとする．このとき (1.2) から，$x = x' + 2\pi m$, $y = y' + 2\pi n$ となる整数 m, n がとれる．$x + y = x' + y' + 2\pi(m + n)$ となるから，ふたたび (1.2) により，$x + y$ と $x' + y'$ は弧度法で同じ角度をあらわす数になっている.

度数法での a° が弧度法で x のとき，$a : 360 = x : 2\pi$ ですから，a° は弧度法では，$\dfrac{2a\pi}{360}$ になることに注意します．たとえば，90° は，$\dfrac{2 \times 90\pi}{360} = \dfrac{\pi}{2}$ です.

さて，三角関数の代表的なものは $\sin x, \cos x, \tan x$ の 3 つです．まずこれらを $[0, \frac{\pi}{2})$ 上の関数（つまり $[0, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数）として定義してみましょう．このために，$x \in [0, \frac{\pi}{2})$ に対し，$\angle\mathrm{ABC} = x$, $\angle\mathrm{BCA} = \frac{\pi}{2}$ となる直角三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ を考えます．ただし $x = 0$ のときには，高さが 0 の A と C が一致した “つぶれた三角形” を考えることに

します．三角形の内角の和は π (180°) なので，条件 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ は，このような三角形が考えられることと同値であることに注意してください[4]．

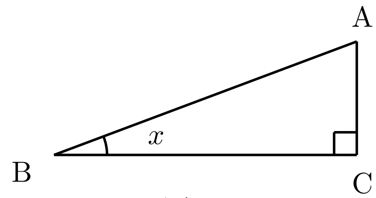


図 2 pythagoras-a

ここで，$\sin x, \cos x, \tan x$ を，

$$\sin x = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}, \quad \cos x = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

と定義します．ただし，たとえば AB で頂点 A と B を端点とする線分の (何等かの固定した単位系での[5]) 長さを表わしています．

直角三角形に関しては，三平方の定理としても知られている次のピタゴラスの定理が成立ちます．

定理 1.1 （ピタゴラスの定理） AB, BC, CA をそれぞれ斜辺，底辺，高さとする直角三角形で，$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$ が成り立つ． pythagoras

この定理は測量や作図，設計の基礎でもあるので，人類の歴史の中で大規模な測地や建設が行われるようになった時期には少なくとも経験則としては知られていたはずですが，実際に，古バビロニアの遺跡から出土した刻板で，$a^2 + b^2 = c^2$ の整数解を並べたものが残っていることから[6]，この時期にはすでにピタゴラスの定理が知られていて，その測量や作図，設計での高度な応用がなされていたことがわかります．エジプト 3 大ピラミッドの造営されたのは，紀元前 2550 年と古バビロニアよりさらにずっと前の時期なので，ピタゴラスの定理は，もっと古い時代にもすでに知られていたのではないかと想像されますが，エジプトでは，3 : 4 : 5 の長さの比率の縄で直角を作ることを専門とする職人がいたということで，ピタゴラスの定理（とその逆）はこの比率に特化された形で使われていたようです．

---

[4] ここで直角三角形に関する用語を復習しておきましょう．直角三角形が図 2 のように描かれているとき，AB を △ABC の斜辺と呼ぶのでした．また BC は △ABC の底辺 AC は △ABC の高さと呼びます．ただし，“高さ” と言ったときには，文脈によって辺 AC のことを指すことも，その長さのことを指すこともあります．これに対して，斜辺や底辺の長さはそれぞれ “斜辺の長さ”, “底辺の長さ” と言って “斜辺”, “底辺” とは言葉として区別することにします．これは単に日本語の語呂の都合で他には特に意味はありません．また，たとえば，AB で，三角形 △ABC の辺 AB のことも，この辺の長さのこともあらわすことにします．

[5] $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ などの比率のみが問題となっているので，ここでの議論では，どの単位系で考えるかには依存しません．

[6] バビロニアは紀元前 1900 年から紀元前 1200 年くらいの時期に栄えた古代国家で，首都バビロンは現在のイラクの，バグダットの南方約 90km くらいのところにあった古代都市です．この出土した刻板は考古学者たちによって Plimpton 322 という整理番号がつけられていて，この名前で有名になっています．

また古代インドでは 15 : 36 : 39 という比率が使われていた（$15^2 + 36^2 = 1521 = 39^2$），ということです（[2]）.

ピタゴラスの定理の現存している証明はこれよりずっと新しいものです．紀元前 3 世紀ごろに書かれたユークリッドの「原論」に載っている証明は，現存している証明の最初のものの 1 つで，「ピタゴラスの定理」という名称もここで使われています.

なお漢朝 (紀元前 202 年〜紀元 220 年) の「周髀算経」には 3 : 4 : 5 の比率に特化した（ピタゴラスの定理の逆の）証明が記載されているということです.

ピタゴラスの定理の証明は 300 以上の異なるものが知られていますが，以下の証明は，ユークリッドによる証明とほぼ同一のものです.

ピタゴラスの定理の証明

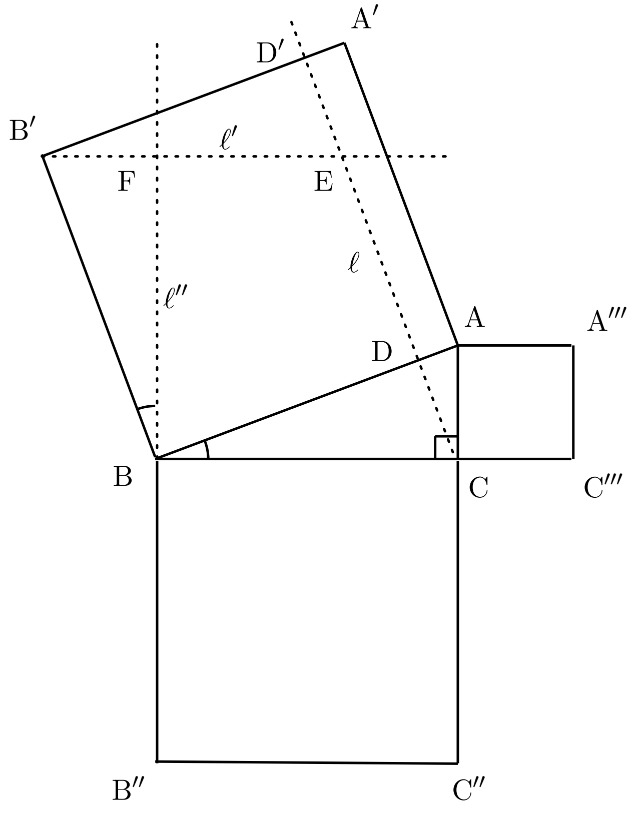


図 3

AB^2, BC^2, CA^2 は，それぞれ直角三角形の斜辺，底辺，高さを一辺とする正方形の面積だから，方程式 $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$ は，この直角三角形の斜辺を一辺する正方形の面積が，底辺を一辺とする正方形の面積と高さを一辺とする正方形の面積を足したものと等しくなることを主張していることに注意する.

そこで，任意の直角三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ をとり，AB^2, BC^2, CA^2 のそれぞれを一辺とする正方形をこの三角形の外側に付け加え，それらを $\square\mathrm{ABB'A'}$, $\square\mathrm{BCC''B''}$, $\square CAA'''C'''$ とする（図 3）.

C を通る $\mathrm{BB'}$ と平行な直線を ℓ として，ℓ と AB の交点を D とし，$\mathrm{A'B'}$ との交点を $\mathrm{D'}$ とする．また B' を通る BC と平行な直線を ℓ' として ℓ と ℓ' の交点を E とする．このとき $\square\mathrm{BB'D'D}$ の面積は $\square\mathrm{BB'EC}$ の面積と等しくなる．B を通り BC に垂直な直線を ℓ'' として ℓ'' と ℓ' の交点を F とすると，$\square\mathrm{BB'EC}$ は，BC を底辺として高さが BF の平行四辺形と見ることができるが， $\triangle\mathrm{B'BF}$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ と合同だから， $\mathrm{BC} = \mathrm{BF}$ である．したがって $\square\mathrm{BB'EC}$ の面積は BC^2 である．

以上をまとめると，

$$\square\mathrm{BB'D'D}\ \text{の面積} = \mathrm{BC}^2 \tag{1.3}$$
trig-0

となることがわかったが，同様に議論すると，

$$\square\mathrm{AA'D'D}\ \text{の面積} = \mathrm{CA}^2 \tag{1.4}$$
trig-1

もいえる．ところが

$$\mathrm{AB}^2 = \square\mathrm{ABB'A'}\ \text{の面積} = \square\mathrm{BB'D'D}\ \text{の面積} + \square\mathrm{AA'D'D}\ \text{の面積} \tag{1.5}$$
trig-2

だから，(1.3), (1.4), (1.5) から，$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$ が示せた． ❏ (定理 1.1)

次のようなピタゴラスの定理の「逆」も成立します．普通，単に「ピタゴラスの定理」と言う場合にも，この逆の命題も含めて言っているいることが多いようです．

pythagoras-0

定理 1.2 a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正の実数とするとき，$\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$ となるような三角形は，$\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{1}{2}\pi$ となる直角三角形である．

証明． a, b, c を $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす正の実数として，$\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$ となるような三角形について $\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{1}{2}\pi$ が成り立たなかったとして矛盾を示す．

例えば $\angle\mathrm{BCA} < \dfrac{1}{2}\pi$ としてみる．$\angle\mathrm{BCA} > \dfrac{1}{2}\pi$ の場合の証明も同様である．このときには，三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ の 頂点 A から BC に下した垂線の足を D とすると，D は B と C の間の点となる（図 4)．

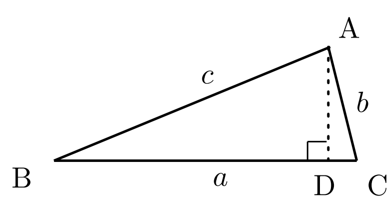


図 4

定理 1.1 を $\triangle\mathrm{ACD}$ に適用すると，$\mathrm{DA} = \sqrt{b^2 - \mathrm{CD}^2}$ だから，定理 1.1 を $\triangle\mathrm{ABD}$ に適用して，$(a - \mathrm{CD})^2 + (\sqrt{b^2 - \mathrm{CD}^2})^2 = c^2$ となるが，これに $c^2 = a^2 + b^2$ を代入すると，$-2a\mathrm{CD} = 0$ となるから $\mathrm{CD} = 0$ となってしまい．仮定に矛盾する． ❏ (定理 1.2)

ピタゴラスの定理から，すぐわかることの一つに，次があります．

pythagoras-1

補題 1.3 任意の x に対し，$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ が成り立つ[7)]．

証明． 5 ページの 図 2 での記号を使うと，

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}{\mathrm{AB}^2}$$

だが，ピタゴラスの定理から $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$ なので，上の式の右辺は $= \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AB}^2} = 1$ である．

❏ (補題 1.3)

[この節はまだ書きかけです]

References

[1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，ちくま学芸文庫 (2006).

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

1.2 三角関数の加法定理の導出

additiveth

$R_\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を原点を中心に左回りに角度 τ だけ回転させて得られるベクトル $R_\tau(\mathbf{x})$ に対応させる写像とする．このとき明らかに，R_τ は線型写像となる．

$R_\tau(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}$, $R_\tau(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{bmatrix}$ だから，$\begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}$ が R_τ の表現行列になる．

今，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ を考えると，R_τ の定義から，

$$R_\tau(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\tau) \\ \sin(\theta+\tau) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

additivth-1

となる．一方，上 R_τ の表現行列を用いると，

$$R_\tau(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau \\ \sin\theta\cos\tau + \cos\theta\sin\tau \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

additivth-2

となるから

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\tau) \\ \sin(\theta+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau \\ \sin\theta\cos\tau + \cos\theta\sin\tau \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

additivth-3

である．したがって，(1.8) の成分の比較から，

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\tau) &= \cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau; \\ \sin(\theta+\tau) &= \sin\theta\cos\tau + \cos\theta\sin\tau \end{aligned} \tag{1.9}$$

7) $\sin^2 x$ で $(\sin x)^2$, つまり $(\sin x)\cdot(\sin x)$ を表わします．$\cos^2 x$ についても同様です．

がわかる．

この導入法は，学部の微積の講義での三角関数の再導入の教材としては (線型代数と微積の相互関連の一例を見せるという意味でも) 好ましいものと言えるが，数学の基礎の厳密な導入としては適切ではない．解析的な命題の証明を幾何の直観に頼っているからである．幾何の直観を排除した導入としては，三角関数を微分方程式の解として導入する方法 (この場合微分方程式の解の一意性の議論をまずやらなくてはならないという欠点あり)，三角関数をマクロラン展開により導入する (関数列の収束についての議論をまずしておく必要あり) などが考えられる．

このような導入をして，幾何学的解釈を排除して三角関数の加法定理の証明を行った場合には，上の幾何学的議論は，三角関数の加法定理の幾何学的解釈での追証として捉えられることになる．

上のような思考は大半の日本人が無駄なことと捉えるかもしれない．しかし，私自身は高校生のときに，ここで述べたようなことが解答となっているような疑問のために数学の学習がブロックされて先に進めなくなってしまった苦い思い出がある．

1.3 合成関数の微分法 etc.

chain-rule

2015 年前期の微分積分学 I で使っている教科書 (吹田信之，新保経彦 著，理工系の微分積分学，以下 [吹田，新保] として引用する) では，第 1 章で ε-δ 論法による現代的な極限計算を導入しているのに，第 2 章以降では，コーシーの教科書にでも出ているような古色蒼然とした議論を (直観的な説明としてではなく)“(証)” と称して載せている，という大変気分の悪い書き方になっています．例えば以下の定理 1.5 や補題 1.6 は，この教科書の定理 1 やその系として与えられているものですが，この証明も [吹田，新保] では，“$\Delta x \to 0$ のとき …” という感じのものになっています．講義では，これを ε-δ 論法での厳密な証明に翻訳して示しました．

厳密な証明の欠点として，証明の背後にあるアイデアが見えにくい，ということがあると思いますが，逆に，きっちりと証明を追えば，必ず理解できる，ことが長所もになります．前近代的な証明 (もどき) では，理解に必要となる直観が会得できれば，アイデアが鮮明に見えてくるということは言えるかもしれませんが，この「直観の会得」は誰でもできることではなくなってしまうように思えます．

この厳密性と直観的な理解の折衷案としては，全く初心者向きではないものではあるのですが，超準解析を用いる，というやり方があります．超準解析を用いる初等的な解析学の定理の証明については，最近，数学セミナーに書いた記事を拡張した [1] に解説してあります．

analysis-a-0

補題 1.4 (1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ で，$\lim_{x\to b} g(x) = c$ なら，$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$ である．

(2) $f(x)$ が a で連続で，$g(x)$ が $f(a)$ で連続なら，$g(f(x))$ は a で連続である．

(3) I, $J \subseteq \mathbb{R}$ を区間 として，$f : I \to J$ を連続で 1-1 onto であるとする．このとき，f^{-1} も連続である．

証明. (1): $\lim_{x\to b} g(x) = c$ により，$\varepsilon > 0$ を任意にとるとき，$\delta_1 > 0$ で，すべての $x \in \mathrm{dom}(g)$ で[8]，$|x-b| < \delta_1$ となるものに対し $|g(x)-c| < \epsilon$ となるようなものがとれる．$\lim_{x\to a} f(x) = b$ により，この δ_1 に対し，$\delta > 0$ で，すべての $x \in \mathrm{dom}(f)$ で $|x-a| < \delta$ となるものに対し，$|f(x)-b| < \delta_1$ となるものがとれる．このとき，すべての $x \in \mathrm{dom}(f)$ で $|x-a| < \delta$ となるものに対し，$|g(f(x)) - c| < \varepsilon$ である．

(2): 仮定から，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ で，$\lim_{x\to f(a)} g(f(a))$ だから，(1) により，$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a))$ である．したがって，$g(f(x))$ は a で連続である．

(3): この主張は，局所コンパクトな距離空間上の関数に関する同様の命題の命題の特殊な場合になっており，証明も，$\mathbb{R}$ での閉区間のコンパクト性を用いるものになっている．

証明は，I が閉区間の場合について考えれば十分である[9]．$b \in J$ として，J の数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$ となるものとする．定理 1.39 により，$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b)$ となることが示せればよい．

そうでなければ，$a = f^{-1}(b)$ として，ある $\varepsilon > 0$ と数列 $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ で，

(1.10) $|f^{-1}(y_{i_n}) - a| > \varepsilon$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ analysis-a-1

ようなものがとれる．y_{i_n} を y_n と置き直すことで，

(1.11) $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ かつ， analysis-a-2

(1.12) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $|f^{-1}(y_n) - a| > \varepsilon$ analysis-a-3

が成り立っているとしてよい．ここで補題 1.19 (または，定理 1.47) により，数列 $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ と $a' \in I$ で，$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_{j_n}) = a'$ となるものがとれる．(1.12) により $a' \neq a$ だから，f が 1-1 であることから $b = f(a) \neq f(a')$ である．ところが，f は連続だから，補題 1.39 により，$b = \lim_{n\to\infty} y_{j_n} = \lim_{n\to\infty} f(f^{-1}(y_{j_n})) = f(a')$ となってしまい，矛盾である．

□ (補題 1.4)

次の定理は [吹田，新保] の定理 1 の系として与えられている．

analysis-a

定理 1.5 $f(x)$ が $f(x)$ の定義域に含まれる x_0 で微分可能なら，$f(x)$ は x_0 で連続である．

証明. $f(x)$ が x_0 で微分可能なら，$A = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ が存在する[10]．

したがって，ある $\delta_0 > 0$ で，すべての $|h| < \delta_0$ となる $h \in \mathbb{R}$ に対し，

(1.13) $$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - A \right| \leq 1$$ difconti-0

[8] $\mathrm{dom}(f)$ で f の定義域を表す．

[9] 任意の $b \in J$ に対し，閉区間 $I' \subseteq I$ で b が I で I' の内点になっているようなものをとり，f を I' に制限して考えたときの，b での連続性を示せば十分である．

[10] “A” という記号は，[吹田，新保] からの流用だが，これは，ドイツ語の,,Ableitung“ (微分係数) から来た記号のように思える．他の記号でも，f の定義域を $D(f)$ (‘D’ für Definitionsbereich — このノートでは f の定義域は $\mathrm{dom}(f)$ と表している) とするなど，ドイツ語由来と思える記号の使い方が多いことから，[吹田，新保] は，ドイツ語で書かれた古い教科書が種本になっているのではないか，と推測される．

となるようなものが存在する．

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{1+|A|}\} \tag{1.14}$$ difconti-1

とすると，

(1.15) すべての $x \in D(f)$ に対し，$|x - x_0| < \delta$ なら，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる． difconti-2

ε は任意だったので，このことから，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ が導かれる．つまり $f(x)$ は x_0 で連続である．

上の (1.14) は，次のようにして確かめられる: $h = x - x_0$ とおく．$x = x_0 + h$ である．

(1.16) $|x - x_0| < \delta$ つまり $|h| < \delta$ とすると， difconti-2-0

δ の定義 (1.14) から， $|h| < \delta_0$ だから，(1.13) が成り立つ．したがって，

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \le 1 + |A| \tag{1.17}$$ difconti-3

となる[11]．この両辺に $|h|$ をかけて

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+h) - f(x_0)| \\
&= |h| \cdot \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \\
&= |h| \cdot \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| \le |h| + |h| \cdot |A| \\
&\qquad = |h|(1 + |A|) \\
&\qquad \le \frac{\varepsilon}{1+|A|} \cdot (1 + |A|) \qquad ; \text{(1.16) と (1.14) により } |h| < \delta \le \frac{\varepsilon}{1+|A|} \\
&\qquad \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.18}$$ difconti-4

別証: $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$ を言えばよい．ここで $\lim_{x \to a} f(x) - f(a)$ が存在すると仮定して計算すると，

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) - f(a) &= \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) \\
&= \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)}_{\text{この極限は仮定により存在する}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a}(x - a)}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

---

[11] ここでは，$|a-b| \le c$ なら $|a| \le c + |b|$ となることを使っている．[$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b| \le c + |b|$.]

となる．

証明の発見的生成としてはこれでよいが，出来上った証明の記述としては，上の等式の列を最後から逆に読んでゆくことで，それぞれ存在することの保証された極限の計算に関する等式としての解釈ができることになる． □ (定理 1.5)

次の補題は，[吹田，新保] の p.36 での定理 1 に対応するものである．

varepsilon

補題 1.6 $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ を区間として，$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数とする．
$x \in \mathbb{I}$ と $d \in \mathbb{I} - x = \{a - x : a \in \mathbb{I}\}$ に対し，$\varepsilon_f(x, d)$ を

$$\varepsilon_f(x, d) = f(x + d) - f(x) - f'(x)d \tag{1.19}$$ a-0

で定義する．つまり，

$$f(x + d) = f(x) + f'(x)d + \varepsilon_f(x, d) \tag{1.20}$$ a-0-a

である．このとき，$\varepsilon_f(x, d)$ は (x を固定したとき d の関数として) 連続で，すべての $x \in \mathbb{I}$ に対し，$\displaystyle\lim_{d\to 0} \frac{\varepsilon_f(x, d)}{d} = 0$ が成り立つ．特に，$\displaystyle\lim_{d\to 0} \varepsilon_f(x, d) = 0$ である．

証明． $\varepsilon_f(x, d)$ の連続性は，(1.19) から明らかである．$x \in \mathbb{I}$ を固定する．$d \neq 0$ として (1.19) の両辺を d で割ると，

$$\frac{\varepsilon_f(x, d)}{d} = \frac{f(x + d) - f(x)}{d} \ - \ f'(x)$$

となる，したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{d\to 0} \frac{\varepsilon_f(x, d)}{d} &= \lim_{d\to 0} \left(\frac{f(x + d) - f(x)}{d} \ - \ f'(x)\right) = \lim_{d\to 0} \left(\frac{f(x + d) - f(x)}{d}\right) \ - \ f'(x) \\ &= f'(x) - f'(x) = 0\end{aligned}$$

となる． □ (補題 1.6)

analysis-0

定理 1.7 （合成関数の微分法） ある区間 $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数 $h : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ が，微分可能な関数 f と g の合成 $h(x) = g(f(x))$ $(x \in \mathbb{I})$ として与えられているとする．このとき h も微分可能で，すべての $x \in \mathbb{I}$ に対し，

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

が成り立つ．

証明． 各 $x \in \mathbb{I}$ に対し，$\displaystyle\lim_{d\to 0} \frac{h(x + d) - h(x)}{d}$ が存在して，これが $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ と等しくなることを示せばよい．$x \in \mathbb{I}$ を固定する．このとき，(1.20) により，

$$(1.21)\quad \begin{aligned}
&\lim_{d\to 0}\frac{h(x+d)-h(x)}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{g(f(x+d))\ -\ g(f(x)))}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{g(f(x)+f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))\ -\ g(f(x)))}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{g(f(x))\ +\ g'(f(x))(f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))\ +\ \varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))\ -\ g(f(x)))}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{g'(f(x))(f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))+\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{d}\\
&=g'(f(x))f'(x)\ +\ g'(f(x))\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_f(x,d)}{d}\ +\ \lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{d}
\end{aligned}$$

a-0-a-0

補題 1.6 により，$\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_f(x,d)}{d}=0$ かつ

$$(1.22)\quad \begin{aligned}
&\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{f'(x)d+\varepsilon_f(x,d)}\cdot\frac{f'(x)d+\varepsilon_f(x,d)}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{f'(x)d+\varepsilon_f(x,d)}\cdot\lim_{d\to 0}\frac{f'(x)d+\varepsilon_f(x,d)}{d}\\
&=\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_g(f(x),f'(x)d+\varepsilon_f(x,d))}{f'(x)d+\varepsilon_f(x,d)}\cdot\left(f'(x)+\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_f(x,d)}{d}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

となるから，(1.21) は $g'(f(x))f'(x)$ と等しくなることがわかる． ❏ (定理 1.7)

上の定理の証明をよく見てみると，定理 1.7 は，実は，同じ証明により，各点ごとの微分可能性に関する次のような主張[12] に改良できることが分る:

analysis-0-0

定理 1.8 （合成関数の微分法 — local version） ある区間 $\mathbb{I}\subseteq\mathbb{R}$ 上の関数 $h:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ が関数 f と g の合成 $h(x)=g(f(x))$ $(x\in\mathbb{I})$ として与えられているとする．ある $x_0\in\mathbb{I}$ に対し，$f(x)$ が x_0 で微分可能で，$g(x)$ が $f(x_0)$ で微分可能なら，h は x_0 で微分可能で，

$$(1.23)\quad h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

が成り立つ． ❏

逆関数の微分法は，一見したところでは，合成関数の微分法の系として，次のようにして得られるように思える:

analysis-0-1

系 1.9 区間 $\mathbb{I}$ 上の微分可能な関数 f について，$f'(x)$ が $\mathbb{I}$ で常に 0 と異る値をとるものとする．f の逆関数 f^{-1} が存在するときには，f^{-1} も微分可能で，

$$(1.24)\quad (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

a-0-a-1

[12] [吹田，新保] では対応する定理は p.38 にこの形で与えられている．

が成り立つ．

証明． x を f^{-1} の定義域の要素とするとき，合成関数の微分法から，

$$1 = (x)' = (f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) \tag{1.25}$$ i-a

だから，両辺を $f'(f^{-1}(x))$ で割れば求める式が得られる． ❏ (系 1.9)

しかし，この証明では $f^{-1}(x)$ が微分可能であることを前提として議論しているので，この「証明」で言えているのは，もし逆関数が微分可能なら，微分係数は，(1.24) のようなものにならなくてはならない，ということのみであり，その意味で完全な証明とは言えない．

以下で，系 1.9 の主張を更に一般化したものに，厳密な証明を与える．このために，まず，次の準備をする:

inverse-0

補題 1.10 $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ を単調関するとする．このとき，すべての $\mathbb{I}$ の内点 x_0 に対し，左極限 $y^+ = \lim_{x \to x_0+0} f(x)$ と右極限 $y^- = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ が存在して，

$$\min\{y^+, y^-\} \le f(x_0) \le \max\{y^+, y^-\} \tag{1.26}$$ i-0

が成り立つ．したがって，f が x_0 で連続となるのは，$y^+ = y^-$ となる丁度そのときである．

証明． 簡単のために f が単調増加の場合を考える．f が単調現象の場合にも同様に示せる．このときには $f(x_0)$ は $\{f(x) : x < x_0\}$ の上界で，$\{f(x) : x_0 < x\}$ の下界だから，$y^+ = \inf\{f(x) : x_0 < x\}$ と $y^- = \sup\{f(x) : x < x_0\}$ が存在して，$y^- \le f(x_0) \le y^+$ となる．このとき，$y^+ = \lim_{x \to x_0+0} f(x)$, $y^- = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ となることが示せる (演習)．

❏ (補題 1.10)

inverse-1

補題 1.11 $\mathbb{I}$ を区間とする．

(1)： $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ を 1 対 1 で連続な関数とするとき，f は真に単調[13)]で，f の像[14)] $f(\mathbb{I})$ は区間になる．

(2)： $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ を 1 対 1 で連続な関数とするとき，区間 $\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$ 上の f の逆関数 f^{-1} も連続になる．

証明． (1)：：$\mathbb{I} = [a, a] = \{a\}$ のときには主張は自明である．そうでなければ，x_0, $x_1 \in \mathbb{I}$ を $x_0 < x_1$ となるようにとる．このとき，f は 1 対 1 だから，

$$f(x_0) < f(x_1) \tag{1.27}$$ i-1

または，

$$f(x_1) < f(x_0) \tag{1.28}$$ i-2

---

13) [吹田，新保] の用語では狭義に単調．

14) [吹田，新保] の用語では f の値域

のどちらかが成り立つ．ここでは (1.27) が成り立つと仮定して議論を進める．(1.28) が成り立つ場合も同様にして示せる．

$x'_0, x'_1 \in \mathbb{I}$ で $x'_0 < x'_1$ となるものを任意にとる．このとき，$f(x'_0) < f(x'_1)$ となることが示せればよい．

関数 $u : [0,1] \to [\min\{x_0, x'_0\}, \max\{x_0, x'_0\}]$, $v : [0,1] \to [\min\{x_1, x'_1\}, \max\{x_1, x'_1\}]$ を，

$$u(t) = tx'_0 + (1-t)x_0, \tag{1.29}$$
i-3

$$v(t) = tx'_1 + (1-t)x_1 \tag{1.30}$$
i-4

で定義する．このとき，すべての $t \in [0,1]$ に対して，

$$v(t) - u(t) = t(x'_1 - x'_0) + (1-t)(x_1 - x_0) > 0 \tag{1.31}$$
i-5

だから，$u(t) \neq v(t)$ である．したがって，f が 1 対 1 であることから，すべての $t \in [0,1]$ に対し，

$$f(u(t)) \neq f(v(t)) \tag{1.32}$$
i-6

である．ここで，$t \in [0,1]$ に対し，

$$g(t) = f(v(t)) - f(u(t)) \tag{1.33}$$
i-7

とすると，すべての $t \in [0,1]$ に対し，$g(t) \neq 0$ となるが，g は定義から連続で，$g(0) = f(x_1) - f(x_0) > 0$ だから，中間値の定理により，すべての $t \in [0,1]$ に対し，$g(t) > 0$ となることがわかる．特に，$g(1) = f(x'_1) - f(x'_0) > 0$ つまり，$f(x'_0) < f(x'_1)$ である．

f は単調で連続だから，補題 1.10 により，$f(\mathbb{I})$ はある区間の稠密な部分集合になる[15] したがって，再び中間値定理により，$f(\mathbb{I})$ は区間となることがわかる．

(2)：：$\mathbb{J} = f(\mathbb{I})$ とすると，(1)：から $\mathbb{J}$ は区間となる．区間 $\mathbb{J}$ 上の関数 f^{-1} も単調で 1 対 1 となり，補題 1.10 により，f^{-1} は連続である． ❑ (補題 1.11)

analysis-0-2

定理 1.12 f をある区間 $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ 上で連続関数な 1 対 1 関数とする．f が $x_0 \in \mathbb{I}$ で微分可能で $f'(x_0) \neq 0$ なら，f^{-1} は $y_0 = f(x_0)$ で微分可能で，

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \right) \tag{1.34}$$

である．

証明． 補題 1.11 により，f は真に単調で，f^{-1} も真に単調で連続である．

$$(1.35)\qquad \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}$$
$$= \lim_{y\to y_0}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}}$$
$$= \frac{1}{\lim_{y\to y_0}\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}}$$

となる．f の x_0 での連続性から $y_0 = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ だから，補題 1.4 により，最後の式の分母は，

$$(1.36)\qquad \lim_{y\to y_0}\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(f^{-1}(f(x)))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0))}{x-x_0}$$
$$= f'(x_0)$$

である．したがって，$(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ は存在して，その値は $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ である．

❏ (定理 1.12)

analysis-1

定理 1.13 (合成関数の微分法 その 2) $\mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ を区間として， $f : \mathbb{J}\times\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ を C_1-級とする． $\varphi : \mathbb{I}\to\mathbb{J}$ と $\psi : \mathbb{I}\to\mathbb{K}$ を微分可能とするとき，合成関数 $f(\varphi(t),\psi(t)) : \mathbb{I}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto f(\varphi(t),\psi(t))$ も微分可能で，$t\in\mathbb{I}$ に対し，

$$(1.37)\qquad \frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$ a-1

となる[16]．

証明． $t\in\mathbb{I}$ に対し，

$$(1.38)\qquad \frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t+h))-f(\varphi(t),\psi(t))}{h}$$ a-2

だから，この極限が存在して (1.37) の右辺と等しいことが示せればよい．(1.38) は，

$$(1.39)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t+h))-f(\varphi(t),\psi(t+h))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t+h))-f(\varphi(t),\psi(t))}{h}$$ a-3

と等しいから，

$$(1.40)\qquad \Psi(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t+h))-f(\varphi(t),\psi(t))}{h},$$ a-4

[15] つまり，ある $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, $a<b$ で，$f(\mathbb{I})\subseteq[a,b]$ となり，任意の $a<a'<b'<b$ に対し $f(\mathbb{I})\cap(a',b')\neq\emptyset$ となるようなものが存在する．

[16] ここでの "$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t))$" は微分演算子 $\frac{d}{dt}$ の "t" と変数に代入された値 t が混在した書き方になっている．そういう点についてもっと神経質に書くとすると，以下の定理 1.14 での記法を用いて，$\left.\frac{d}{du}f(\varphi(u),\psi(u))\right|_{u=t}$ とでもするべきであろう．

$$\Phi(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t+h)) - f(\varphi(t),\psi(t+h))}{h} \tag{1.41}$$ a-5

として，次の Claim 1.13.1, 1.13.2 が示せれば十分である．

anal-0

Claim 1.13.1 $\Psi(t)$ はすべての $t\in\mathbb{I}$ に対しうまく定義できて，$\Psi(t) = f_y(\varphi(t),\psi(t)))\psi'(t)$ となる．

$\vdash$ 各 $t\in\mathbb{I}$ に対し，$\varphi(t)$ を定数と見ると，定理 1.7 から，

$$\Psi(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t+h)) - f(\varphi(t),\psi(t))}{h} = f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$

となることがわかる． $\dashv$ (Claim 1.13.1)

anal-1

Claim 1.13.2 $\Phi(t)$ はすべての $t\in\mathbb{I}$ に対しうまく定義できて，$\Phi(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t)))\varphi'(t)$ となる．

$\vdash$ 補題 1.6 と同様に，$a\in\mathbb{J}$, $y\in\mathbb{K}$ と $d\in\mathbb{K}-y$ に対し，

$$\varepsilon_{f(a,\cdot)}(y,d) = f(a,y+d) - f(a,y) - f_y(a,y)d \tag{1.42}$$ a-6

とすれば，定理の仮定から，$\varepsilon_{f(a,\cdot)}(y,d)$ は変数 a, y, d に関し連続な関数で，すべての $a\in\mathbb{J}$, $y\in\mathbb{K}$ に対し，

$$\lim_{d\to 0}\frac{\varepsilon_{f(a,\cdot)}(y,d)}{d} = 0 \tag{1.43}$$ a-7

となる．同様に，

$$\varepsilon_{\psi}(t,h) = \psi(t+h) - \psi(t) - \psi'(t)h \tag{1.44}$$ a-8

とすれば，各 $t\in\mathbb{I}$ に対し，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{\psi}(t,h)}{h} = 0 \tag{1.45}$$ a-9

である．

(1.44) により，

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t+h)) - f(\varphi(t),\psi(t+h))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t)+\psi'(t)h+\varepsilon_{\psi}(t,h)) - f(\varphi(t),\psi(t)+\psi'(t)h+\varepsilon_{\psi}(t,h))}{h}\end{aligned} \tag{1.46}$$

ここで $\Delta(t,h) = \psi'(t)h + \varepsilon_{\psi}(t,h)$ と置くと，(1.42) により，

$$\begin{aligned}&= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t)) + f_y(\varphi(t+h),\psi(t))\Delta(t,h) + \varepsilon_{f(\varphi(t+h),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{h}\\ &\quad - \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t)) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\Delta(t,h) + \varepsilon_{f(\varphi(t),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\varphi(t+h),\psi(t)) - f(\varphi(t),\psi(t))}{h}\\ &\quad + \lim_{h\to 0}\frac{(f_y(\varphi(t+h),\psi(t)) - f_y(\varphi(t),\psi(t)))\cdot\Delta(t,h)}{h}\\ &\quad + \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{f(\varphi(t+h),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h)) - \varepsilon_{f(\varphi(t),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{h}\end{aligned}$$

最後の式に表われる 3 つの項のうち，最初の項については，Claim 1.13.1 と同様の議論により，$f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ となることがわかる．したがって，2 番目の項と 3 番目の項が 0 になることが示せれば証明が完了する．

2 番目の項については，

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{(f_y(\varphi(t+h),\psi(t))-f_y(\varphi(t),\psi(t)))\cdot\Delta(t,h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\Big(f_y(\varphi(t+h),\psi(t))-f_y(\varphi(t),\psi(t))\Big)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\psi'(t)h+\varepsilon_\psi(t,h)}{h}\end{aligned}$$

したがって，(1.45) により

$$=\Big(\big(\lim_{h\to 0}f_y(\varphi(t+h),\psi(t))\big)-f_y(\varphi(t),\psi(t))\Big)\cdot\psi'(t)$$

ここで仮定により f_y は連続だから，

$$=0$$

である．3 番目の項は，

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{f(\varphi(t+h),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))-\varepsilon_{f(\varphi(t),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{f(\varphi(t+h),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))-\varepsilon_{f(\varphi(t),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{\Delta(t,h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(t,h)}{h}\\&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{f(\varphi(t+h),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{\Delta(t,h)}-\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon_{f(\varphi(t),\cdot)}(\psi(t),\Delta(t,h))}{\Delta(t,h)}\right)\\&\quad\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\psi'(t)h+\varepsilon_\psi(t,h)}{h}\end{aligned}$$

ここで，(1.45) により，$h\to 0$ なら $\Delta(t,h)\to 0$ となることと，(1.43), また (1.45) により，

$$=(0-0)\cdot\psi'(t)=0$$

である． ⊣ (Claim 1.13.2)

□ (定理 1.13)

substitution

定理 1.14 (置換積分の定理) g を連続関数として，f を微分可能な関数とする．このとき[17]，

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx=\int g(u)\,du\Big|_{u=f(x)}$$

が成り立つ．

証明. $G(x)$ を $g(x)$ の原始関数とする[18]．このとき，$G'(x)=g(x)$ だから，合成関数の微分法により，

$$g(f(x))f'(x)=G'(f(x))f'(x)=(G(f(x)))'$$

17) $\int g(u)\,du\Big|_{u=f(x)}$ は，u をパラメタとして持つ $\int g(u)\,du$ の u を $f(x)$ で置き換えて得られる表現である．

18) 微分積分学の基本定理により，連続関数に対しては，常にその原始関数が存在する．

である．特に，$G(f(x))$ は g(f(x))f'(x) の原始関数になっている．したがって，

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = G(f(x)) + C = \int g(u)\,du\Big|_{u=f(x)}$$

である． ❑ (定理 1.14)

References

[1] 渕野 昌，間違いと真理: 解析学と集合論の場合，数学セミナー， Vol.57, No.9, 36–42, (2018).

この記事を大幅に拡張したもの: http://fuchino.ddo.jp/articles/susemi2018-x.pdf

1.4 合成関数の微分法の意味

kettenregel

合成関数の微分法は，「関数の合成の線型近似は線型近似の合成である」ということを意味している．しかし，不思議なことに，このことは私の見たかぎり日本語で書かれたどの教科書にも明示的に注意されていない．

簡単のために 1 変数関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の合成を考えてみよう．$h(x) = g(f(x))$ とする．$f(x)$ は点 $a \in \mathbb{R}$ で微分可能で，$g(x)$ は点 $f(a)$ で微分可能とする．このとき合成関数の微分法から，$h(x)$ は a で微分可能となるが，点 $a \in \mathbb{R}$ での $h(x)$ の線型近似（つまり接線をグラフとして持つ一次関数）を h_0 とよぶことにすると，

$$h_0(x) = h'(a)x + (h(a) - a \cdot h'(a))$$

である．一方 $f(x)$ の a での線型近似と $g(x)$ の $f(a)$ での線型近似は，それぞれ，

$$f_0(x) = f'(a)x + (f(a) - a \cdot f'(a)), \tag{1.47}$$ a-10

$$g_0(x) = g'(f(a))x + (g(f(a)) - f(a) \cdot g'(f(a))) \tag{1.48}$$ a-11

となる．したがって，(1.47) と (1.48) から，

$$\begin{aligned} g_0(f_0(x)) &= g'(f(a))(f'(a)x + (f(a) - a \cdot f'(a))) + (g(f(a)) - f(a) \cdot g'(f(a))) \\ &= g'(f(a))f'(a)x + (g(f(a)) - a \cdot g'(f(a))f'(a)) \\ &= g'(f(a))f'(a)x + (h(a) - a \cdot g'(f(a))f'(a)) \end{aligned} \tag{1.49}$$

となる．ところが合成関数の微分法から，$g'(f(a))f'(a) = h'(a)$ だから，これを上に代入すると，

$$g_0(f_0(x)) = h'(a)x + (h(a) - a \cdot h'(a)) = h_0(x)$$

となって，最初に述べた「関数の合成の線型近似は線型近似の合成である」が確かに成り立っていることがわかる．

1.5 三角関数の微分法を最小の三角関数の基礎知識から導出する

trigono-x

$(\sin x)'$ を

(1.50) 三角関数の基本性質: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigo-0

(1.51) 加法定理: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ trigo-1

(1.52) $\cos\ x$ の連続性 trigo-2

(1.53) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ trigo-3

のみから導出する．三角関数の積の公式から導くよりも力ずくだが，アイデアの飛躍は少ない．

微分の定義から，

$$(\sin\ x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin\ x}{h} \tag{1.54}$$

である．これの右辺は，

trigo-4

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin\ x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\ x \cdot (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\sin h}{h}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

となる．(1.55) の最右辺の第 1 項は，(1.50) により，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\sin\ x \cdot (\cos h - 1)}{h} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{\cos h + 1} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} -\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{\cos h + 1} = \sin x \cdot (-1) \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{1.56}$$

となる．最後の行で，二乗をとる関数の連続性，(1.53) と $\cos x$ の連続性が用いられている．一方 (1.55) の最右辺の第 2 項は，やはり (1.53) から $\cos x$ となることがわかるから，全体として，

$$(\sin x)' = \cos x \tag{1.57}$$

が示せた．

1.6 対数関数の計算

log

定理 1.15 $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ で $0 < a, b,\ a, b \neq 1$ とするとき，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \tag{1.58}$$

log-0

が成り立つ．

証明． (1.58) を示すには，

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \tag{1.59}$$

log-1

が示せれば十分である．(1.59) を示すには，(1.59) の両辺をそれぞれ c の肩に載せたものが等しいこと:

$$c^{\log_a b \cdot \log_c a} = c^{\log_c b} \tag{1.60}$$

log-2

を示せば十分である．ところがこれは，

$$c^{\log_a b \cdot \log_c a} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b$$

また，$c^{\log_c b} = b$ により成り立つ．したがって (1.58) が示せた． ❏

1.7 Anwendungen des Mittelwertsatzes

mittelwertsatz

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend* auf dem Intervall $I \subseteq D$, falls gilt: $f(x_0) \leq f(x_1)$ für alle $x_0,\ x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$. f heißt *streng monoton steigend* anf I, falls $f(x_0) < f(x_1)$ für alle $x_0,\ x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$.

Analog heißt $f : D \to \mathbb{R}$ *monoton fallend* auf dem Intervall $I \subseteq D$, falls gilt: $f(x_0) \geq f(x_1)$ für alle $x_0,\ x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$. f heißt *streng monoton fallend* anf I, falls $f(x_0) > f(x_1)$ für alle $x_0,\ x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$.

mwz-0

Lemma 1.16 Sei f differenzierbar auf $[a, b]$.

(a) Falls es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f monoton steigend auf $[a, b]$.

(b) Falls es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f monoton fallend auf $[a, b]$.

Beweis. (a): Sonst gibt es $x_0,\ x_1 \in [a, b]$ mit $x_0 < x_1$ d.d. $f(x_0) > f(x_1)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein $c\mathbb{R}$ mit $x_0 < c < x_1$ d.d.

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, da $c \in [a, b]$. (b): Analog. ❏

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt konkav (oder nach unten konvex) auf dem Intervall $I \subseteq D$, falls gilt: $f(x_1) \leq f(x_0) + \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_1 - s_0)$ für alle $x_0,\ x_1,\ x_2 \in I$ mit $x_0 < x_1 < x_2$.

Analog heißt $f : D \to \mathbb{R}$ (nach oben) konvex auf dem Intervall $I \subseteq D$, falls gilt: $f(x_1) \geq f(x_0) + \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_1 - s_0)$ für alle $x_0,\ x_1,\ x_2 \in I$ mit $x_0 < x_1 < x_2$.

hl-0

Lemma 1.17 (a) f ist konkav auf I gdw. gilt: $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ für alle $x_0, x_1, x_2 \in I$ mit $x_0 < x_1 < x_2$.

(b) f ist konvex auf I gdw. gilt: $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \ge \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ für alle $x_0, x_1, x_2 \in I$ mit $x_0 < x_1 < x_2$.

Lemma 1.18 Sei f zweimal diferenzierbar auf dem Intervall I.

(a) Falls $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$, so ist f konkav auf I.

(b) Falls $f''(x) \le 0$ für alle $x \in I$, so ist f konvex auf I.

Beweis. (a): Sonst gibt es nach Lemma 1.17, (a) $x_0, x_1, x_2 \in I$ mit $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es also $c_0, c_1 \in I$ mit $x_0 < c_0 < x_1 < c < x_2$ und

$$f'(c_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1).$$

Auf der anderen Seite, ist f' monoton steigend auf I nach der Annahme von $f''(x) = (f')'(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ und nach Lemma 1.16. Da $c_0 < c_1$, folgt also $f'(c_0) \le f'(c_1)$. Ein Widerspruch.

(b): Analog. ❑

1.8 コンパクト性の微積での扱い

compactness

ラグランジュの未定常数法（あるいは未定乗数法）は，「$\mathbb{R}^n$ 有界閉領域上の連続関数は最大値と最小値をとる」という有界閉集合のコンパクト性からの帰結と組にして応用されることが多い[19)]．以下に，微積の講義での予備知識のみから，この定理を証明してみる．

---

19) 解析学の用語には集合論が確立される以前に固定されているものが多いので，現代的な数学の用語の運用とは異る言い回しをすることが往々にしてある．「領域」((英) domain, (仏) domaine, (独) Bereich) という用語もそのようなものの一つである．「領域」という用語の意味にはゆれがあるが，その共通部分としては，何等かの (良い) 性質を持った $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合である，ということであろう．この「空でない」は，空集合の概念が確立される前の用語であることから，デフォルトで仮定されて強調されないことが多い．たとえば現代的な関数の定義では空集合は空集合から任意の集合への関数となるが，解析学で “f を $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上の関数とする” などと言ったときには，$f = \emptyset$ である場合 (つまり $D = \emptyset$ である場合) は通常は考えていない．

以下では単に D が $\mathbb{R}^n$ の**領域**である，と言ったときには，D は $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合のこととする．この意味での領域の閉包を (関数の定義域などとして) 考察する必要も出てくるが，そのような集合を，**閉領域**と呼ぶことにする．

集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ が**有界**とは，ある区間 $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し，$D \subseteq [a, b]^n$ となることである．

ちなみに，$O \subseteq \mathbb{R}^n$ が開集合であるとは，任意の $\mathbf{a} \in O$ に対し，十分に小さな $\varepsilon > 0$ をとると，点 $\mathbf{a}$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < \varepsilon\}$ が O の部分集合となるようにできることである．$A \subseteq \mathbb{R}^n$ が閉集合 とは，A の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合となることである．

A が閉集合であることは，A の要素からなる点列 a_n, $n \in \mathbb{N}$ が収束するとき，常に $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \in A$ となることと同値である．$\mathbb{R}^n$ での端点をすべて含む曲線（閉曲線もこのような曲線と考える）は閉集合の例の一つである．

実数の集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が **有界** であるとは，ある $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対し，$X \subseteq [a, b]$ となることとする．$\mathbb{R}$ の完備性 (完全性) から，このときには $\sup X$, $\inf X$ が存在する．実数列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が有界であるとは，集合 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ が有界であることとする．

compact-0

補題 1.19 すべての $\mathbb{R}$ での有界な実数列 $\langle a_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ は（有限の値に）収束する部分列を含む．

証明． 区間 $I_n = [c_n, d_n]$ と $k_n \in \mathbb{N}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ を帰納的に次を満たすようにとる:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots ; \tag{1.61}$$ comp-0

$$d_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(d_n - c_n); \tag{1.62}$$ comp-1

$$\{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell \in [c_n, d_n]\} \text{ は無限集合} ; \tag{1.63}$$ comp-2

$$a_{k_n} \in I_n. \tag{1.64}$$ comp-3

このような $I_n = [c_n, d_n]$ と $k_n \in \mathbb{N}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ がとれることは，次のようにしてわかる:

まず，$\langle a_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ は有界だから，(1.63) を満たすような，I_0 がとれる．k_0 を $a_{k_0} \in I_0$ となるようにとる．$I_n = [c_n, d_n]$ と $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ がとれたとき，$b_n = c_n + \dfrac{1}{2}(d_n - c_n)$ とする．このとき，(1.63) により，$\{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell \in [c_n, b_n]\}$ または，$\{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell \in [b_n, d_n]\}$ の少なくとも片方は無限集合になる．もし前者が無限集合となるときには，$c_{n+1} = c_n$, $d_{n+1} = b_n$ とし，そうでないときには，$c_{n+1} = b_n$, $d_{n+1} = d_n$ とする．このとき，$\{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell \in [c_{n+1}, d_{n+1}]\}$ は無限集合だから，この集合の要素 k で $k_n < k$ となるものがとれる．このような k を k_{n+1} としてとればよい．

(1.62) と (1.64) により，$\langle a_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列 $\langle a_{k_n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ は収束する[20)]．

□ (補題 1.19)

compact-1

補題 1.20 任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，すべての $\mathbb{R}^n$ での有界点列[21)] $\langle \bar{a}_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ は収束する部分点列を含む．

証明． $n = 1$ のときには, 補題の主張は, 補題 1.19 と一致するからよい．主張が $n = m \geq 1$ に対し成り立つとして，$n = m + 1$ のときにも成り立つことを示す．$\langle \bar{a}_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ の有界点列とする．$\ell \in \mathbb{N}$ に対し，$\bar{a}_\ell = (a_\ell^0, ..., a_\ell^m)$ として，

$$\bar{a}'_\ell = (a_\ell^0, ..., a_\ell^{m-1}), \quad \ell \in \mathbb{N}$$

A が $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の **閉包** であるとは，A は S を部分集合として含む $\mathbb{R}^n$ の部分集合のうち，$\subseteq$ に関して最小のもののことである．$S \subseteq \mathbb{R}^n$ の閉包は常に閉集合となる (このことは，閉集合の族の共通部分が閉集合となることから言える)．S の閉包は，S の要素からなる収束点列 (a_n がすべて等しいような数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ も a_0 に収束する収束点列と考えている) の収束点全体と一致する．

20) 厳密に言うと，ここでは，「すべてのコーシー列は収束する」という $\mathbb{R}$ の性質を仮定している．

21) $\mathbb{R}^n$ の点列 $\langle \bar{a}_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ が有界とは，ある区間 $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の積集合 $[a, b]^n = \{(x_0, ..., x_{n-1}) : x_0, ..., x_n \in [a, b]\}$ にすべての $\bar{a}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ が含まれることを言う．

とする．このとき，帰納法の仮定により $\langle \bar{a}'_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列，$\langle \bar{a}'_{k_\ell} : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ で収束するものがとれる．一方補題 1.19 により，$\mathbb{R}$ の有界点列 $\langle a^m_{k_\ell} : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列 $\langle a^m_{k'_\ell} : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ で収束するものが存在する．$\langle \bar{a}_\ell : \ell \in \mathbb{N} \rangle$ の部分列

$$\langle \bar{a}_{k'_\ell} : \ell \in \mathbb{N} \rangle$$

は収束する． ❏ (補題 1.20)

定理 1.21 任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，$\mathbb{R}^n$ の有界閉領域 D 上の連続関数は常に最大値と最小値をとる[22)]．

証明． 最大値の存在を示す．最小値の存在についても同様に示せる．まず，定理より弱い次の命題を示す:

Claim 1.21.1 有界閉領域 D 上の連続関数 $f(x)$ の値の全体 $f(D)$ は有界である．

$\vdash$ そうでなかったとして，たとえば D 上の連続関数 $f(x)$ の値が上に有界でないとする．このとき $a_0, a_1, a_2, \ldots \in D$ で，

$$f(a_n) \geq n \tag{1.65}$$ comp-4

がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つようなものがとれる．D が有界だから，点列 $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ も有界である．したがって，補題 1.20 により，$k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$, $(k_n \in \mathbb{N})$ を a_{k_n}, $n \in \mathbb{N}$ が収束するようなものとする． $a = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$ とすると，D は閉集合だから，$a \in D$ である．よって $f(x)$ の連続性から，$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n})$ だが，(1.65) から $\lim_{n\to\infty} f(a_{k_n}) = \infty$ となるので矛盾である． $\dashv$ (Claim 1.21.1)

Claim 1.21.1 により，$b^* = \sup\{f(a) : a \in D\}$ とすると，$b^* < \infty$ である．$a_0, a_1, a_2, \ldots \in D$ を，

$$f(a_n) \geq b^* - \frac{1}{n}, \ \ (n \in \mathbb{N}\ ) \tag{1.66}$$ comp-5

となるようにとる．Claim 1.21.1 の証明でと同じように，$k_0 < k_1 < k_1 < \cdots$, $(k_n \in \mathbb{N})$ を，a_{k_n}, $n \in \mathbb{N}$ が収束するようにとり，$a^* = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$ とする．D が閉集合であることから，$a^* \in D$ である．f の連続性から，$f(a^*) = \lim_{n\to\infty} f(a_{k_n})$ であるが，(1.66) から $f(a^*) = b^*$ となることがわかる．つまり $f(x)$ は $a^* \in D$ で最大値をとる． ❏ (定理 1.21)

1.9 微分演算子の特徴付け

diff-op

定理 1.22 $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が線型で，ある実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，

(1) すべての $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し，$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a)$;
(2) $D(x) = 1$

を満たすなら，すべての $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し，$D(f) = \dfrac{df}{dx}(a)$ となる．

---

22) この定理で D の有界性は必要である．たとえば，$f(x) = x^2$ を $\mathbb{R}$ 全体で考えると， $\mathbb{R}$ は閉領域だが，$f(x)$ は最大値をとらない．

証明． $a=0$ に対して主張が証明できれば十分である．そこで D は，線型で，$a=0$ に対する (1), と (2) を満たす，とする．

(1) から，

$$D(1)=D(1)\cdot 1+1\cdot D(1)$$

となる[23]．したがって，$D(1)=0$ である．よって，線型性から，すべての $b\in\mathbb{R}$ に対し

$$D(b)=D(b\cdot 1)=bD(1)=0$$

である．

$f\in C^\infty(\mathbb{R})$ とする．

$$\begin{aligned} f(x)-f(0) &= \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}dt \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=tx} dt \\ &= x\int_0^1 \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=tx} dt \end{aligned}$$

したがって，

$$f(x)=f(0)+x\int_0^1 \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=tx} dt$$

となる[24]．両辺に D を施すと，D の線型性と，(1) から，

$$D(f(x))=D(f(0))+D(x)\cdot\left[\int_0^1\left[\frac{f(x)}{dx}\right]_{x=tx}dt\right]_{x=0}+[x]_{x=0}\cdot D(\cdots)$$

となるが，上で見たように $D(f(0))=0$ だから，(2) により，

$$D(f)=1\cdot\left[\int_0^1\left[\frac{f(x)}{dx}\right]_{x=tx}dt\right]_{x=0}=\int_0^1\frac{df}{dx}(0)dt=\left[\left(\frac{df}{dx}(0)\right)t\right]_{t=0}^1=\frac{df}{dx}(0)$$

である． ❑

1.10 Riemann 積分

riem

学部の教養の数学では Riemann 積分はかなりいいかげんな扱いをされることが多いように思う．これは一つには，本格的な積分論を展開するときには，いずれにしても Lebesgue 積分でやることになるので，Riemann 積分の厳密な展開にこだわっていてもしょうがない，というような感覚から来ていることかもしれない．しかし，私には，微分積分学の基本定理に関連する部分などについては，厳密な言葉での展開の仕方をちゃんと見ておいた方がよいように思える．以下の記述は，そのような展開を (できるだけ不必要な深入りは避けて) 行なうにはどうしたらよいか，という観点からの試みである．

[23] ここで 1 は恒等的に 1 を返す関数のことである．

[24] ここでは，式 t に対し，その式にあらわれる x に式 u を代入して得られる式を $[t]_{x=u}$ であらわしている．

以下では閉区間 $[a,b]$ ($a,\, b\in\mathbb{R},\, a<b$) を固定する．実数の上昇列 $\mathcal{P}=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$ が $[a,b]$ の**分割** (*subdivision*) であるとは，$a=x_0<x_1<\cdots<x_\ell=b$ が成り立つこととする．$[a,b]$ の分割 $\mathcal{P}=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$ (長さ $\ell+1$ の列である) に対し，長さが ℓ の実数の上昇列 $\vec{\xi}=\langle\xi_0,...,\xi_{\ell-1}\rangle$ が $\mathcal{P}$ の**代表点** (‘点’ は複数である *representative points*) であるとは，$x_0\le\xi_0\le x_1\le\xi_1\le x_2\le\cdots x_{\ell-1}\le\xi_{\ell-1}\le x_\ell$ が成り立つこと，とする．関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，$[a,b]$ の分割 $\mathcal{P}=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$ と $\mathcal{P}$ の代表点 $\vec{\xi}=\langle\xi_0,...,\xi_{\ell-1}\rangle$ に対し，

$$S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}}=\sum_{i=0}^{\ell-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) \tag{1.67}$$ riem-0

とする．

$\mathcal{P}=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$ と $\mathcal{P}'=\langle x'_0,...,x'_{\ell'}\rangle$ が $[a,b]$ の分割のとき, $\mathcal{P}'$ が $\mathcal{P}$ の**細分** (*refinement*) であるとは，$\{x_0,...,x_\ell\}\subseteq\{x'_0,...,x'_{\ell'}\}$ となること，とする．

$$Sub([a,b])=\{\mathcal{P}:\mathcal{P}\text{ は }[a,b]\text{ の分割 }\} \tag{1.68}$$ riem-0-0

として，$Sub([a,b])$ 上の関係 $\sqsubset$ を，$\mathcal{P}_0,\,\mathcal{P}_1\in Sub([a,b])$ に対し，

$$\mathcal{P}_1\sqsubset\mathcal{P}_0\ \Leftrightarrow\ \mathcal{P}_1\neq\mathcal{P}_0\text{ で，}\mathcal{P}_1\text{ は }\mathcal{P}_0\text{ の細分である} \tag{1.69}$$ riem-0-1

により定める．$\sqsubset$ が $Sub([a,b])$ 上の半順序になることは容易に確かめられる．

$$\mathbb{P}=\{\langle\mathcal{P},\vec{\xi}\rangle:\mathcal{P}\in Sub([a,b]),\,\vec{\xi}\text{ は }\mathcal{P}\text{ の代表点 }\} \tag{1.70}$$ riem-1

とする．

$\langle\mathcal{P}_0,\vec{\xi_0}\rangle,\,\langle\mathcal{P}_1,\vec{\xi_1}\rangle\in\mathbb{P}$ に対し，$\vec{\xi_i}=\langle\xi_{i,0},\xi_{i,1},...,\xi_{i\ell_i-1}\rangle$ $(i<2)$ として，

$$\langle\mathcal{P}_1,\vec{\xi_1}\rangle<_{\mathbb{P}}\langle\mathcal{P}_0,\vec{\xi_0}\rangle\ \Leftrightarrow\ \mathcal{P}_1\sqsubset\mathcal{P}_0\text{ で，}\{\xi_{0,i}:i<\ell_0\}\subseteq\{\xi_{1,i}:i<\ell_1\}\text{ が成り立つ} \tag{1.71}$$ riem-2

とする．

半順序 $\langle P,<\rangle$ が**下に有向** (*downward directed*) であるとは，任意の $p,\,q\in P$ に対し，$r\in P$ で，$r<p$ かつ $r<q$ となるものが存在することである．

L-riem-0

補題 1.23 (1) $\langle Sub([a,b]),\sqsubset\rangle$ は下に有向な半順序である．

(2): $\langle\mathbb{P},<_{\mathbb{P}}\rangle$ は下に有向な半順序である．

証明． (1): $\mathcal{P}_0,\,\mathcal{P}_1\in Sub([a,b])$ として，$\mathcal{P}_0=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$, $\mathcal{P}_1=\langle x'_0,...,x'_{\ell'}\rangle$ とする．$\mathcal{P}_2$ を $\{x_0,...,x_\ell\}\cup\{x'_0,...,x'_{\ell'}\}$ を昇順に並べなおした列とすると，$\mathcal{P}_2\in Sub([a,b])$ で，$\mathcal{P}_2\sqsubset\mathcal{P}_0,\,\mathcal{P}_1$ である．

(2): $\langle\mathcal{P}_0,\vec{\xi_0}\rangle,\,\langle\mathcal{P}_1,\vec{\xi_1}\rangle\in\mathbb{P}$ として，$\mathcal{P}_0=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$, $\vec{\xi_0}=\langle\xi_0,...,\xi_{\ell-1}\rangle$, $\mathcal{P}_1=\langle x'_0,...,x'_{\ell'}\rangle$, $\vec{\xi_1}=\langle\xi'_0,...,\xi'_{\ell'-1}\rangle$ とする．

$\mathcal{P}_2\in Sub([a,b])$, $\mathcal{P}_2\sqsubset\mathcal{P}_0,\,\mathcal{P}_1$ を (1) でのようなものとして，$\mathcal{P}_3=\langle x''_0,...,x''_{\ell''}\rangle$ を，$\mathcal{P}_2$ の細分で，各区間 $[x''_i,x''_{i+1}]$, $(i<\ell'')$ に対し，$X=\{x_0,...,x_\ell\}\cup\{x'_0,...,x'_{\ell'}\}$ の要

素でこの区間に属すものは高々 1 つであるようなものをとる．ℓ'' 個の実数からなる集合 X'' を $X \subseteq X''$ で，各区間 $[x''_i, x''_{i+1}]$, $(i < \ell'')$ に含まれる X'' の要素がちょうど 1 つであるようなものとし，この要素を昇順にならべたものを $\vec{\xi_3}$ とすると，$\langle \mathcal{P}_3, \vec{\xi_3} \rangle \in \mathbb{P}$ で，$\langle \mathcal{P}_3, \vec{\xi_3} \rangle <_{\mathbb{P}} \langle \mathcal{P}_0, \vec{\xi_0} \rangle$, $\langle \mathcal{P}_1, \vec{\xi_1} \rangle$ である． ❏ (補題 1.23)

上の補題 1.23, (1) の証明での $\mathcal{P}_2$ は，$\mathcal{P} \sqsubset \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ となるような $\mathcal{P} \in Sub([a, b])$ のうち $\sqsubset$ に関して最大なもの，として特定できる．そこで，このような $\mathcal{P}_2$ を $\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1$ と表わすことにする[25)]．これに対し，補題 1.23, (2) の証明で与えた $\langle \mathcal{P}_3, \vec{\xi_3} \rangle$ は，$\langle \mathcal{P}_0, \vec{\xi_0} \rangle$ と $\langle \mathcal{P}_1, \vec{\xi_1} \rangle$ に対し，一般には一意に決まらないことに注意する．

$\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \in \mathbb{P}$ に対し，$\mathcal{P} = \langle x_0, x_1, ..., x_\ell \rangle$, として，

(1.72) $$\left| \langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \right| = |\, \mathcal{P} \,| = \max\{x_{i+1} - x_i \,:\, i < \ell\}$$ riem-3

とする．$|\, \mathcal{P} \,|$ は分割 $\mathcal{P}$ の「細かさ」の指標と見ることができる (補題 1.24 を参照).

半順序 $\langle P, < \rangle$ に対し，$D \subseteq P$ が $\langle P, < \rangle$ で**開である** (*open*) とは，すべての $q \in D$ に対し $r < q$ なら，$r \in D$ となることとする．D が $\langle P, < \rangle$ で**稠密** (*dense*) であるとは，すべての $p \in P$ に対し，$q < p$ となる $q \in D$ が存在することである．$\langle P, < \rangle$ が下に有向で，$D \subseteq P$ が $\langle P, < \rangle$ で開なら，D は $\langle P, < \rangle$ で稠密となることに注意する．

L-riem-1

補題 1.24 (1) $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in Sub([a, b])$ で，$\mathcal{P}_0 \sqsubset \mathcal{P}_1$ なら，$|\, \mathcal{P}_0 \,| \le |\, \mathcal{P}_1 \,|$ である．$p, q \in \mathbb{P}$ で，$p <_{\mathbb{P}} q$ なら，$|\, p \,| \le |\, q \,|$ である．
(2): すべての $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ に対し，$D_\delta = \{\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \in \mathbb{P} \,:\, \left| \langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \right| < \delta\}$ は $\langle \mathbb{P}, <_{\mathbb{P}} \rangle$ で開である．

証明. (1) は $<_{\mathbb{P}}$ の定義から明らかである．(2) は (1) の言い換えにすぎない． ❏ (補題 1.24)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対し

(1.73) すべての $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，すべての $\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \in D_\delta$ に対し，$\left| r - S^f_{\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle} \right| < \varepsilon$ riem-4

となるとき，このことを $r = \displaystyle\lim_{p \in \mathbb{P}, |\, p \,| \to 0} S^f_p$ または，$r = \displaystyle\int_a^b f(x) dx$ と表わす．(1.73) を満たす $r \in \mathbb{R}$ が存在するとき，f は $[a, b]$ で **Riemann 積分可能** (*Riemann integrable*) であると言い，f の $[a, b]$ での**定積分** (*definite integral*)(の値) は r であると言う．

より一般には，$\langle P, < \rangle$ を下に有向な半順序として，$v : P \to (0, \infty)$ が,

(1.74) すべての $p, q \in P$ に対し，$p < q$ なら $v(p) \le v(q)$ riem-5

を満たすとき，$s : P \to \mathbb{R}$ と $r \in \mathbb{R}$ に対し,

(1.75) すべての $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，すべての $p \in P$ に対し，$v(p) < \delta$ なら，$|\, r - s(p) \,| < \varepsilon$ となる riem-6

---

25) ”$\wedge$” は束論で最大下界を与える演算に対して用いられる記号である．

とき，このことを $r = \lim_{p \in P,\, v(p) \to 0} s(p)$ と表わすことにする．

関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対し，微分可能な関数 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ で，$F' = f$ となるものが存在するとき，F を f の**原始関数** (*anti-derivative*) という[26)]．

平均値定理を思い出しておく．次の 補題 1.25 の前提条件は更に弱められるが，以下での応用には，この形で十分である．

補題 1.25 (平均値の定理) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数とするとき， $a < \xi < b$ で，$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ を満たすものが存在する． ❑ L-riem-1-0

L-riem-2

定理 1.26 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が $[a, b]$ で Riemann 積分可能で，原始関数 F を持つとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ が成り立つ．

証明． f と F を上のようにとる．このとき，$[a, b]$ の各分割 $\mathcal{P} = \langle x_0, x_1, ..., x_\ell \rangle$ に対し $\mathcal{P}$ の代表点 $\vec{\xi}_{\mathcal{P}} = \langle \xi_0, ..., \xi_{\ell-1} \rangle$ を，すべての $i < \ell$ に対し，$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ が成り立つようなものとする．このようなものは，補題 1.25 によりとれる．ここで，

各分割 $\mathcal{P}$ に対し，

$$S^f_{\langle \mathcal{P}, \vec{\xi}_{\mathcal{P}} \rangle} = \sum_{i=0}^{\ell-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{\ell-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{\ell-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a) \tag{1.76}$$

となる．したがって，f が Riemann 積分可能であることから，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \in \mathbb{P},\, |\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle| \to 0} S^f_{\mathcal{P}, \vec{\xi}} = \lim_{\mathcal{P} \in Sub([a,b]),\, |\mathcal{P}| \to 0} S^f_{\mathcal{P}, \vec{\xi}_{\mathcal{P}}}$$
$$= \lim_{\mathcal{P} \in Sub([a,b]),\, |\mathcal{P}| \to 0} (F(b) - F(a)) = F(b) - F(a) \tag{1.77}$$

である． ❑ (定理 1.26)

関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が有界 (bounded) であるとは，ある実数 $d > 0$ に対して，$|f(x)| < d$ がすべての $x \in [a, b]$ に対し成り立つこととする．

L-riem-3

補題 1.27 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，f は有界である．

証明． f が有界でないとすると，f は Riemann 積分可能でないことを示す．

f を有界でないとする．たとえば，

(1.78) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) > r$ となる $x \in [a, b]$ が存在する riem-7

とする[27)]．このときには， $[a, b]$ の任意の分割 $\mathcal{P} = \langle x_0, ..., x_\ell \rangle$ に対し，$i_0 < \ell$ で，

(1.80)　すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) > r$ となる $x \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ が存在する riem-9

が成り立つものがとれる[28)]．したがって，この i_0 に対し，

(1.81)　すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$f(\xi_{i_0})(x_{i_0+1} - x_{i_0}) > r$ となるような $\xi_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ が存在する riem-10

ことになり，$S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}}$ は $\mathbb{P}$ の代表点 $\vec{\xi}$ のとり方で，任意の $r \in \mathbb{R}$ より大きくできる．$\mathcal{P}$ は任意だったから，f は (1.73) を満たすような $r \in \mathbb{R}$ を持ち得ない．つまり，f は Riemann 積分可能ではない． □ (補題 1.27)

関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ と区間 $[a,b]$ の分割 $\mathcal{P} = \langle x_0, ..., x_\ell \rangle$ に対し，

$$\overline{S}^f_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\sup\{f(\xi) \,:\, \xi \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i), \tag{1.82}$$ riem-11

$$\underline{S}^f_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{\ell-1} (\inf\{f(\xi) \,:\, \xi \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i) \tag{1.83}$$ riem-12

とする．$\overline{S}^f_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ である．

L-riem-4

補題 1.28 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする．

(1): $[a,b]$ の分割 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ について，$\mathcal{P}'$ が $\mathcal{P}$ の細分なら，$\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \le \underline{S}^f_{\mathcal{P}'} \le \overline{S}^f_{\mathcal{P}'} \le \overline{S}^f_{\mathcal{P}}$ が成り立つ．

(2): $[a,b]$ の任意の分割 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ に対し，$\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \le \overline{S}^f_{\mathcal{P}'}$ が成り立つ．

証明． (1): 容易に示せる (後で補筆する)．

(2): $\mathcal{P}''$ を $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の共通の細分とすると，(1) と，定義 (1.82), (1.83) から，

$$\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \le \underline{S}^f_{\mathcal{P}''} \le \overline{S}^f_{\mathcal{P}''} \le \overline{S}^f_{\mathcal{P}'} \tag{1.84}$$

となる． □ (補題 1.28)

L-riem-5

補題 1.29 すべての $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，$\overline{S}^f = \inf\{\overline{S}^f_{\mathcal{P}} \,:\, \mathcal{P} \in Sub([a,b])\}$, $\underline{S}^f = \sup\{\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \,:\, \mathcal{P} \in Sub([a,b])\}$ が存在して，$\underline{S}^f \le \overline{S}^f$ が成り立つ．

[26)] 日本語の「原始関数」という用語は，多分ドイツ語の „Urfunktion“ の訳語だろうと思う．

[27)] f が有界でないことは，(1.78) あるいは，

(1.79)　すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) < r$ となる $x \in [a,b]$ が存在する

の少なくとも片方が成り立つことと同値であるが，(1.79) が成り立つ場合も，ここでと同様の議論により f が Riemann 積分可能でないことが示せる．

[28)] そうでないとすると f が有界となることが示せてしまう．

証明． 補題 1.28 と $\mathbb{R}$ の完備性からよい． ❑ (補題 1.29)

補題 1.29 での $\overline{S}^f$, $\underline{S}^f$ は，それぞれ，f の **Darboux 上積分** (*upper Darboux integral*)，**Darboux 下積分** (*lower Darboux integral*) とよばれ，それぞれ $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ とも表される．$\overline{\int_a^b} f(x)dx \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ である．

定理 1.30 任意の関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して以下の (a), (b), (c) は同値である． L-riem-6

(a): f は Riemann 積分可能である．つまり，$r_0 \in \mathbb{R}$ で，

(1.85) すべての $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，すべての $\langle \mathcal{P}, \vec{\xi}\rangle \in D_\delta$ に対し，$\left| r_0 - S^f_{\langle \mathcal{P},\vec{\xi}\rangle}\right| < \varepsilon$ riem-13

となるものが存在する．

(b): ある $r_1 \in \mathbb{R}$ が存在して，

(1.86) すべての $\varepsilon > 0$ と $\langle \mathcal{P}, \vec{\xi}\rangle \in \mathbb{P}$ に対し，$\langle \mathcal{P}', \vec{\xi}'\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle \mathcal{P}, \vec{\xi}\rangle$ で，すべての $\langle \mathcal{P}'', \vec{\xi}''\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle \mathcal{P}', \vec{\xi}'\rangle$ に対し，$\left| r_1 - S^f_{\langle \mathcal{P}'',\vec{\xi}''\rangle}\right| < \varepsilon$ となるようなものが存在する riem-13-0

が成り立つ．

(c): f は **Darboux 積分可能** (*Darboux integrable*) である．つまり $r_2 \in \mathbb{R}$ で，

$$r_2 = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.87}$$ riem-14

となるものが存在する．

更に，(a), (b), (c) のうちのどれか一つ (つまりこれらがすべて) 成り立つときには，$r_0 = r_1 = r_2$ である．

証明． (a) $\Rightarrow$ (b): r_0 を (a) でのようにとり，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，δ を (1.85) でのようにとる．$r_1 = r_0$ として，任意の $\langle \mathcal{P}, \vec{\xi}\rangle \in \mathbb{P}$ に対し，$\langle \mathcal{P}', \vec{\xi}'\rangle \leq_{\mathbb{P}} \langle \mathcal{P}, \vec{\xi}\rangle$ を $\langle \mathcal{P}', \vec{\xi}'\rangle \in D_\delta$ となるようにとれば，この $\langle \mathcal{P}', \vec{\xi}'\rangle$ が求めるようなものとなる．

(b) $\Rightarrow$ (c): 対偶を示す． $\underline{S}^f < \overline{S}^f$ だったとして， $\varepsilon = \dfrac{1}{4}(\overline{S}^f - \underline{S}^f)$ とする[29)]．

$r_1 \in \mathbb{R}$ を任意にとるとき，この r_1 が条件 (1.86) を満たさないことを示す:

任意の $[a,b]$ の分割 $\mathcal{P}$ に対し，$\mathcal{P}$ の代表点 $\vec{\xi}_0$, $\vec{\xi}_1$ をうまくとると，$\left|\overline{S}^f_{\mathcal{P}} - S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_1}\right| < \varepsilon$, $\left|\underline{S}^f_{\mathcal{P}} - S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_0}\right| < \varepsilon$ とできるが，このとき，$\left|S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_1} - S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_0}\right| \geq 2\varepsilon$ となるから，少なくとも，$\left|S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_0} - r_1\right| \geq \varepsilon$ か $\left|S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}_1} - r_1\right| \geq \varepsilon$ のどちらか片方は成り立つ．$\mathcal{P}$ は任意だったから，r_1 に対し，(1.86) は成り立たないことがわかる．

(b) $\Rightarrow$ (c): 以下の Darboux の定理と，補題 1.32 によりよい． ❑ (定理 1.30)

定理 1.31 (Darboux の定理) 任意の有界関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し，$\underline{S}^f=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\underline{S}^f_{\mathcal{P}}$ かつ，$\overline{S}^f=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\overline{S}^f_{\mathcal{P}}$ が成り立つ． L-riem-7

証明. 一番目の式を示す (二番目のものも同様に示せる).

$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$, $m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$ とする．$M=m$ なら f は定数関数となり，主張は明らかに成り立つので，$m<M$ を仮定する．

$\underline{S}^f$ の定義から，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$[a,b]$ の分割 $\mathcal{P}_0$ で，

$$\underline{S}^f-\frac{1}{2}<\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0}\le\underline{S}^f \tag{1.88}$$ riem-15

となるものがとれる．$\mathcal{P}=\langle x_0,...,x_\ell\rangle$ とする．

任意の分割 $\mathcal{P}$ に対し，$\mathcal{P}'$ を $\mathcal{P}_0$ と $\mathcal{P}$ の共通の分割のうち一番粗いもの (補題 1.23 の直後で導入した記号での $\mathcal{P}'=\mathcal{P}_0\wedge\mathcal{P}$) とする．補題 1.28 により，

$$\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0},\,\underline{S}^f_{\mathcal{P}}\le\underline{S}^f_{\mathcal{P}'} \tag{1.89}$$ riem-16

である．ここで，

$$\begin{aligned}
0&\le\underline{S}^f-\underline{S}^f_{\mathcal{P}}\\
&=(\underline{S}^f-\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0})-(\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}-\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0})+(\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}-\underline{S}^f_{\mathcal{P}})\\
&=(\underline{S}^f-\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0})+(\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}-\underline{S}^f_{\mathcal{P}}) && [\ (1.89)\text{ により }(\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}-\underline{S}^f_{\mathcal{P}_0})\ge 0\ ]\\
&\le\frac{1}{2}\varepsilon+(\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}-\underline{S}^f_{\mathcal{P}})
\end{aligned} \tag{1.90}$$ riem-17

となるが，$\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ より，高々 ℓ 個の新しい点しか含んでおらず[30]，

$$\underline{S}^f_{\mathcal{P}'}=\sum_{i=0}^{\cdots}\underbrace{(inf\{f(\xi)\,:\,...\})}_{\text{この係数}}(...) \tag{1.91}$$ riem-18

で，$\underline{S}^f_{\mathcal{P}}$ での対応する場所での係数と異る値となっている可能性のあるのは，新しい点のすぐ右か左にある $\mathcal{P}'$ の区間に対応するもののみである．そのような区間たちから新しい点たちへの 1 対 1 の対応がつくから，このような $\underline{S}^f_{\mathcal{P}}$ でとは異る値をとる係数の現れる場所の数は，高々 ℓ 個である．またそのような箇所での区間の幅 ((1.91) で “(...)” と表されている値) は $|\mathcal{P}|$ より小さいか等しい，また，そのような箇所での上の係数の値と $\underline{S}^f_{\mathcal{P}}$ での対応する箇所での $\inf\{f(\xi)\,:\,...\}$ の値の差は高々 $M-m$ だから，

$$(1.90)\text{ の最右辺}\le\frac{1}{2}\varepsilon+\ell(M-m)\,|\,\mathcal{P}\,| \tag{1.92}$$ riem-19

となることがわかる．したがって，

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2\ell(M-m)} \tag{1.93}$$ riem-20

---

[29] つまり，$4\varepsilon=\overline{S}^f-\underline{S}^f$ ということである．

[30] 実際には，$[a,b]$ の分割はすべて a と b を両端の成分として持つので，“高々 $\ell-1$ 個の新しい点しか” というのが最良の評価になるが，これを採用しても更に得られるものはない．

とすると，任意の $\mathcal{P} \in Sub([a,b])$ に対し，$|\,\mathcal{P}\,| < \delta$ なら，$\underline{S}^f - \underline{S}^f_{\mathcal{P}} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ となる．
□ (定理 1.31)

L-riem-8

補題 1.32 $\lim_{|\,\mathcal{P}\,| \to 0} \underline{S}^f_{\mathcal{P}} = \lim_{|\,\mathcal{P}\,| \to 0} \overline{S}^f_{\mathcal{P}}$ なら，$\lim_{p \in \mathbb{P}, |\,p\,| \to 0} S^f_p$ が存在して，$\lim_{|\,\mathcal{P}\,| \to 0} \underline{S}^f_{\mathcal{P}} = \lim_{p \in \mathbb{P}, |\,p\,| \to 0} S^f_p = \lim_{|\,\mathcal{P}\,| \to 0} \overline{S}^f_{\mathcal{P}}$ となる．

証明． すべての $\langle \mathcal{P}, \vec{\xi} \rangle \in \mathbb{P}$ に対し，$\underline{S}^f_{\mathcal{P}} \leq S^f_{\mathcal{P},\vec{\xi}} \leq \overline{S}^f_{\mathcal{P}}$ となることからよい． □ (補題 1.32)

L-riem-8-0

補題 1.33 f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能する．このとき，

(1)： $f + g : [a,b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) + g(x)$ は Riemann 積分可能で，$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$ である．

(2)： $c \in \mathbb{R}$ とするとき，$cf : [a,b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto cf(x)$ は Riemann 積分可能で，$\int_a^b cf\,dx = c\int_a^b f\,dx$ である．

(3)： $f^2 : [a,b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto (f(x))^2$ は Riemann 積分可能である．

(4)： $fg : [a,b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x)g(x)$ は Riemann 積分可能である．

実数の集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ が，**測度 0** (*measure 0*) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，区間の列 I_n, $n \in \mathbb{N}$ で，I_n, $n \in \mathbb{N}$ は X の被覆となっていて (つまり $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq X$ が成り立ち)，かつ $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\,I_n\,| < \varepsilon$ となるものが存在することである，とする．

L-riem-9

補題 1.34 (0) 空集合も 1 点だけからなる集合 (ある $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{a\}$ と表わせる集合) も測度 0 である．

(1)： 任意の a, $b \in \mathbb{R}$ $a < b$ に対し，I_n, $n \in \mathbb{N}$ が区間 $[a,b]$ の被覆となっているとき，$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\,I_n\,| \geq b - a$ が成り立つ．特に，$[a,b]$ は測度 0 ではない．

(2)： $X \subseteq$ が測度 0 で $Y \subseteq X$ なら，Y も測度 0 である．

(3)： X_n, $n \in \mathbb{N}$ を，測度 0 な $\mathbb{R}$ の部分集合の列とするとき，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ も測度 0 である．

L-riem-10

系 1.35 (1) $X_0, ..., X_{\ell_1} \subseteq \mathbb{R}$ がすべて測度 0 のとき，$X_0 \cup \cdots \cup X_\ell$ も測度 0 である．

(2)： X_i, $i \in \mathbb{N}$ がすべて測度 0 のとき，$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ も測度 0 である．

(3)： $\mathbb{R}$ の任意の可算部分集合は測度 0 である．特に $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ は測度 0 である．

定理 1.36 (Riemann-Lebesgue の定理) 任意の有界な関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，f が Riemann 積分可能となるのは，集合 L-riem-11

(1.94) $\quad D_f = \{d \in [a,b] : f$ は d で連続でない[31)]$\}$ riem-21

が測度 0 となる丁度そのときである．

Riemann-Lebesgue の定理の証明は簡単ではないが，この定理を仮定すると，Riemann 積分可能な関数に関する多くの性質に，見通しのよい別証を与えることができる．例えば:

L-riem-12

系 1.37 (1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，任意の $[c,d] \subseteq [a,b]$ に対し $f \restriction [c,d]$ も Riemann 積分可能である．

(2): 任意の単調関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は Riemann 積分可能である．

証明． (1): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が Riemann 積分可能なら，定理 1.36 により，D_f は測度 0 となる．$[c,d] \subseteq [a,b]$ なら，$D_{f \restriction [c,d]} = D_f \cap [c,d]$ も測度 0 となるから，定理 1.36 により，$f \restriction [c,d]$ は Riemann 積分可能である．

(2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を単調関数とすると，次の補題 1.38 により，D_f は可算となるから，系 1.35, (3) により D_f は測度 0 である． □ (系 1.37)

L-riem-13

補題 1.38 任意の単調関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，D_f は可算である．

証明． 単調関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対し，D_f が非可算だったとして矛盾を導く．簡単のために f は単調増加とする．各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，

$$D_{f,n} = \{x \in (a,b) : (\lim_{u \to x+0} f(u)) - (\lim_{u \to x-0} f(u)) \geq \frac{1}{n}\} \tag{1.95}$$

とする．$D_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} D_{f,n}$ だから，ある $n^* \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，D_{f,n^*} は非可算である．

このとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，$a < x_0 < \cdots < x_{k-1} < b$ で $x_i \in D_{f,n^*}$ $(i < k)$ となるものがとれるから，$f(b) - f(a) \geq k \cdot \dfrac{1}{n^*}$ となるが，これは矛盾である． □ (補題 1.38)

1.11 関数 (の値) の収束と選択公理 [37)]

AC

解析学の基礎には，(弱い) 選択公理が必要になる命題がいくつか含まれる．古典的な数学を展開するためだけなら，選択公理が必要になる命題をうまく避けて，そこで必要となる基礎的な tools を用意することもできる[32)]．

以下に述べるのは，このような状況を例示する比較的初等的な事例の一つである:

L-AC-0

定理 1.39 任意の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，以下は同値である:

(1.96) $r_0 = \lim_{x \to a} f(x)$ が存在する． AC-0

(1.97) ある $r_1 \in \mathbb{R}$ に対し，すべての，a に収束する実数列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対し[33)]， AC-1

[31)] "連続でない" は英語では "discontinuous" という形容詞で表現される． ここでの，文字 "D" はこれを頭に置いて使っている．

[32)] 更に，このことを十分に弱い集合論の枠組で実行すると，故 Solomon Feferman 教授が主張していた「数学の大きな (あるいは，ほとんどの) 部分は Peano Arithmetic と equiconsistent な体系で記述／展開できる」というテーゼの実証が得られることになる．

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = r_1$ が成り立つ.

更に上の (1.96) (かつ (1.97)) が成り立つときには，r_0 と r_1 は一致する.

証明. "(1.96) ⇒ (1.97)": $\lim_{x\to a} f(x) = r_0$ として，$\langle x_n : n \in \omega\rangle$ を a に収束する実数列とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で，すべての $|\, x - a \,| < \delta$ となる $x \in \mathbb{R}$ に対し，$|\, f(x) - r_0 \,| < \varepsilon$ となるようなものがとれる．$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ だから，$N \in \mathbb{N}$ を選ぶと，すべての $n > N$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|\, x_n - a \,| < \delta$ となるようにできるが，このとき，δ の選び方から，すべての $n > N$ に対し，$|\, f(x_n) - f(a) \,| < \delta$ である．$\varepsilon > 0$ は任意だったので，以上から，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が示せた．

"(1.97) ⇒ (1.96)": 対偶を示す．$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しないとして，任意の $r_1 \in \mathbb{R}$ に対して，a に収束する数列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq r_1$ となる (つまり，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は存在しないか，存在するとしても r_1 と異る) ものがあることを示せばよい．

$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在しないことから，特に，r_1 は $f(x)$ の $x \to a$ でのは極限でない．したがって関数の値の極限の定義から，$\varepsilon > 0$ で，

(1.98) すべての $\delta > 0$ に対し，$x \in \mathbb{R}$ で，$|\, x - a \,| < \delta$ だが，$|\, f(x) - r_1 \,| > \varepsilon$ となるものが存在する AC-1-0

ようなものがとれる．したがって，実数列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，

(1.99) $|\, x - a \,| < \dfrac{1}{n+1}$; AC-1-1

(1.100) $|\, f(x) - r_1 \,| > \varepsilon$ AC-1-2

がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つようなものがとれる[34)]．

(1.99) により，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ だが，(1.100) により $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq r_1$ となるから，この数列が求めるようなものである． ❑ (定理 1.39)

上の証明でも明らかなように，

(A) "すべての $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，(1.96) が成り立つなら (1.97) が成り立つ"

の証明には選択公理は必要とならないが，

(B) "すべての $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，(1.97) が成り立つなら (1.96) が成り立つ"

では，次のような形の選択公理の弱いヴァージョンが必要となっている．

---

33) 解析の教科書では，数列を $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ などと表わすが，ここでは，集合論で標準的な記法を用いて $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ という表記を用いている．

34) ここで，無限個の x_n, $n \in \mathbb{N}$ を一度にとることができるためには，選択公理が必要となる．実際以下で示すように，選択公理からの帰結を全く用いることなく，ここでの主張 ("(1.97) ⇒ (1.96)") を示すことはできない．

(C)　任意の $\mathbb{R}$ の部分集合の列 $\langle X_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対し，この列に対する選択関数 (関数 $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ で $c(n) \in X_n$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つようなもの) が存在する．

文献を確かめられないでいるのだが，多分，以下の定理は，[Sierpiński, 1918] で示されている命題のはずである．

L-AC-1

定理 1.40 ZF 上 (B) と (C) は同値である．

証明． “(C) ⇒ (B)” は定理 1.39 の証明で既に示した．

“(B) ⇒ (C)”: $k \in \mathbb{N}$ に対し $a_k = 1/(k+1)$ として，$\langle g_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ を，$g_k : \mathbb{R}^k \to (a_{k+1}, a_k)$ で，g_k は 1-1 となるようにとる[35]．ここで，

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_k{}''\langle X_n : n < k\rangle \tag{1.101}$$ AC-2

として[36]，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases} \tag{1.102}$$ AC-3

とすると，$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない．以上は ZF で議論できる．

したがって，(B) の仮定から，実数列 $\vec{x} = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ で，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ かつ，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0$ となるものが存在する．このとき $I = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = 1\}$ とすると，I は無限集合となるが，f の定義 (1.102) から，$\vec{x} \restriction I$ $(= \langle x_n : n \in I\rangle)$ を使うと，$\langle X_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対する選択関数が構成できる．　□ (定理 1.40)

定理 1.41 (Paul Cohen(?), [Jech, 1973] を参照) (C) の否定は ZF と矛盾しない．

定理 1.41 により，定理 1.39 は選択公理からの帰結を全く用いずに証明することはできない．

関数 (の値) の極限[37] は，関数の区間での連続性や微分可能性などとの関連で用いられることが多いが，関数の区間での連続性に関しては，点列の収束による判定条件の同値性には，選択公理は必要とならない．

L-AC-2

---

[35] ここでは，有限列 $\langle x_n : i < n\rangle$ と有限組み $\langle x_0, ..., x_{k-1}\rangle$ は同一の対象と看做している．特に $\langle X_n : n < k\rangle \subseteq \mathbb{R}^k$ である．

[36] 関数 $f : X \to Y$ と $X' \subseteq X$ に対して，$f''X'$ で X' の f による像 $\{y \in Y : f(x) = y$ となる $x \in X'$ が存在する $\}$ を表わす．多くの教科書では X' の f による像に対して，$f[X']$ という記法が採用されている．$f(X')$ という書き方がされることもあるが，この書き方は，f がその定義域の要素に対応させる値を表わすのと同じ書き方になっているため，少し複雑な議論をはじめると，混乱が生じてしまう．$f''X'$ の表記は，K. Gödel の [Gödel, 1940] で用いられて以来集合論の研究者の間では広く採用されるようになった記法である．

[37] この概念は，日本語で「関数の極限」と書かれることの多いものであるが，日本語には文法的な単数／複数の区別がなく冠詞もないため，「関数の極限」と言ったのでは “limit of a function” なのか “limit of functions” なのか “limit of the functions” なのかの区別ができない．

定理 1.42 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ とするとき，以下の命題の同値性は ZF で証明できる．

(1.103) f は区間 $[a, b]$ で連続である． AC-4

(1.104) すべての $[a, b]$ での収束点列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ が成り立つ． AC-5

(1.105) すべての $[a, b]$ での有理数からなる収束点列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ が成り立つ． AC-6

証明． "(1.103) ⇒ (1.104) ⇒ (1.105) ⇒ (1.103)" が ZF で示せる．

"(1.103) ⇒ (1.104)" は，連続性の定義と，(A) (この証明には選択公理は必要にならない) からよい．"(1.104) ⇒ (1.105)" は自明である．

"(1.105) ⇒ (1.103)": $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が (1.105) を満たすが，f は $[a, b]$ で連続でなかったとして，矛盾を導く．f が連続でないことから， $d \in [a, b]$ で，$\lim_{x\to d} f(x) \neq f(d)$ (つまり $\lim_{x\to d} f(x)$ が存在しないか，あるいは存在するが $f(d)$ と異る) となるものがある．この不等式は，

(1.106) ある $\varepsilon > 0$ に対し，どんな $\delta > 0$ をとっても， $|\, f(x) - f(d)\,| \geq \varepsilon$ となるような $x \in [a, b] \cap (d - \delta, d + \delta)$ が存在する AC-7

と同値である．(1.106) は，最初の ε を $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\varepsilon$ で置き換え (て ε_0 を再び ε と変名す) ることで，

(1.107) ある $\varepsilon > 0$ に対し，どんな $\delta > 0$ をとっても， $|\, f(x) - f(d)\,| \geq 2\varepsilon$ となるような $x \in [a, b] \cap (d - \delta, d + \delta)$ が存在する AC-8

と書き換えることができる．

$\delta > 0$ に対して，(1.107) でのような x をとるとき，f が (1.105) を満たすことから，$q \in [a, b] \cap (d - \delta, d + \delta) \cap \mathbb{Q}$ で，$|\, f(q) - f(x)\,| < \varepsilon$ となるものがとれる．この q に対し，$|\, f(d) - f(q)\,| \geq \varepsilon$ が成り立つ．したがって，(1.106) での ε に対し，

(1.108) どんな $\delta > 0$ をとっても，$|\, f(q) - f(d)\,| \geq \varepsilon$ となるような $q \in [a, b] \cap (d - \delta, d + \delta) \cap \mathbb{Q}$ が存在する AC-9

が成り立つ．したがって，有理数列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を

(1.109) $q \in [a, b]$ で $|\, q_n - d\,| < \dfrac{1}{n+1}$; AC-10

(1.110) $|\, f(q_n) - f(d)\,| \geq \varepsilon$ AC-11

となるようにとれるが，(1.109) により，$\lim_{n\to\infty} q_n = d$ で，(1.110) により，$\lim_{n\to\infty} f(q_n) \neq d$ となる．これは (1.105) の仮定に矛盾である．

$\mathbb{Q}$ は (ZF で) 整列できることが示せるので，$\mathbb{Q}$ の整列順序 $\sqsubset$ を固定しておき，各 q_n を，(1.109), (1.110) を満たすようなもののうち， $\sqsubset$ に関して最小のもの，として選ぶことで，数列 $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が選択公理を用いずに構成できる． ❑ (定理 1.42)

References

[Gödel, 1940] Kurt Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis, Annals of Mathematics Studies, No.3, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1940).

[Jech, 1973] Thomas Jech, The Axiom of Choice North-Holland (1973) (Reprint: Dover Books on Mathematics Series, 2008).

[Sierpiński, 1918] Wacław Sierpiński, L'axiome de M. Zermelo et son róle dans la théorie des ensembles et l'analyse, Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles, Séie A, Sciences mathématiques, (1918), 97–152.

1.12 中間値の定理，閉区間のコンパクト性，等

mean-value

現在日本で出版されている微積の教科書の多くは，中間値の定理をはじめとして基礎的な定理にきちんとした証明が書いていないので，これらの定理のちゃんとした証明を見付けるのにひどく苦労する．そこで，ここできちんとした証明を書き出しておこうと思う．

次の定理は，連続性の定義から容易に示せる．この定理の応用のいくつかについては既に第 1.7 小節で見た．

ある領域 $D \subseteq \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が区間 $I \subseteq D$ で連続とは，すべての $u \in I$ に対し，

$$\text{(1.111)} \quad \lim_{x \to u} (f \restriction I)(x) = (f \restriction I)(u) \ (= f(u))$$ mv-a

となることとする．I が閉区間 $[a, b]$ のときには，この定義での (1.111) は， $u \in (a, b)$ に対しては，$\lim_{x \to u} f(x) = f(u)$ (つまり f は u で連続) と同値になるが，$u = a$ または $u = b$ では，それぞれ，$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ または $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ と同値になることに注意しておく．

L-mv-0

定理 1.43 (中間値の定理) f が閉区間 $[a, b]$ で連続なとき，すべての $c \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ に対し，$f(x) = c$ となるような $x \in [a, b]$ が (少なくとも 1 つ) 存在する．

証明． $f(a) = f(b)$, $c = f(a)$, $c = f(b)$ のどれかが成り立つとき，主張が成り立つことは明らかである．したがって $f(a) \neq f(b)$, $c \neq f(a)$, $c \neq f(b)$ とする．簡単のため $f(a) < c < f(b)$ とする．$f(a) > c > f(b)$ の場合の証明は同様にできる．

$$\text{(1.112)} \quad X = \{x \in [a, b] : \text{すべての } u \in [a, x] \text{ に対し } f(u) < c \text{ となる}\}$$ mv-0

とする． $a \in X$ だから $X \neq \emptyset$ で，b は X の上界の 1 つとなっている．したがって ($\mathbb{R}$ の完備性 (完全性) から)， $d = \sup X$ が存在する．$f(d) = c$ となることが示せればよい．

f の連続性から，$f(d) = \lim_{x \to d-0} f(x)$ だから，X の定義と X が $[a, d)$ と 右方向に共終であることから，$f(d) \leq c$ がわかる．特に，$d < b$ である．

もし $f(d) \neq c$ なら，$f(d) < c$ だが，$\varepsilon = c - f(d)$ とすると，f の連続性から，$\delta > 0$ で，すべての $x \in [a,b]$ に対し，x が $|x-d| < \delta$ を満たせば，$|f(x) - f(d)| < \varepsilon$ となる，ようなものがとれる．

任意の $u \in (d, d+\delta) \subseteq [a,b]$ に対し，$f(u) < f(d) + \varepsilon < c$ となるから，$[d, d+\delta) \subseteq X$ となるが，これは d の選び方に矛盾である． ❑ (定理 1.43)

次の定理の n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ での一般化は，第 1.8 小節で既に証明しているが，以下では，1 次元空間 $\mathbb{R}$ の場合を，もうすこし微積の教科書での記号の使い方に近い書き方で再度書き出しておくことにする．以下では，「すべての上に有界な実数の集合 A は最小上界 $\sup A$ を持つ」および，これの dual である，「すべての下に有界な実数の集合 B は最大下界 $\inf B$ を持つ」を実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ の完備性の性質として仮定している．

L-mv-1

定理 1.44 $f : D \to \mathbb{R}$ が $[a,b] \subseteq D$ 上で連続なら，f は区間 $[a,b]$ で最大値と最小値をとる．つまり d_{max}, $d_{min} \in [a,b]$ で，$f(d_{max}) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $f(d_{min}) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ となるものが存在する．

定理 1.44 で，$[a,b]$ が閉区間であることは本質的である (つまり定理の命題で $[a,b]$ を「任意の (閉区間でないかもしれない) 区間」で置き換えたものは正しくない)．また f が $[a,b]$ 上で連続，という条件も落せない．

上の定理は，位相空間論での，

L-mv-2

定理 1.45 X をコンパクト・ハウスドルフ空間 X 上の連続な実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ は最大値最小値をとる (つまり x_{max}, $x_{min} \in X$ で，$f(x_{max}) = \sup\{f(x) : x \in X\}$, $f(x_{min}) = \inf\{f(x) : x \in X\}$ となるものがとれる)．

という定理の特別な場合となっている．定理 1.45 は，連続写像によるコンパクト空間の像はコンパクトであることと，$\mathbb{R}$ のコンパクト部分空間が $\mathbb{R}$ の有界閉集合と一致することから直ちに導ける．定理 1.44 の直接証明には，$[a,b]$ がコンパクトであることに対応する定理 (以下の定理 1.47) を素手で証明しておく必要がある．

そのためにまず次の準備をする: 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であるとは，すべての $\varepsilon > 0$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

(1.113) すべての $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ に対し，$|x_m - x_n| < \varepsilon$ が成り立つ

ようなものが存在することとする．

実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとは，ある実数 a, b, $a < b$ が存在して，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a \leq x_n \leq b$ となることである．

L-mv-2-0

定理 1.46 任意の実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある実数に収束することと，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることは同値である．

証明． まず，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束する実数列である，と仮定してみる．$x^* = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ で，

(1.114) すべての $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ に対し，$|x^* - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる，

ようなものが存在する．この N に対し，$m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ なら，$|x_m - x_n| \le |x_m - x^*| + |x^* - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる．ε は任意だったので，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列である．

逆に，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をコーシー列である，としてみる．この時，

Cl-mv-0

Claim 1.46.1 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である．

$\vdash$ $\varepsilon = 1$ として，$N \in \mathbb{N}$ を，

(1.115) すべての $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N$ に対し，$|x_m - x_n| < 1$ となる

ようなものとすると，$a = \min\{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}\} - 1$, $b = \max\{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}\} + 1$ とすれば，$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [a, b]$ である． $\dashv$ (Claim 1.46.1)

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であることから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\{x_k : k > n\}$ も有界だから，数列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，$u_n = min\{x_k : k > n\}$ により定義できる．$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は定義から上昇列となるが，$u_n \le \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つから，$r^* = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上昇列であることから，$r^* = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ である．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N > 0$ を

(1.116) $n, m \in \mathbb{N}$ $n, m > N$ なら，$|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

(1.117) すべての $m \in \mathbb{N}$, $m > N$ に対し $|r^* - u_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

となうようにとれる．この N に対し，$n \in \mathbb{N}$ $n > N$ なら，$|r^* - x_n| < \varepsilon$ となる．

したがって，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r^*$ である． □ (定理 1.46)

L-mv-3

定理 1.47 ($\mathbb{R}$ の (有界閉集合の) 点列コンパクト性) 任意の有界な実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を含む．

証明． 定理 1.46 により，有界な実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列を部分列として含むことを示せばよい．$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ を，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a \le x_n \le b$ となるようにとる．

$I_0 = [a, b]$ として，$n \in \mathbb{N}$ に対し，区間 I_n が既に定まったとして，I_{n+1} を，I_n を 2 つの同じ幅の区間に二分割したとき，これらの 2 つの部分区間のうちの 1 つで，x_n, $n \in \mathbb{N}$ のうちの無限個を含むようなものとして帰納的に定義する．I_n, $n \in \mathbb{N}$ のとりかたから，自然数列 $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ で，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_{i_n} \in I_n$ となるようなものをとることができる．$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ だから，$N \in \mathbb{N}$ で $n > N$ なら，$x_{i_n} \in I_N$ である．このことと，I_N の幅 $= 2^{-2}(b - a)$ となることから，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることがわかる． □ (定理 1.47)

以上の準備により，定理 1.44 の証明を以下のように行なうことができる．

定理 1.44 の証明: まず，定理 1.44 より弱い次の補題を示しておく: 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が有界である，とは f の像 $f[D]$ が $\mathbb{R}$ の有界な部分集合になることである．

補題 1.48 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続なら，f は有界である．

証明． f が上に有界でない (つまり，どんな $r\in\mathbb{R}$ に対しても $f(x)>r$ となる $x\in[a,b]$ が存在する) として矛盾を示す．f が下に有界でない (つまり，どんな $r\in\mathbb{R}$ に対しても $f(x)<r$ となる $x\in[a,b]$ が存在する) 場合も同様に矛盾が示せる[38]．

$$(1.118)\quad 各\ n\in\mathbb{N}\ に対し\ f(x_n)>n\ となる$$ mv-1

ような $x_n\in[a,b]$ を選ぶ．定理 1.47 により，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で，収束するものが存在する．$\lim_{n\to\infty}x_{i_n}\in[a,b]$ である[39]．

$x^*=\lim_{n\to\infty}x_{i_n}$ とすると，f の連続性から，$f(x^*)=\lim_{n\to\infty}f(x_{i_n})$ とならなくてはならないが，(1.118) により，$\lim_{n\to\infty}f(x_{i_n})=\infty$ となってしまうので矛盾である． □ (補題 1.48)

定理 1.44 の証明を続ける．補題 1.48 により，$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$ が存在する．$n\in\mathbb{N}$ に対し，$x_n\in[a,b]$ を

$$(1.119)\quad M-f(x_n)<\frac{1}{n}$$ mv-2

となるようにとれる．定理 1.47 により，実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列 $\{x_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．$x^*=\lim_{n\to\infty}x_{i_n}$ とすると，$x^*\in[a,b]$ となるので[40]，f の連続性から，$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x^*)$ となるが，(1.119) から，$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=M$ となるので $f(x^*)=M$ である．したがって $x_{max}=x^*$ は求めているようなものになっている．x_{min} も同様に得られる． □ (定理 1.44)

$D\subseteq\mathbb{R}$ として，$f:D\to\mathbb{R}$ が D で**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して，すべての $x_0,\,x_1\in D$ に対し，$|x_0-x_1|<\delta$ なら，$|f(x_0)-f(x_1)|<\varepsilon$ となることである．

例 1 (1) $f(x)=x^2$ は $\mathbb{R}$ で連続だが，$\mathbb{R}$ で一様連続ではない．
(2): $f(x)=\log x$ は $(0,1]$ で連続だが，$(0,1]$ で一様連続ではない．

L-mv-4

定理 1.49 すべての $a,b\in\mathbb{R},\,a<b$ と $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に対し，f が $[a,b]$ で連続なら，f は $[a,b]$ で一様連続である．

定理 1.49 は次の定理から容易に導ける:

定理 1.50 (Heine-Borel の被覆定理) $a,\,b\in\mathbb{R}$ で $a<b$ とする．$\mathcal{F}$ が開区間の族で， L-mv-5

$$(1.120)\quad [a,b]\subseteq\bigcup\mathcal{F}$$ mv-2-a-a-0

[38] f が有界であることは，f が上に有界かつ下に有界ということと同値なので，これによって，ここでの f が有界でなくてはならないことが示せたことになる．

[39] ここで区間 $[a,b]$ が閉区間であることが用いられている．たとえば，$\lim_{n\to\infty}x_{i_n}$ は a または b である可能性があるので，例えば区間として開区間 (a,b) を採用していたとしたら，ここで，$\lim_{n\to\infty}x_{i_n}\in(a,b)$ は一般には言えない．

[40] $a\le x_{i_n}\le b$ がすべての $n\in\mathbb{N}$ に対し成り立つので，$a\le\lim_{n\to\infty}x_{i_n}\le b$ である．

となるものとすると[41]，有限な $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ で，

$$[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{F}_0 \tag{1.121}$$ mv-2-a-a-1

となるものが存在する[42]．

証明． $\mathcal{F}$ を開区間の族で，$[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ となるものとする．まず，$\mathcal{F}$ の可算な部分族 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ で $[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{F}_1$ となるものがあることを示す．

$$\mathcal{F}_2 = \{I : I \text{ は端点が有理数の開区間である } J \in \mathcal{F} \text{ に対し}, I \subseteq J\} \tag{1.122}$$ mv-2-a

とする．$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ だから，$\mathcal{F}_2$ は可算である．各 $J \in \mathcal{F}$ に対し，$J = \bigcup\{I \in \mathcal{F}_2 : I \subseteq J\}$ だから，

$$\bigcup \mathcal{F}_2 = \bigcup \mathcal{F} \supseteq [a,b] \tag{1.123}$$ mv-2-a-a-2

である．

各 $I \in \mathcal{F}_2$ に対し，$J_I \in \mathcal{F}$ を $I \subseteq J_I$ となるように選ぶと，$\mathcal{F}_1 = \{J_I : I \in \mathcal{F}_2\}$ とすして，$\mathcal{F}_1$ は $\mathcal{F}$ の可算な部分族で，$[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{F}_2 \subseteq \bigcup \mathcal{F}_1$ である．

$\mathcal{F}_1 = \{J_i : i \in \mathbb{N}\}$ とする．$n \in \omega$ で，$[a,b] \subseteq \bigcup\{J_i : i < n\}$ となるものがあれば，$\mathcal{F}_0 = \{J_i : i < n\}$ とすればよいから，このような n が存在しないと仮定して矛盾を示す．

このとき，$\mathbb{N}$ の (真の) 上昇列 $\langle k_n : n \in \omega\rangle$ と $[a,b]$ の要素の列 $\langle d_n : n \in \omega\rangle$ を，次を満たすようにとることができる:

$$d_0, ..., d_n \in \bigcup\{J_i : i < k_n\}; \tag{1.124}$$ mv-2-a-0

$$d_{n+1} \in [a,b] \setminus (\bigcup\{J_i : i < k_n\}). \tag{1.125}$$ mv-2-a-1

定理 1.47 により，$\langle d_n : n \in \omega\rangle$ の部分列で，収束するものがあるから，そのようなものの一つを $\langle d_{n_i} : i \in \omega\rangle$ とする．$d = \lim_{i\to\infty} d_{n_i}$ とすると，$d \in [a,b]$ である．(1.123) により，$k^* \in \mathbb{N}$ で，$d \in J_{k^*}$ となるものが存在する．ここで，$i^* \in \mathbb{N}$ を，$k_{i^*} \geq k^*$ となるものとすると，(1.125) により，すべての $i \in \mathbb{N}$ $i > i^*$ に対し，$d_{n_i} \notin J_{k^*}$ となるが，このことは $J_{k^*} \ni d = \lim_{i\to\infty} d_{n_i}$ に矛盾である． ❏ (定理 1.50)

定理 1.49 の定理 1.50 からの証明: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ で連続とする．$\varepsilon > 0$ を任意にとると，各 $x \in [a,b]$ に対し，$\delta_x > 0$ で，すべての $u \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [a,b]$ に対し，$|f(x) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようなものがとれる．$I_x = (x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x)$ とすると，$\mathcal{F} = \{I_x : x \in [a,b]\}$ は $[a,b]$ の被覆だから，有限の $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ で，$\bigcup \mathcal{F}_0 \supseteq [a,b]$ となるものが存在する．$\mathcal{F}_0 = \{I_{x_0}, ..., I_{x_{\ell-1}}\}$ として，$\delta = \frac{1}{2}\left(\min\{\delta_{x_0}, ..., \delta_{x_{\ell-1}}\}\right)$ とする．

この δ が，上の ε に対し，一様連続の定義でのようなものになっていることを示す．

$x_0, x_1 \in [a,b]$ で $|x_0 - x_1| < \delta$ とする．このとき，$x_0 \in I_{x_i}$ $\left(\subseteq (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})\right)$ となる $i < \ell$ をとると，$x_1 \in (x_i - \delta_{x_i}, x_1 + \delta_{x_i})$ である．したがって，δ_{x_i} のとりかたから，

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq |f(x_0) - f(x_i)| + |f(x_1) - f(x_i)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \tag{1.126}$$

[41] 集合族 $\mathcal{F}_0$ が (1.120) を満たすとき，$\mathcal{F}$ は $[a,b]$ の被覆である，という．

[42] このような $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の部分被覆である，という．

である． □ (定理 1.49)

1.13 Taylor の定理

http://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/biseki-1-2017-06-01.pdf,
http://fuchino.ddo.jp/kobe/bbd/calculus-1-07-2019-05-30.pdf

1.14 陰関数定理とラグランジュの未定常数法

impl

陰関数の定理は，領域[43] $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上の C^1-級関数 $F : D \to \mathbb{R}$ が以下の定理で述べるような条件を大域的に満たすなら，この F に対応する程式 $F(x,y) = 0$ の解は，なめらかな (つまり C_1-級の) 曲線 (1 次元多様体) になる，というものである．

定理 1.51 (陰関数定理) F を平面上の領域 D 上の C^1-級関数とし，点 $\langle a,b\rangle \in D$ が方程式 $F(x,y) = 0$ の解となっているとする．$F_y(a,b) \neq 0$ なら，$\langle a,b\rangle$ の近傍 $U \subseteq D$ と，$D_a = pr_0(U) = \{x \in \mathbb{R} :$ ある $y \in \mathbb{R}$ に対し $\langle x,y\rangle \in U\}$ 上で定義された C^1-級関数 $\varphi : D_a \to \mathbb{R}$ で， L-impl-0

(1.127) すべての $\langle x,y\rangle \in U$ に対し，$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ が成り立つ impl-0

ものが存在する[44]．更に，すべての $x_0 \in D_a$ に対し，

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{F_x(x_0,\varphi(x_0))}{F_y(x_0,\varphi(x_0))} \tag{1.128}$$ impl-1

を満たす．

定理から，$F_x(a,b) \neq 0$ のときには，x と y の役割を入れ替えて得られる同様の主張が成り立つ．

陰関数定理での (1.127) を満たすような φ の存在は容易に示せる．F が C^1-級であることから，$F_y(a,b) \neq 0$ から (a,b) の近傍 U_0 で，

(1.129) すべての $\langle x,y\rangle \in U_0$ に対し $F_y(x,y) \neq 0$ となる impl-2

ようなものが選べる．U_0 で $z = F(x,y)$ のグラフを y 軸に並行に切って得られるグラフ $z = F(c,y)$ は，(1.129) により，真に単調な関数のグラフとなっているから，このグラフの直線 $z = 0$ との交点は高々 1 つである．$z = F(a,x)$ のグラフではそのような交点は b として実際に存在するので，必要なら U_0 を (a,b) のある部分近傍で置き換えることで，すべての $c \in U_a$ に対し $z = F(c,y)$ となる y が一意に存在するものとしてよい．各 $c \in U_a$ にこのような y を対応させるような関数 φ は (1.127) を満たす．

このような φ が (1.128) を満たすことは φ が C^1-級になることを示す過程で明らかになるが，(1.127) を満たすような φ が C^1-級であることがあらかじめわかっていれば，φ

---

[43] 脚注 19) を参照．

[44] (1.127) から，このような φ は存在すれば一意である．

が (1.128) を満たさなくてはないらないことは，合成関数の微分法から，直ちにわかる: すべての $x \in U_a$ に対し $F(x, \varphi(x)) = 0$ だから，

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, \varphi(x)) = F_x(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)F_y(x, \varphi(x)) \tag{1.130}$$

である．両辺を $F_y(x, \varphi(x))$ で割って ($\langle x, \varphi(x)\rangle \in U_0$ だから，$F_y(x, \varphi(x)) \neq 0$ である) 移項すると

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))} \tag{1.131}$$

となる．

定理 1.52 (Lagrange の未定常数法) 領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上の関数 f, φ を C^1-級とし， T-lagrange-0

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1.132}$$ lg-2-0

となる $\langle x, y\rangle \in D$ では $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ の少なくとも片方は 0 と異るものとする．このとき $C = \{\langle x, y\rangle \in D : \varphi(x, y) = 0\}$ 上で $f(x, y)$ の値が極値となるような点 $\langle a, b\rangle \in C$ は，ある定数 λ^* とともに次の連立方程式を満たす，

$$\begin{aligned} f_x(a, b) &= \lambda^* \varphi_x(a, b) \\ f_y(a, b) &= \lambda^* \varphi_y(a, b). \end{aligned} \tag{1.133}$$ lg-3

証明． 条件から $\varphi_x(a, b)$ か $\varphi_y(a, b)$ のいずれかは 0 と異るが，簡単のために $\varphi_y(a, b) \neq 0$ としてみる．このときには，陰関数定理 (定理 1.51) により 点 $\langle a, b\rangle$ の近傍 $U \subseteq D$ と $U_a = \{x \in \mathbb{R} :$ ある $y \in \mathbb{R}$ に対し $\langle x, y\rangle \in U\}$ 上の C^1 関数 $\psi : U_a \to \mathbb{R}$ で，

$$\text{すべての } \langle x, y\rangle \in V \text{ に対し，} \langle x, y\rangle \in C \;\Leftrightarrow\; y = \psi(x) \text{ となり，} \tag{1.134}$$ lg-4

$$\text{すべての } x \in U_a \text{ に対し，} \psi'(x) = -\frac{\varphi_x(x, \psi(x))}{\varphi_y(x, \psi(x))} \tag{1.135}$$ lg-5

となるようなものが存在する．特に，(1.134) から $\psi(a) = b$ なので，これを (1.135) に代入して，

$$\psi'(a) = -\frac{\varphi_x(a, b)}{\varphi_y(a, b)} \tag{1.136}$$ lg-5-0

である．

$\langle a, b\rangle$ で $f(x, y)$ が C 上での極値をとるなら，合成関数の微分法により，

$$0 = \frac{d}{dx}f(x, \psi(x))\bigg|_{x=a} = f_x(a, b) + \psi'(a)f_y(a, b) \tag{1.137}$$ lg-6

となるから，この式に (1.136) を代入して移項すると，

$$\varphi_y(a, b)f_x(a, b) = \varphi_x(a, b)f_y(a, b) \tag{1.138}$$ lg-7

となる．$\varphi_x(a, b) \neq 0$ のときには，$\lambda^* \in \mathbb{R}$ を $f_x(a, b) = \lambda^* \varphi_x(a, b)$ となるようにとると，

(1.139) $f_y(a,b)=\lambda^*\varphi_y(a,b)$ lg-7-a

となるから，$\langle a,b,\lambda^*\rangle$ は (1.133) の解となっている．

もし $\varphi_x(a,b)=0$ なら，(1.138) により，$\varphi_y(a,b)f_x(a,b)=0$ である．$\varphi_y(a,b)$ は仮定により 0 でないので，このことから $f_x(a,b)=0$ となることがわかる．したがって，この場合にも，$\lambda^*=0$ とすると，$\langle a,b,\lambda^*\rangle$ は (1.133) の解となっている． ❑ (定理 1.52)

上のような $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ に対して，3 変数の関数 $L:D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

(1.140) $\langle x,y,\lambda\rangle\in D\times\mathbb{R}$ に対し，$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ lg-7-0

とすることで導入する．L は Lagrangean と呼ばれる．

(1.141)
$$\frac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)-\lambda\varphi_x(x,y),\quad \frac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)-\lambda\varphi_y(x,y),\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)$$

だから，

定理 1.52 での条件 (1.132), (1.133) の組は，条件の組

(1.142)
$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0$$
lg-8

と同値である．したがって，定理 1.52 の主張は，以下と同値になる．

定理 1.53 (Lagrange の未定常数法の Lagrangean による書き換え)　領域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上の関数 f, φ を C^1-級とし， $\varphi(x,y)=0$ となる $\langle x,y\rangle\in D$ では $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$ の少なくとも片方は 0 と異るものとする．このとき $C=\{\langle x,y\rangle\in D:\varphi(x,y)=0\}$ 上で $f(x,y)$ の値が極値となるような点 $\langle a,b\rangle\in C$ は，L を f と φ に対応する Lagrangean (1.140) とするとき，ある定数 λ^* と共に T-lagrange-1

(1.143)
$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{\langle x,y,\lambda\rangle=\langle a,b,\lambda^*\rangle}=0$$
lg-w9

を満たす． ❑

1.15 Thomae 関数

thomae

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し，$Disc(f)=\{r\in\mathbb{R}: f$ は r で不連続$\}$ とする．

補題 1.54 (Thomae 関数) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で $Disc(f)=\mathbb{Q}$ となるものが存在する． T-thomae-0

証明． $x\in\mathbb{R}$ に対し，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x\in\mathbb{Q},\, q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\} \text{ で } x \text{ の既約表現が}\\ & \dfrac{p}{q} \text{ と書けるとき;}\\ 0, & \text{それ以外のとき}\end{cases}\tag{1.144}$$

として $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定義する．これが求めるようなものであることを示す．

Claim 1.54.1 すべての $r\in\mathbb{Q}$ に対し，f は r で連続でない．

$\vdash$ $r\in\mathbb{Q}$ とすると，f の定義から $f(r)>0$ だが，すべての r を含む開区間 I は無理数 s を (無限個) 含み，f の定義から $f(s)=0$ である． $\dashv$ (Claim 1.54.1)

Claim 1.54.2 すべての $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対し，f は r で連続である．

$\vdash$ $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ とすると，$f(r)=0$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$n\in\mathbb{N}$ を $0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ となるようにとる．$S=\{\dfrac{p}{q}: p,q\in\mathbb{N},\, 0<q<n\}$ とすると，Q は離散的だから，r を含む区間 I で $I\cap S\subseteq\{r\}$ となるものがとれる．f の定義から，すべての $s\in I\setminus\{r\}$ に対し，$0\le f(s)\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ である． $\dashv$ (Claim 1.54.2)

$\Box$ (補題 1.54)

$X\subseteq\mathbb{R}$ が閉集合であるとは，任意の $x\in\mathbb{R}\setminus X$ に対し，開区間 $I\subseteq\mathbb{R}$ で，$x\in I$ かつ $I\cap X=\emptyset$ となるものがとれることである．閉区間は閉集合である．閉区間の有限和も閉集合である．しかし閉区間の可算和は必ずしも閉集合とは限らない．たとえば，有界な開区間 I は，端点が閉集合の満たすべき性質の反例となっているから閉集合ではないが，a, $b\in\mathbb{R}$, $I=(a,b)$ として，$n\in\omega$ に対し，a_n, $b_n\in(a,b)$ を，$a_n<b_n$ で，$\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ となるものとし，$I_n=[a_n,b_n]$ とすれば，$(a,b)=\bigcup_{n\in\omega}I_n$ である．

$X\subseteq\mathbb{R}$ が F_σ-集合であるとは，X が可算個の閉集合の和として書けることである．上で示したようにすべての開区間は F_σ-集合である．

T-thomae-1

補題 1.55 (1) すべての $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し， $Disc(f)$ は $\mathbb{R}$ の F_σ-部分集合である．

(2): 任意の F_σ-集合 $S\subseteq\mathbb{R}$ に対し，$Disc(f)=S$ となるような関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する．

証明． (1): $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $a\in\mathbb{R}$ に対し，f の a での振動 (oscillation) を，

$$\begin{aligned}O_f(a)&=\lim_{\substack{a\,\in\, I,\\ I\text{ は開区間}}}\sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in I\}\\ &=\lim_{h\to 0^+}\sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in(a-h,a+h)\}\end{aligned}\tag{1.145}$$

thomae-0

とする．

$Disc(f)$ が F_σ であることは，次の 2 つの Claims から従う．

Cl-thomae-0

Claim 1.55.1 $Disc(f)=\{a\in\mathbb{R} : O_f(a)>0\}=\bigcup_{n\in\omega\setminus 1}\{a\in\mathbb{R} : O_f(a)\geq\frac{1}{n}\}$ である．

Cl-thomae-1

Claim 1.55.2 すべての $n\in\omega\setminus 1$ に対し，$C_n=\{a\in\mathbb{R} : O_f(a)\geq\dfrac{1}{n}\}$ は閉集合である．

$\vdash$ $b\in\overline{C_n}$ のとき，$b\in C_n$ となること示す．このためには，任意の $h>0$ に対し，

$$\sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in(b-h,b+h)\}\geq\frac{1}{n} \tag{1.146}$$

thomae-1

となることが言えればよい．

$h>0$ とすると，b の選び方により $a\in(b-\dfrac{h}{2},b+\dfrac{h}{2})\cap C_n$ がとれるが，C_n の定義から，$\sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in(a-\dfrac{h}{2},a+\dfrac{h}{2})\}>\dfrac{1}{n}$ である．$(a-\dfrac{h}{2},a+\dfrac{h}{2})\subseteq(b-h,b+h)$ だから，この h に対し，(1.146) が成り立つことがわかる． $\dashv$ (Claim 1.55.2)

(2): $S\subseteq\mathbb{R}$ を F_σ-集合として，$\langle A_n : n\in\omega\rangle$ を $S=\bigcup_{n\in\omega}A_n$ となる $\mathbb{R}$ の閉集合の列とする．このとき，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n_0}, & x\in S\cap\mathbb{Q}\text{ で，}\quad n_0=\min\{n\in\omega : x\in A_n\}\text{ のとき;}\\ -\dfrac{1}{n_0}, & x\in S\setminus\mathbb{Q}\text{ で，}\quad n_0=\min\{n\in\omega : x\in A_n\}\text{ のとき;}\\ 0, & \text{その他の場合}\end{cases} \tag{1.147}$$

thomae-1-0

とする．この f について，$Disc\,f=S$ となっていることを以下で示す:

Cl-thomae-2

Claim 1.55.3 $x_0\in S$ なら f は x_0 で連続でない．

$\vdash$ $f(x_0)=\dfrac{1}{n_0}$ とする．もし，x_0 を含むどの開区間 I も A_{n_0} の部分集合になっていないなら，そのような区間では，f は必ず，$T=\{\pm\dfrac{1}{m} : m\in\omega\setminus\{n_0,0\}\}\cup\{0\}$ の中の値をとる．$q_0=\min\{\left|\dfrac{1}{n-0}-q\right| : q\in T\}$ とすると $q_0>0$ だから，$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)$ となることはありえない．

もし x_0 を要素として含むある開区間 I_0 が A_{n_0} に含まれれば，x_0 を要素として含むどの I_0 の部分区間 I も，x_0 と異る A_{n_0} の有理数の要素も，無理数の要素を含むから，f の定義から f は I で $\{\dfrac{1}{n} : n\in n_0\setminus 1\}$ に含まれる値をとる点も，$\{-\dfrac{1}{n} : n\in n_0\setminus 1\}$ に含まれる値をとる点も存在する．これら 2 種類の値の差は $\dfrac{2}{n_0}$ 以上だから，この場合にも，$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)$ となることはありえない． $\dashv$ (Claim 1.55.3)

Cl-thomae-3

Claim 1.55.4 $x_0\in\mathbb{R}\setminus S$ なら，f は x_0 で連続である．

$\vdash$ f の定義から，$f(x_0)=0$ である．各 $k\in\omega$ に対し，$x\notin A_k$ だから， A_k が閉集合であることから，x_0 を要素として含む開区間 I_k で， $I_k\cap A_k=\emptyset$ となるものがとれる．

$n\in\omega\setminus 1$ に対し，$J_n=\bigcap_{k<n} I_k$ とすると，J_n は x_0 を含む開区間で，$J_n\subseteq(\mathbb{R}\setminus S)\cup\bigcup\{A_\ell : \ell\in\omega\setminus n\}$ となるから，f の定義から，$f''J_n\subseteq[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ である．このことから，$\lim_{x\to x_0} f(x)=0=f(x_0)$ がわかる． $\dashv$ (Claim 1.55.4)

❑ (補題 1.55)

T-thomae-2

系 1.56 $S\subseteq\mathbb{R}$ に対し以下は同値である:

(a) S は F_σ-集合である．

(b) $S=Disc(f)$ となる関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する．

証明． 補題 1.55, (1), (2) によりよい． ❑ (系 1.56)

T-thomae-3

系 1.57 $Disc(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ となる関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は存在しない．

証明． 系 1.56 により，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ が F_σ でないことが言えればよい．もし $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ が F_σ だったとすると閉集合の族 $\{A_n : n\in\omega\}$ で，$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in\omega} A_n$ となるものがあるが，各 A_n は $\mathbb{Q}$ と互いに素だから，nowhere dense であることがわかる[45)]．したがって，$\mathbb{R}$ は可算個の nowhere sense 集合の和集合として書けてしまうが，これは，ベールの範疇定理 (Baire Category Theorem) に矛盾である． ❑ (系 1.57)

45) つまりどの空でない開区間 I に対してもその空でない部分開区間 J で $J\cap A_n=\emptyset$ となるものがとれる．

2 線型代数

linalg

以下のテキストは，神戸大学の理学系や工学系の線型代数のテキストとして使っている長谷川 [1] の補足として書かれている．記号の使い方などは，概ね [1] に準ずるものとなっている．ただし，ここでは，自然数の全体 $\mathbb{N}$ は 0 を含むものとすること[46] とし，そのことに対応して自然数で添字をつけるときには 0 から始めることにする．特に，ベクトルの一番 “上” の成分は 0-成分と呼ぶことにし，行列の一番 “上” の行は 0-行，一番 “左” の列は 0-列と呼ぶことにする[47]．

集合（集合論ではない）に関する語彙は積極的に使うことにする．特に，自然数 n はそれより小さな自然数の集合として導入されているもの，とする．つまり $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ である．この記法を用いることのメリットの一つは，$\sum_{i=0}^{n-1}$ と書くかわりに，$\sum_{i\in n}$ と書け，$\sum_{i=k}^{n-1}$ と書くかわりに $\sum_{i\in n\setminus k}$ と書けることである[48]．

2.1 n-次元ベクトル空間とその部分空間

vector-sp

2.2 基底と次元

dimension

以下では，スカラー体 $\mathbb{R}$ 上の n-次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ とその部分空間が考察の対象となっているが，ここでの議論は，ほとんどすべて，任意の体[49] K 上の n-次元ベクトル空間 K^n について成り立つ．応用上は，とりあえずスカラー体 K として $\mathbb{C}$ の部分体（0 と 1 を含み加減乗除で閉じているような $\mathbb{C}$ の部分集合）を考えていれば十分であろう．

$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が **線型独立** とは，

(2.1) 任意の $c_0,...,c_{k-1} \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ なら， $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ となること， dim-a

とする．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトルである．

この定義は，

(2.2) $\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となるような $c_0,...,c_{k-1} \in \mathbb{R}$ は $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ に限る， dim-a-0

と表現したほうが理解しやすい日本語になるかもしれないが，線型独立性に関する数学的議論の中では，最初の書き方の方が自然に使える（たとえば以下の証明を参照）．この定義から，$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立なら，$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ はすべてゼロベクトル $\mathbf{0}$ と異なり，互いにも異ることがわかる（演習）．

(2.1) の否定は，

---

[46] つまり $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ である．

[47] このような添字の使い方は，多くのコンピュータ言語での行列（配列）の添字の扱いとも一致する．

[48] 集合 X, Y に対し，X と Y の集合差 $X \setminus Y$ は，$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$ と定義される．

[49] 四則演算が定義されて，それらの演算が $\mathbb{R}$ での四則演算と同様の計算則を満たすものを体 (field) という．

(2.3) ある $c_0,\ldots,c_{k-1} \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ だが，$c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$ ではない dim-a-0-0

である．あるいは，このことは，

(2.4) すべてが 0 ではないような，ある $c_0,\ldots,c_{k-1} \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となる dim-a-0-1

とも表現できるが，これが，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立でない，ということの意味である．

$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$c_0,\ldots,c_{k-1} \in \mathbb{R}$ として，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i$ の形の表現（および，このような表現のあらわす $\mathbb{R}^n$ の元）のことを，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ の **線型結合** (*linear combination*) とよぶのだった． $\mathbb{R}^n$ の元としての $\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i$ を区別する必要があるときには，これを線型結合 $\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i$ の値とよぶことにする．

$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ の線型結合 $\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i$ で，$c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$ となるもの（このような線型結合の値は当然ゼロベクトルとなる）のことを，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ の自明な線型結合とよぶことにすると，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立であることは，

(2.5) $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ の線型結合で，その値が $\mathbf{0}$ となるものは，自明な線型結合に限る dim-a-1

こと，と表現することもできる．また，この表現を使うと，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立でないのは，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ の自明でない線型結合で，その値が $\mathbf{0}$ となるものが存在することである，と言える．

lin-L-a

補題 2.1 $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ として，ある $\ell \le k$ と $0 \le i_0 < i_1 \cdots < i_{\ell-1} < k$ に対して，$\mathbf{a}_{i_0},\ldots,\mathbf{a}_{i_{\ell-1}}$ が線型独立でないなら，$\mathbf{a}_a,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ も線型独立でない．

証明． $\mathbf{a}_{i_0},\ldots,\mathbf{a}_{i_{\ell-1}}$ が線型独立でないなら，すべてが 0 でないような $c_{i_0},\ldots,c_{i_{\ell-1}} \in \mathbb{R}$ で，$\sum_{j<\ell} c_{i_j}\mathbf{a}_{i_j} = \mathbf{0}$ となるものが存在する．$i < k$ で $i = i_j$ となるような $j < \ell$ の存在しないものに対して $c_i = 0$ とすると，$\sum_{i<k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となるが，c_i, $i < k$ はすべては 0 ではないから，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ が線形独立でないことが示せた． ❑ (補題 2.1)

> $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立なら，任意の $\ell \le k$ と $0 \le i_0 < i_1 \cdots < i_{\ell-1} < k$ に対して，$\mathbf{a}_{i_0},\ldots,\mathbf{a}_{i_{\ell-1}}$ も線型独立である

という主張は上の補題と論理的に同値であることに注意する．

より一般的には，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が **線型独立** である，とは，

(2.6) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と，任意の互いに異る $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1} \in X$ に対し，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立となること X-lin-indep

とする．この定義から，空集合 $\emptyset$ は線型独立であることに注意する．一方 X が線型独立なら $\mathbf{0} \notin X$ である（演習）．この線型独立性の定義は，(2.1) による線型独立性の定義の拡張になっている:

lin-L-0

補題 2.2 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が空でない有限集合のとき，たとえば，$X = \{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}$ として（ただし，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ は互いに異るとする），$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立であることと，X が線型独立であることは同値である[50)]．

証明． X が (2.6) の意味で線型独立なら，この線型独立の定義から $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ は (2.5) の意味で線型独立である．

X が (2.6) の意味で線型独立でないなら，$\ell \leq k$ と $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{\ell-1} < k$ で，$\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_{\ell-1}}$ が ((2.5) の意味で) 線型独立でないようなものが存在する．このとき，補題 2.1 により，$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ も線形独立でない． □ (補題 2.2)

注意． 教科書 [1] では，「線型独立」ではなく **一次独立** という用語が用いられていた（講義では両方の用語を導入して主に「線型独立」という言い方を用いていた)．「線型独立」も「一次独立」も英語では共に “linearly independent”（名詞形では linear independence）である．また，[1] では，“一次独立” は上の定義ではなく，それと同値な以下の (2.7) により導入されていた．

lin-L-1

補題 2.3 $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは次と同値である:

(2.7) 任意の $c_0, ..., c_{k-1}, c'_0, ..., c'_{k-1} \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i \in k} c_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in n} c'_i \mathbf{a}_i$ なら，$c_i = c'_i$ がすべて $i \in k$ に対し成り立つ． dim-0

証明． $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であると仮定する．$c_0, ..., c_{k-1}, c'_0, ..., c'_{k-1} \in \mathbb{R}$ を，

$$\sum_{i \in k} c_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in k} c'_i \mathbf{a}_i \tag{2.8}$$ dim-1

が成り立つようなものとすると，(2.8) の右辺を移項して整理すると，

$$\sum_{i \in k} (c_i - c'_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \tag{2.9}$$ dim-2

となる．したがって，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ の線型独立性から，すべての $i \in k$ に対し $c_i - c'_i = 0$ つまり $c_i = c'_i$ となることがわかる．$c_0, ..., c_{k-1}, c'_0, ..., c'_{k-1}$ は (2.8) の成り立つような任意の $\mathbb{R}$ の元だったから，(2.7) が成り立つことが示せた．

逆に，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ に対して，(2.7) が成り立つと仮定してみる．このときには，$c_0, ..., c_{k-1} \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i \in k} c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となるなら，(2.7) で，$c'_0 = \cdots c'_{k-1} = 0$ とした場

---

50) 二つの主張（命題）A, B が同値である，とは，二つのに現れるパラメタ（ここでの命題では $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$）をどうとっても，$A$ と B の真偽が一致する，ということである．もう少し具体的には，パラメタをどのようにとっても，“A が成りたてば B が成り立つ” と “B が成りたてば A が成り立つ” の両方が言えることである．

ここで，“B が成りたてば A が成り立つ” はこの命題の対偶命題である “A が成り立たなければ B が成り立たない” と同値であるから，A と B が同値になることを示すには，“A が成りたてば B が成り立つ” と “A が成り立たなければ B が成り立たない” を示せばよいことがわかる．以下の証明では，この二つを任意の $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ に対して示している．

合を考えると，すべての $i \in k$ に対し，$c_i = 0$ となることがわかる[51)]．したがって，$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ は線形独立である． ❏ (補題 2.3)

$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，$[\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ で，$\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}$ から生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間をあらわすことにする．つまり，

$$(2.10)\quad [\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = \{\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i \,:\, c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}\}$$ dim-2-a

である．より一般的には，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ から生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $[X]_{\mathbb{R}^n}$ を，

$$(2.11)\quad [X]_{\mathbb{R}^n} = \{\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i \,:\, k \in \mathbb{N},\ c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in X\}$$ dim-2-a-0

とする．ただし，$k = 0$ のときの $\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i$ は $\mathbf{0}$ とすることにして，特殊な場合として，$[\emptyset]_{\mathbb{R}^n} = \{\mathbf{0}\}$ と考えることにする．ここに，$\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトルである．(2.10) と (2.11) は互いに抵触しないものになっていることに注意する．つまり次が成り立つ:

lin-L-1-a

補題 2.4 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ が有限集合のとき，$X = \{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}$ とすると，(2.11) による $[X]_{\mathbb{R}^n}$ と (2.10) による $[\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ は一致する．

証明． 演習． ❏ (補題 2.4)

上の記法を用いると，線型独立性は次のように特徴付けることもできる:

lin-L-1-0

補題 2.5 $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立となるのは，以下が成り立つことと同値である:

(2.12) すべての $i \in k$ に対し，$\mathbf{a}_i \notin [\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ が成り立つ． dim-2-0

証明． $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ が線型独立でなければ，$c_0, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ で，$[c_i] \neq \mathbf{0}$ だが[52)]，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となるものが存在する．このような組 $c_0, \ldots, c_{k-1}$ のうちの 1 つについて，$i_0 \in k$ を $c_i \neq 0$ となるような $i \in k$ のうち最大のものとすると，$\mathbf{a}_{i_0} = -\dfrac{1}{c_{i_0}}\sum_{i\in i_0} c_i\mathbf{a}_i$ となるから，$\mathbf{a}_{i_0} \in [\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{i_0-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ である．

逆に，ある $i_0 \in k$ に対し，$\mathbf{a}_{i_0} \in [\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{i_0-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ だったとすると，$c_0, \ldots, c_{i_0-1} \in \mathbb{R}$ で，$\mathbf{a}_{i_0} = \sum_{i\in i_0} c_i\mathbf{a}_i$ となるものが存在する．$c_{i_0} = -1$ として，$i \in k \setminus i_0 + 1$ に対しては，$c_i = 0$ とすれば，$c_{i_0} \neq 0$ により $[c_i] \neq \mathbf{0}$ だが，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ となる．したがって，$\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ は線型独立ではない． ❏ (補題 2.5)

lin-L-1-1

補題 2.6 $\mathbf{a}_0, , \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}'_0, \ldots, \mathbf{a}'_{k'-1}, \mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{\ell-1} \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，$[\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{a}'_0, \ldots, \mathbf{a}'_{k'-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ なら，

---

51) つまり，このときには，$\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0} = \sum_{i\in k} c'_i\mathbf{a}_i$ だから，(2.7) により，$c_0 = c'_0 = 0, \ldots,\ c_{k-1} = c'_{k-1} = 0$ である．

52) $[c_i]$ で 各 $i \in k$ に対し，c_i を i-成分とするベクトルを表わしている．したがって，$[c_i] \neq \mathbf{0}$ とは，「$c_i \neq 0$ となるような $i \in k$ が少なくとも 1 つは存在する」ということである．

$$[\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{a}'_0,...,\mathbf{a}'_{k'-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$$

である．

証明． $\mathbf{c} \in [\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ とすると，$c_0,...,c_{k-1},d_0,...,d_{\ell-1} \in \mathbb{R}$ で，$\mathbf{c} = \sum_{i<k} c_i\mathbf{a}_i + \sum_{j<\ell} d_j\mathbf{b}_j$ となるものがとれる．$\sum_{i<k} c_i\mathbf{a}_i \in [\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ で，仮定により $[\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{a}'_0,...,\mathbf{a}'_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ だから，$c'_0,...,c'_{k'-1} \in \mathbb{R}$ で，$\sum_{i<k} c_i\mathbf{a}_i = \sum_{i<k'} c'_i\mathbf{a}'_i$ となるものがとれる．したがって，$\mathbf{c} = \sum_{i<k'} c'_i\mathbf{a}'_i + \sum_{j<\ell} d_j\mathbf{b}_j$ で，$\mathbf{c} \in [\{\mathbf{a}'_0,...,\mathbf{a}'_{k'-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ である．

$\mathbf{c} \in [\{\mathbf{a}'_0,...,\mathbf{a}'_{k'-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ なら $\mathbf{c} \in [\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となることも同様に示せる． ❑ (補題 2.6)

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき，$\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1} \in W$ が **W の基底** (*basis*) **である**とは，$\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}$ は線形独立で，$W = [\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となること，とする．同様に $X \subseteq W$ が **W の基底** (*basis*) であるとは，X が線型独立で，$W = [X]_{\mathbb{R}^n}$ となること，とする．

補題 2.2 と補題 2.4 により，$X = \{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}\}$ のとき，$\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}$ が W の基底であることと X が W の基底であることは同値である．

補題 2.3 により，$\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}$ が W の基底であることは，

(2.13) W の各要素が $\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1}$ の線型結合として一意に表わせる dim-2-1

ことと同値である．

lin-E-0

例 2 $\mathbb{R}^n$ の **基本ベクトル** $\mathbf{e}_i^n$ $(i \in n)$ を

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \text{ 番目}$$

と定義する．このとき，$\mathbf{e}_0^n,...,\mathbf{e}_{n-1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である（演習）．

lin-L-2

補題 2.7 W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間として $\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1} \in W$ を線型独立とする．$\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}$ を W の基底とするとき，$0 \le i_k < i_{k+1} < \cdots < i_{m-1} < \ell$ をうまく選んで，$\{\mathbf{a}_0,...,\mathbf{a}_{k-1},\mathbf{b}_{i_k},...,\mathbf{b}_{i_{m-1}}\}$ が W の基底になるようにできる．

証明． $\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}$ は W の基底だから，

(2.14) $[\{\mathbf{b}_0,...,\mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = W$ dim-2-2

となることにまず注意しておく．

$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ がすでに W の基底となっているときには $m = 0$ とすればよい．

そうでないときには，$\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_{\ell-1}$ の中に $[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ に含まれないものがあるから[53)]，

(2.15) $\mathbf{b}_i \notin [\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となるような $i \in \ell$ のうち最小のものを i_k とする． dim-3

$i_k, ..., i_{j-1}$ がすでに選ばれたとき，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{j-1}}\}]_{\mathbb{R}^n} = W$ なら，$m = j$ として構成を終える．そうでなければ，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{j-1}}\}]_{\mathbb{R}^n} \subsetneqq W$ だから，(2.14) により（脚注 53) と同様の議論で），$\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_{\ell-1}$ のうちで $[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{j-1}}\}]_{\mathbb{R}^n}$ に含まれないものがあることが示せる．そこで，

(2.16) $\mathbf{b}_i \notin [\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{j-1}}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となるような $i \in \ell$ のうち最小のものを i_j とする． dim-4

この構成を続けると，ある $j < \ell$ ステップ目で，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{j-1}}\}]_{\mathbb{R}^n} = W$ となって，$m = j$ として，この帰納的構成が停止することがわかる．

ここで構成した，$i_k, ..., i_{m-1}$ が求めるようなものであることを示す．

dim-claim-0

Claim 2.7.1 $0 \leq i_k < i_{k+1} < \cdots < i_{m-1}$ である．

$\vdash$ $m \leq k+1$ のときには，不等式は自明に成り立つ $m > k+1$ として，この不等式が成り立たないとすると，$k \leq k_0 < k_1 < m$ で，$i_{k_1} < i_{k_0}$ となるものがとれる． i_{k_1} は (2.16) により選ばれているので，特に $\mathbf{b}_{i_{k-1}} \notin [\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{k_0-1}}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となるが，これは，(2.16) または (2.15) での i_{k_0} の最小性に矛盾である． $\dashv$ (Claim 2.7.1)

dim-claim-1

Claim 2.7.2 $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{m-1}}$ は線型独立である．

$\vdash$ $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ が独立であることと，補題 2.5, (2.15) と (2.16) により，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{m-1}}$ は (2.12) を満たす．したがって，再び 補題 2.5 により，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{i_k}, ..., \mathbf{b}_{i_{m-1}}$ は線型独立である． $\dashv$ (Claim 2.7.2)

❏ (補題 2.7)

lin-C-0

系 2.8 $\mathbb{R}^n$ の任意の線型独立な要素 $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の（有限個の要素からなる）基底に拡張できる．

証明． $\mathbf{e}^n_0, ..., \mathbf{e}^n_{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから， $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ と $\mathbf{e}^n_0, ..., \mathbf{e}^n_{n-1}$ に対して 補題 2.7 を適用すればよい． ❏ (系 2.8)

lin-L-3

補題 2.9 $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，$0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{m-1} < k$ で，

(2.17) $[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_{m-1}}\}]_{\mathbb{R}^n}$, かつ， dim-5

(2.18) $\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_{m-1}}$ は線型独立 dim-6

となるようなものが存在する．

証明． $i_0 = 0$ とする．$i_0, ..., i_j$ がすでに求まったとき，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_j}\}]_{\mathbb{R}^n}$ なら，$m = j+1$ として構成を終える．そうでなければ，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} \supsetneqq [\{\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_j}\}]_{\mathbb{R}^n}$ だから，$\mathbf{a}_i \notin [\{\mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_j}\}]_{\mathbb{R}^n}$ となるような $i \in k$ が存在するから，そのようなもののうち最小のものを i_{j+1} とする．この構成は高々 k ステップで終了し，そのときには，構成の定義から (2.17) が成立している．

Claim 2.7.1, Claim 2.7.2 と同様の議論で，ここで構成した $i_0, ..., i_{m-1}$ が求めるようなものになっていることが示せる． ❑ (補題 2.9)

次の 補題 2.10 は，[1], p.140 の補題に対応するものである．[1] での，この補題の証明により示すことができるが，[1] での議論の道筋では，$\mathbb{R}^n$ の部分空間が無限集合になっているような基底を持つ，という（実際にはあり得ないことが後で証明されるところの）可能性が処理しきれていない．この問題を選択公理を用いずに処理するためには[54)]，以下でのような議論の筋道が必要になってくる．

well-def-of-dim

補題 2.10 n を任意の自然数とする．ある自然数 k に対し，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になっているなら，$k = n$ が成り立つ．

証明． [1] の p.140 の補題の証明を参照． ❑ (補題 2.10)

lin-C-1

系 2.11 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間として，$X \subseteq W$ を線型独立とするとき，$|\,X\,| \leq n$ が成り立つ[55)]．

証明． 要素を n 個以上持つ W の基底 X があったとして矛盾を導く．$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_n \in X$ を互いに異る $n+1$ 個の X の要素とする．$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_n$ は線型独立だから，系 2.8 により，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_n$ は W の（有限個の要素からなる）基底 B に拡張できるが，B の要素の数は $n+1$ 大きいものになるから，補題 2.10 に矛盾である． ❑ (系 2.11)

正の自然数 n に対して，$\mathbb{R}^n$ には標準的な基底 $e^n_0, ..., e^n_{n-1}$ が存在するのだった．しかし，$\mathbb{R}^n$ のすべての部分空間が基底を持つかどうかは，よく考えてみると，それほど自明なことではない．選択公理を仮定すると，すべての線型空間は基底を持つことが証明できる

---

53) もし $\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_{\ell-1}$ がすべて $[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n}$ に含まれているとすると，(2.14) により，$W = [\{\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n} \subseteq [\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} \subseteq \mathbb{R}^n$ だから，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ が成り立つ．したがって，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ はすでに W の基底になっていることになり，仮定に矛盾である．

54) 一般の線型空間で基底や次元を議論するためには選択公理が必要である．さらに具体的に言うと，「すべての線型空間に基底が存在する」という主張は，集合論の他の公理上，選択公理と同値になることが知られている．ここでは，ある自然数 n に対する，$\mathbb{R}^n$ の部分空間という特別な形の線型空間に議論を制限しているため，選択公理なしで基底や次元の議論ができているのだが，そのことを明らかにするためには，実際に選択公理を用いずに議論を展開してみせる必要がある．

55) 集合 X に対し，$|\,X\,|$ で X の要素の個数をあらわす．

ため，これを仮定して議論していれば，基底の存在で悩む必要はないのだが， $\mathbb{R}^n$ の部分空間に関しては，選択公理の仮定なしで基底の存在が保証できる:

lin-C-2

系 2.12 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間として，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in W$ が線型独立のとき，$\mathbf{a}_0$, ..., $\mathbf{a}_{k-1}$ を拡張して W の基底を作ることができる．特に，W は基底を持つ．

証明. $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ を W の線型独立な要素とする．このとき，$\mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{m-1}$ を，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$, $\mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{m-1}$ が W の基底になるように，次のように帰納的に構成する: $\mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}$ が，$\mathbf{a}_0$, ..., $\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}$ が線型独立になるように，既に選ばれたとき，$[\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n} = W$ なら，$m = \ell$ として構成を終える．そうでなければ，

$$\mathbf{a}_\ell \in W \setminus [\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}\}]_{\mathbb{R}^n} \tag{2.19}$$ dim-8

となるように $\mathbf{a}_\ell$ をとる．仮定から，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}$ は線型独立だから，(2.19) と補題 2.5 により，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}, \mathbf{a}_\ell$ も線型独立である．系 2.11 により，この構成は n ステップ内の，あるステップ $m-1$ で停止する．このときには，構成の仕方から $[\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}]_{\mathbb{R}^n} = W$ が成立しており，したがって，$\{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}\}$ は W の基底である． □ (系 2.12)

lin-C-3

系 2.13 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間として，X と X' をそれぞれ W の基底とする．このとき X も X' も W の有限部分集合で， $|X| = |X'|$ が成り立つ．

証明. X と X' がともに W の有限部分集合になることは，系 2.11 によりよい．$X = \{\mathbf{a}_0$, ..., $\mathbf{a}_{k-1}\}$, $X' = \{\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{k'-1}\}$ で，$k < k'$ だったとして矛盾を導く．

系 2.8 により，$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}$ を拡張して $\mathbb{R}^n$ の基底 $\tilde{X} = \{\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}\}$ が得られる．ここで，$\tilde{X}' = \{\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{k'-1}, \mathbf{a}_k, ..., \mathbf{a}_{\ell-1}\}$ とすると，補題 2.6 と 補題 2.5 により，$\tilde{X}'$ は線型独立になる．したがって，$\tilde{X}'$ も $\mathbb{R}^n$ の基底になるが，$|\tilde{X}'| > |\tilde{X}|$ だから，これは 補題 2.10 に矛盾である． □ (系 2.13)

n をある自然数として，W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．このとき，系 2.12 により，W の基底 X が存在する．系 2.11 により，X は有限集合で，系 2.13 により，W のすべての基底の要素の数は $|X|$ と一致する．そこで $|X|$ を W の **次元** (*dimension*) とよび，$\dim(W)$ とあらわすことにする．例 2 により $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ である．

次の定理では $\mathbb{R}^n$ の部分空間が有限次元であることが本質的である．実際，無限次元の線型空間に対しては，次の (a) も (b) も，一般には成り立たない．

定理 2.14 ある自然数 n に対し W と W' を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．

(a) $W \subsetneqq W' \subseteq \mathbb{R}^n$ なら，$\dim(W) < \dim(W')$ が成り立つ．

(b) $X \subseteq W$ が線型独立で $|X| = \dim(W)$ なら，X は W の基底である．

証明. (a): X を W の基底とする．系 2.12 により X は W' の基底 X' に拡張できるが，$W \subsetneqq W'$ から X は W' の基底でないから，$X \subsetneqq X'$ である．X と X' は有限集合だから，このことから $\dim(W) = |X| < |X'| = \dim(W')$ がわかる．

(b): $X \subseteq W$ が線型独立なら，系 2.12 により X は W の基底 X' に拡張できるが，$|X'| = \dim(W)$ で，$\dim(W)$ は有限だから，$X = X'$ である．つまり X はすでに W の基底となっている． □ (定理 2.14)

2.3 線型写像の行列表現

matrix

以下では m, n は自然数とする．ただし m（または n）が 0 のときは，$\mathbb{R}^m$（または $\mathbb{R}^n$）は $\{0\}$ のこととする．区別をする必要があるときには，$\mathbb{R}^m$ のゼロベクトルを $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, $\mathbb{R}^n$ のゼロベクトルを $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ であらわすことにする．

写像 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が **線型写像** である，とは，すべての $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ と $a \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}); \tag{2.20}$$ lin-map-0

$$\varphi(a\mathbf{a}) = a\varphi(\mathbf{a}) \tag{2.21}$$ lin-map-1

が成り立つことである．

ここで，等式 (2.20) の左辺の + はベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の加法であるのに対し，この式の右辺の + はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ での加法であることに注意する．同様に等式 (2.21) の左辺の “a 倍” はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ でのものであるのに対し，この式の右辺での “a 倍” はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ での演算である．

このことを注意してもう一度線型写像の定義を見てみると，

> φ が $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像である，ということは，φ が $\mathbb{R}^m$ の加法と定数倍を保存しつつ $\mathbb{R}^m$ の要素を $\mathbb{R}^n$ に移すような写像になっていることである

と解釈することができることがわかる．特に φ が 1 対 1 写像のときには，φ は $\mathbb{R}^m$ の（加法と定数倍に関する構造を保つような）$\mathbb{R}^n$ への埋め込みになっている，と考えることができる．

lin-a-0

例 3 (1) すべての $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ に対し，$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ を対応させる写像は，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像である．

(2) $m \geq n > 0$ として，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に，$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を対応させる写像は，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像である．

(3) $m < n$ のとき，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に，$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ を対応させる写像は，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像である．

(4) $n, m > 0$ として，A を $n \times m$-行列とするとき[56]，$\varphi_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を，$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ に

[56] “$m \times n$” ではなく “$n \times m$” となっていることに注意する（誤殖ではない!!）．

対して $\varphi_A(\mathbf{a}) = A\mathbf{a}$（行列 A とベクトル $\mathbf{a}$ の積）となるものとして定義すると，φ_A は，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となる．

上の 例 3, (4) は本質的である : 実は，すべての線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が，ある $n \times m$-行列 A により φ_A として一意に表わせることを後で示す（補題 2.18 を参照）．

補題 2.15 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が線型写像で，$k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{k-1} \in \mathbb{R}^m$, $c_0, ..., c_{k-1} \in \mathbb{R}$ のとき， lin-a

$$\varphi(\sum_{i\in k} c_i\mathbf{a}_i) = \sum_{i\in k} c_i\varphi(\mathbf{a}_i)$$

が常に成り立つ．

証明． k に関する帰納法で示せる（演習）． ❏ (補題 2.15)

写像 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が線型写像のとき，φ の **核** (*kernel*) と **像** (*image*) をそれぞれ以下で定義する:

$$Ker(\varphi) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \,:\, \varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}; \tag{2.22}$$ lin-map-2

$$Im(\varphi) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a}) \text{ となる } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \text{ が存在する }\}. \tag{2.23}$$ lin-map-3

核も像も $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への（必ずしも線型写像ではない）任意の写像に対しても同様に定義できるが，φ が線型写像のときには，これらは特別な意味を持つ対象となる[57]:

補題 2.16 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を線型写像とする．このとき以下が成り立つ: lin-0

(1) $\varphi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ である．特に，$\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} \in Ker(\varphi)$, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \in Im(\varphi)$ が成り立つ．

(2) φ が 1 対 1 写像となるのは，$Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}\}$ となるちょうどそのときである．

(3) $Ker(\varphi)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である．

(4) $Im(\varphi)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

(5) (次元定理) $\dim(Ker(\varphi)) + \dim(Im(\varphi)) = m$ である．特に $\dim(Im(\varphi)) \le n$ だから，$\dim(Ker(\varphi)) \ge m - n$ が成り立つ．

証明． (1): $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = 0\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$（右辺は $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$ のゼロ倍）に注意すると，(2.21) により，

$$\varphi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}) = \varphi(0\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}) = 0\varphi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

である．

(2): φ が 1 対 1 写像なら，$Ker(\varphi)$ はただ 1 つの要素からなるから，(1) により，$Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}\}$ でなくてはならないことがわかる．

逆に $Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}\}$ だと仮定してみる．このとき，任意の $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}' \in \mathbb{R}^m$ に対し，$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}')$ とすると，(2.20) と (2.21) により，

[57] 集合論で通常使われる記号を用いると，$Ker(\varphi)$ と $Im(\varphi)$ はそれぞれ，$Ker(\varphi) = \varphi^{-1}[\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}]$, $Im(\varphi) = \varphi[\mathbb{R}^m]$ と表わすこともできる．ただし，ここで用いられている “φ^{-1}” は φ の逆対応（二項関係としての φ の逆を考えたもの）を表わしていて，必ずしも φ の逆写像ではない（φ が逆写像を持たないときにもこの記号を使う）ことに注意する．

$$\varphi(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{a}') = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$$

となるから，仮定により，$\mathbf{a}-\mathbf{a}' = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, したがって， $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ である．よって，φ は 1 対 1 である．

(3): 任意の $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in Ker(\varphi)$ と $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{a}_i \in Ker(\varphi)$ となることを示せばよいが，これは，

$$\varphi(\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{a}_i) = \sum_{i\in 2} c_i\varphi(\mathbf{a}_i) = \sum_{i\in 2} c_i\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

により成り立つ．

(4): 任意の $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in Im(\varphi)$ と，$c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ に対し，$\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{b}_i \in Im(\varphi)$ となることを示せばよい．

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \in Im(\varphi)$ により，$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^m$ で，$\mathbf{b}_0 = \varphi(\mathbf{a}_0), \mathbf{b}_1 = \varphi(\mathbf{a}_1)$ となるものがとれる．このとき，

$$\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{b}_i = \sum_{i\in 2} c_i\varphi(\mathbf{a}_i) = \varphi(\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{a}_i)$$

だから，$\sum_{i\in 2} c_i\mathbf{b}_i \in Im(\varphi)$ である．

(5): $\dim(Ker(\varphi)) = d_1$ として，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{d_1-1}$ を $Ker(\varphi)$ の基底とする．このとき，系 2.8 と 補題 2.10 により，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{d_1-1}$ の拡張 $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{d_1-1}, \mathbf{a}_{d_1},\ldots,\mathbf{a}_m$ で $\mathbb{R}^m$ の基底になっているようなものがとれる．$d_2 = m - d_1$ として，$\mathbf{b}_0 = \varphi(\mathbf{a}_{d_1}), \mathbf{b}_1 = \varphi(\mathbf{a}_{d_1+1}),\ldots, \mathbf{b}_{d_2-1} = \varphi(\mathbf{a}_{m-1})$ とする．$\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{d_2-1}$ が $Im(\varphi)$ の基底になっていることが示せれば十分である．

まず，$\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{d_2-1}$ の線型独立性を示す．もし $\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{d_2-1}$ が線型独立でなかったとすると，すべては 0 でない $c_0,\ldots,c_{d_2-1} \in \mathbb{R}$ で，$\sum_{i<d_2} c_i\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ となるようなものが存在する．補題 2.15 により，$\sum_{i<d_2} c_i\mathbf{b}_i = \sum_{i<d_2} c_i\varphi(\mathbf{a}_{d_1+i}) = \varphi(\sum_{i<d_2} c_i\mathbf{a}_{d_1+i})$ だから，$\sum_{i<d_2} c_i\mathbf{a}_{d_1+i} \in Ker(\varphi)$ となる．したがって，$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{d_1-1}$ の選び方から，$c'_0,\ldots,c'_{d_1-1} \in \mathbb{R}$ で，$\sum_{i<d_2} c_i\mathbf{a}_{d_1+i} = \sum_{j<d_1} c'_j\mathbf{a}_j$ となるものがある．したがって，$\sum_{j<d_1} c'_j\mathbf{a}_j - \sum_{i<d_2} c_i\mathbf{a}_{d_1+i} = \mathbf{0}$ となるが，$c_i, i<d_2$ は全部は 0 でないのだったから，これは，$\mathbf{a}_i, i<m$ の独立性に矛盾である．

あとは，$\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{d_2-1}$ が $Im(\varphi)$ を張ることを示せばよい．このためには任意の $\mathbf{b} \in Im(\varphi)$ が $\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{d_2-1}$ の線型結合としてあらわされることを示せばよい．$\mathbf{b} \in Im(\varphi)$ から，$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ で $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ となるものがとれる．$\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{m-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底だったから，$c_0, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$ で $\mathbf{a} = \sum_{i<n} c_i\mathbf{a}_i$ となるものがとれるが，このとき φ の線型性から，

$$\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\sum_{i<n} c_i\mathbf{a}_i) = \sum_{i<n} c_i\varphi(\mathbf{a}_i)$$

である．ここで，$\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{0}, i<d_1$ で，$\varphi(\mathbf{a}_{d_1+j}) = \mathbf{b}_j, j<d_2$ だから， $\mathbf{b} = \sum_{j<d_2} c_{d_1+j}\mathbf{b}_j$ である．

❑ (補題 2.16)

lin-1

補題 2.17 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を線型写像とする．$\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}$ を $\mathbb{R}^m$ の基底とするとき[58)]，

$$\varphi(\mathbf{a}_0) = \psi(\mathbf{a}_0), ..., \varphi(\mathbf{a}_{m-1}) = \psi(\mathbf{a}_{m-1}) \tag{2.24}$$ lin-map-4

なら，φ と ψ は等しい[59)]．

証明． $\mathbf{a}$ を $\mathbb{R}^m$ の任意の要素とするとき，$\varphi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{a})$ が成り立つことを示せばよい．これは次のようにして示せる: $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の基底だったから，$c_0, ..., c_{m-1} \in \mathbb{R}$ で $\mathbf{a} = \sum_{i \in m} c_i \mathbf{a}_i$ となるものがとれる．このとき，φ と ψ の線型性 (補題 2.15) と，(2.24) の仮定から，

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\sum_{i \in m} c_i \mathbf{a}_i) = \sum_{i \in m} c_i \varphi(\mathbf{a}_i) = \sum_{i \in m} c_i \psi(\mathbf{a}_i) = \psi(\sum_{i \in m} c_i \mathbf{a}_i) = \psi(\mathbf{a})$$

が成り立つ． □ (補題 2.17)

任意の線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ に対し，$\mathbf{a}_j = \varphi(\mathbf{e}_j^m)$ $(j < m)$ として，$M_\varphi = [\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}]$ とする．M_φ は $n \times m$-行列である．

$n \times m$-行列 M に対し，線型写像 $\varphi_M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を $\varphi_M(\mathbf{a}) = M\mathbf{a}$ で定義するのだった（$M\mathbf{a}$ は $n \times m$-行列 M と m-次元ベクトル $\mathbf{a}$ の積である）．

lin-2

補題 2.18 (1) $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を任意の線型写像とするとき，$\varphi_{M_\varphi} = \varphi$ である．特に，M_φ は，$\varphi_A = \varphi$ となるような唯一の $n \times m$ 行列 A である．

(2) A を任意の $n \times m$-行列とするとき，$M_{\varphi_A} = A$ である．特に，φ_A は，$M_\varphi = A$ となるような唯一の $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像である．

証明． (1): $j < m$ に対し，$\varphi_{M_\varphi}(\mathbf{e}_j^m) = M_\varphi \mathbf{e}_j^m = [\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}]\mathbf{e}_j^m = \mathbf{a}_j = \varphi(\mathbf{e}_j^m)$ である．したがって，補題 2.17 により，$\varphi_{M_\varphi} = \varphi$ が示せた．

M_φ の一意性の証明には，二つの異る $n \times m$-行列 A, B に対して $\varphi_A \neq \varphi_B$ が常に成り立つこをが示せれば十分である．$A = [\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}]$, $B = [\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_{m-1}]$ として， $A \neq B$ なら，$j^* < m$ で，$\mathbf{a}_{j^*} \neq \mathbf{b}_{j^*}$ となるものが存在するが，このとき，

$$\varphi_A(\mathbf{e}_{j^*}^m) = A\mathbf{e}_{j^*}^m = \mathbf{a}_{j^*} \neq \mathbf{b}_{j^*} = B\mathbf{e}_{j^*}^m = \varphi_B(\mathbf{e}_{j^*}^m)$$

となるから，$\varphi_A \neq \varphi_B$ である．

(2): $A = [\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{m-1}]$ として，$M_{\varphi_A} = [\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{m-1}]$ とすると，M_{φ_A} の定義から，$j < m$ に対し $\mathbf{a}'_j = \varphi_A(\mathbf{e}_j^m) = A\mathbf{e}_j^m = \mathbf{a}_j$ である．したがって，$A = M_{\varphi_A}$ となることがわかる．

[58)] 補題 2.10 により，$\mathbb{R}^m$ の任意の基底は m 個のベクトルからなる．

[59)] 2 つの写像 f, g が等しいとは，f と g の定義域が等しく，定義域のすべての要素 x について $f(x) = g(x)$ が成り立つことである（このことは写像の概念の（厳密な）定義から導ける）．

φ_A の一意性の証明ためには，φ, ψ を異る $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像とするとき，$\varphi \neq \psi$ なら，$M_\varphi \neq M_\psi$ となることが示せればよい．$\varphi \neq \psi$ とすると，補題 2.17 により，$j^* < m$ で，$\varphi(\mathbf{e}^m_{j^*}) \neq \psi(\mathbf{e}^m_{j^*})$ となるものがとれる．このとき，

$$M_\varphi = [\varphi(\mathbf{e}^m_0), ..., \varphi(\mathbf{e}^m_{j^*}), ..., \varphi(\mathbf{e}^m_{m-1})] \neq [\psi\mathbf{e}^m_0), ..., \psi(\mathbf{e}^m_{j^*}), ..., \psi(\mathbf{e}^m_{m-1})] = M_\psi$$

である． ❑ (補題 2.18)

写像 $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ の合成を $\psi \circ \varphi$ であらわすことにする．$\psi \circ \varphi : A \to Z$ で，$x \in X$ に対し，$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ である．

lin-2-0

補題 2.19 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ を線型写像とするとき，$\psi \circ \varphi$ も線型写像である．

証明． 演習． ❑ (補題 2.19)

対応 $A \mapsto \varphi_A$ は，行列の積と線型写像の合成を対応させるものになっている．

lin-2-1

補題 2.20 A を $\ell \times m$-行列，B を $m \times n$-行列とするとき，$\varphi_{AB}, \varphi_A \circ \varphi_B$ はともに $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^\ell$ への線型写像だが，さらに $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ が成り立つ．

証明． 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\varphi_{AB}(\mathbf{a}) = (AB)\mathbf{a} = A(B\mathbf{a}) = A\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_A(\varphi_B(\mathbf{a})) = \varphi_A \circ \varphi_B(\mathbf{a})$ である． ❑ (補題 2.20)

2.4 連立方程式の解の全体の構造

sytem-of-eqs

前節までに導入した用語や結果を連立一次方程式の解の全体の構造に関して適用すると，次が分る:

eq-system

定理 2.21 A を $n \times m$-行列として，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ を考える，ここに $\mathbf{x}$ は m 個の変数 $x_0,...,x_{m-1}$ を成分とするベクトルで $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ である．このとき:

(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ に対応する斉次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の全体 L_0 は $Ker(\varphi_A)$ と一致する．したがって，補題 2.16, (3) により，L_0 は $\mathbb{R}^m$ の部分空間で，補題 2.16, (5) により，$\dim(L_0) \geq m - n$ である．

(2) $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解を持つのは，$\mathbf{c} \in Im(\varphi_A)$ となるちょうどそのときである．このときには，$\mathbf{a}$ をこの連立方程式の解の一つとすれば，$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ の解の全体を L とすると

$$L = L_0 + \mathbf{a} = \{\mathbf{b} + \mathbf{a} : \mathbf{b} \in L_0\} \tag{2.25}$$ lin-3

である．特に $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ が解を持てば，解の一般解は，m 個以下 $m - n$ 個以上のパラメタを持つものとなる． ❑

証明． (2.25) を示せば，残りは前に述べたことから明らかである．

$\mathbf{d} \in L_0 + \mathbf{a}$ とすれば，$\mathbf{b} \in L_0$ で $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ となるものがあるが，$A\mathbf{b} = \mathbf{0}$ だから，$A\mathbf{d} = A(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = A\mathbf{b} + A\mathbf{a} = \vec{0} + A\mathbf{a} = A\mathbf{a} = \mathbf{c}$ となり $\mathbf{d}$ も $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ の解である，つまり $\mathbf{d} \in L$ であることがわかる．

逆に $\mathbf{d} \in L$ とすると，$\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ として $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ だが，このとき $A\mathbf{b} = A(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = A\mathbf{d} - A\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ となるから，$\mathbf{b}$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で，つまり $\mathbf{b} \in L_0$ となり，$\mathbf{d} \in L_0 + \mathbf{a}$ がわかる． ❏ (定理 2.21)

References

[1] 長谷川 浩司，線型代数，日本評論社 (2004).

3 確率と統計

statistics

3.1 付値の和の期待値

expected-value

次の演習問題とその解答を見てください:

coins

演習問題 3.1 10 円硬貨が 7 枚，50 円硬貨が 5 枚，100 円硬貨が 8 枚ある．これらの中から無作為に[60] 3 枚取り出すとき，それらの金額の和の期待値を求めよ。

解答: 上のような貨幣の全体から硬貨を無作為に 1 枚取り出すときの金額の期待値は，

$$\frac{10\times 7+50\times 5+100\times 8}{7+5+8}=56$$

だから，この貨幣の全体から硬貨を無作為に 3 枚取り出したときの金額の期待値は，$56\times 3=168$ である． ❏

上の議論は本当に正しいのでしょうか？ 特に脳天気に 3 倍しているところなど，本当にこれでいいのか不安です．しかし，この計算で得られる答え自身は正しいのです．そこで，以下で，上の計算がなぜ正しい答を導くのかを見てみようと思います．

まず，上の論法をほぼそのまま正当化することを試みてみましょう．そのために，次のような一般的な定理を用意しておきます（証明は，たとえば，[小寺平治:ゼロから学ぶ統計解析] の p.65 を参照）:

定理 3.2 $X_0,\ldots,X_{n-1}$ を確率変数とする．$a_0,\ldots,a_{n-1}$ を実数とするとき，

$$E(a_0X_0+\cdots a_{n-1}X_{n-1})=a_0E(X_0)+\cdots+a_{n-1}E(X_{n-1}) \tag{3.1}$$

p-0

が成り立つ．ただし，$E(\cdots)$ で確率変数 $\cdots$ の期待値 (expected value) をあらわす．

ここで，「確率変数とは測定（あるいは観測）をすると実数値が返ってくるようなもの」のことだと思ってください．たとえば上の例では，「10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 8 枚から中から無作為に三枚とり出したときの一枚目の硬貨の金額」を確率変数ととらえることができます．一方 $a_0X_0+\cdots+a_{n-1}X_{n-1}$ は X_0 の返した値の a_0 倍，...，X_{n-1} の返した値の a_{n-1} 倍を全部足して得られる値を返す確率変数のことです．

簡単のために，a_i, $i\in I$ というとびとびの値をとる確率変数 X を考えることにして，X が値 a_i を返す確率が p_i とすると，X の期待値は，$\displaystyle\sum_{i\in I}a_ip_i$ で定義されます．

[60] ここでは「無作為」とは “randomly” の訳語として使っています．無作為という単語は難しすぎると判断されたためか高校の教科書には出ていないようです．ようするに「でたらめに」ということですが，どうもこの「でたらめ」という言葉も高校の教科書では使われていないようです．多分「でたらめ」のネガティヴな響きを嫌った結果だのだろうと思うのですが，科学では，日常語のしがらみをたちきって思いきった言葉の使い方をする，ということがぜひとも必要なのです．日常語の「でたらめ」には，作為的にでたらめをする，という意味も含まれているので，誤解をまねく可能性ももちろんあるわけですが，それにもかかわらず，このようなビビッドな日本語を何かのガイドラインのようなもので教科書から締め出してしまうのはやはり問題のような気がします．

上の定理で注意したいのは，$X_0,\ldots,X_{n-1}$ の間の関係如何によらず (3.1) が成り立つということです．

さて，定理 3.2 を用いて上の問題を再考してみましょう．X_0, X_1, X_2 をそれぞれ「10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 8 枚から中から無作為に三枚とり出したときの一枚目の硬貨の金額」,「10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 8 枚から中から無作為に三枚とり出したときの二枚目の硬貨の金額」,「10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 8 枚から中から無作為に三枚とり出したときの三枚目の硬貨の金額」を返す確率変数とします．このとき，$E(X_0+X_1+X_2)$ が求める期待値となります．定理 3.2 により $E(X_0+X_1+X_2)=E(X_0)+E(X_1)+E(X_2)$ です．ところが，各 X_i, $i=0,1,2$ の期待値 $E(X_i)$ はそれぞれ 56 だから，$E(X_0+X_1+X_2)=56\times 3=168$ となる．

さて，これで一件落着のように見えますが，ごく厳密には，上で「各 X_i, $i=0,1,2$ の期待値 $E(X_i)$ はそれぞれ 56 だから」と言ったところで，まだ問題が残っています．「10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 5 枚，100 円硬貨 8 枚から中から無作為に一枚とり出したときの一枚目の硬貨の金額」を与える確率変数だったら期待値が 56 になることは明らかですが，三枚とったうちの一枚の期待値がこれと同じ値になる，というのは，直観的には正しそうに思えても，それ以上の保証がないようにも思えるからです．この点を厳密な議論でうめることも，もちろんできますが，ここでは，新しくアプローチしなおして，演習問題 3.1 の一般化となっている，次の命題を直接証明することを試みてみることにします:

定理 3.3 ある対象 $o_0,\ldots,o_{n-1}$ を考える．各 o_k $(0\le k<n)$ には値 a_k が付されているとする．$o_0,\ldots,o_{n-1}$ から m 個（ただし $m\le n$）を無作為に取り出すとき，それらの値の和の期待値は，$\dfrac{m}{n}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_k$ である．

演習問題 3.1 は，上の定理で，たとえば，$n=7+5+8=20$, $m=3$, $o_0,\ldots,o_6$ は 10 円硬貨，o_7, $\ldots,o_{11}$ は 50 円硬貨，$o_{12},\ldots,o_{19}$ は 100 円硬貨として，$a_0=\cdots a_6=10$, $a_7=\cdots=a_{11}=50$, $a_{12}=\cdots a_{19}=100$ としたときの定理による期待値:

$$\frac{3}{20}\sum_{k=0}^{19}a_k=\frac{3}{20}\Big(\underbrace{10+\cdots+10}_{7\text{ 個}}+\underbrace{50+\cdots+50}_{5\text{ 個}}+\underbrace{100+\cdots+100}_{8\text{ 個}}\Big)$$

と一致します．

この定理の証明は次のようにして行うことができます．まず，

$$I=\{Y\,:\,Y\subseteq\{0,1,\ldots,n-1\},\ |\,Y\,|=m\}$$

とします．ただし $|\,Y\,|$ で集合 Y の要素の個数をあらわします．つまり，I は $\{0,1,\ldots,n-1\}$ から m 個の要素を集めてできる集合のすべてを集めてできる集合となっています．$|\,I\,|={}_nC_m$ に注意します．このとき，$o_0,\ldots,o_{n-1}$ から m 個選ぶ選び方は

$$\{o_k\,:\,k\in Y\},\ Y\in I$$

と列挙でき，これらはすべて同じ確率で選ばれるとすると，それらの一つが選ばれる確率は $\dfrac{1}{{}_nC_m}$ となることがわかります．$\{o_k : k \in Y\}$ が選ばれたときの値の和は，$\displaystyle\sum_{k\in Y} a_k$ とあらわせるので，問題となっている期待値は，

$$\sum_{Y\in I}\left(\frac{1}{{}_nC_m}\left(\sum_{k\in Y} a_k\right)\right) = \frac{1}{{}_nC_m}\left(\sum_{Y\in I}\sum_{k\in Y} a_k\right) \tag{3.2}$$ p-1

となることがわかります．この式の右辺をよく見ると，$\displaystyle\sum_{Y\in I}\sum_{k\in Y} a_k$ のところは，各 a_k をそれぞれ ${}_{n-1}C_{m-1}$ 個足しあわせたの和になっていることがわかります．つまり

$$\begin{aligned}(3.2) &= \frac{1}{{}_nC_m}\cdot {}_{n-1}C_{m-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{m!(n-m)!}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a_k\\ &= \frac{m}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a_k\end{aligned}$$

となることがわかり，定理が証明されました． ❑ (定理 3.3)

上の定理からわかることの一つは，$o_0, \dots, o_{n-1}$ から m 個順にとり出していったときのそれぞれの値の和の期待値も，m 回とりだして戻すことを繰り返したときのそれぞれの値の和の期待値も同じになる，ということですが，直観的には，これはなんとなく不思議な気がします[61)]．

3.2 ポアソン分布

poison

ある $m > 0$ に対し，確率変数 X が，

$$P(X = k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m},\ \ k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.3}$$ poisson-0

を満たすとき，X はポアソン分布 (Poisson[62)] distribution) $Po(m)$ に従う，という．ポアソン分布 $Po(m)$ に従う確率変数は，

(3.4) 単位時間あたりの平均発生回数が m の事象で， poisson-1

(∗) それぞれの時刻での，この事象の発生（または非発生）が他の時刻での，この事象の発生（または非発生）と独立である

ようなものについて，その事象が（ある測定での）単位時間内に起る回数を返す

61) ここで書いたような考察は，「うるさい」と感じる人も多いのではないかと思います．確かに，数学的能力の十分にある人は，最初に解答としてあげた説明を読めば，自動的に，その後に書いたことに対応する数学的内容を頭の中で補間して，次に進むことができるはずです．また，それのできない人はいずれにしても数学は分らないのだから説明しても無駄だ，という議論も成立するのかもしれません．

62) Siméon-Denis Poisson (1781–1840) (発音は “プワソン” の方が原音に近い) フランスの物理学者，数学者．音響学，剛体の弾性，熱伝導，電気伝導などに関する仕事がある．

ものになっていると考えられる．このことを念頭に置くと，ポアソン分布の次のようなタイプの応用が考えられる:

例 4 ある国で 1000 年の間に歴史上の大地震が 73 回起っている．大地震の起る回数がポアソン分布に従うと仮定して計算すると，この国での一年間の大地震の平均回数は，$\dfrac{73}{1000} = 0.073$ と考えられるから，この国である年に大地震が起る回数を与える確率変数を X として，2005 年にここで大地震が起る確率は，

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{0.073^0 \cdot e^{-0.073}}{0!} = 0.07039\cdots$$

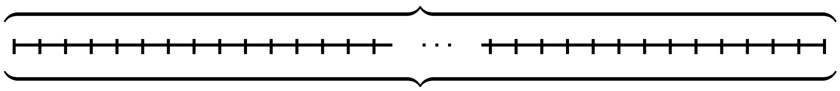
となる．

上の応用例では，地震の発生の状況が時間変化しないことと，発生が (3.4) での $(*)$ を満たしていると仮定してよいかどうかが，ポアソン分布をこの問題に応用するのが妥当かどうかを評価する際のポイントになるであろう．地震の研究がご専門の中部大学理学教室の工藤健先生によると，地震の発生回数の分布がポアソン分布によく合致する地域もある，ということである．

以下で，(3.4) の分布が，なぜ (3.3) の式で与えられると考えられるかを考察する．

今，単位時間を n 個の微小時間のセル (細胞) に等分することを考える:

単位時間



n 個のセルへの分割

n は十分に大きくとってあり，一つ一つの微小時間のセル内で，ここで考えている事象が 2 回以上起る確率は無視できるものとする．このとき，各セル内で，この事象が発生する確率は，$p = \dfrac{m}{n}$ と考えられる．(3.4), $(*)$ により，それぞれのセル内で事象が起るかどうかは，他のセル内で事象が起るかどうかとは独立と考えられるから，事象が起った微小時間のセルの個数 $\approx$ 単位時間内に事象の起った回数は二項分布 $Bin(n,p)$ に従うと考えられる．したがって，このような事象がちょうど k 個のセルで起きる確率は ${}_nC_k \cdot p^k(1-p)^{n-k}$ で与えられる．この値が，(3.4) のような分布を持つ確率変数 X の $P(X=k)$ の値の近似となっていると考えられるが，この近似は n を大きくするほど精度が上るので，

$$P(X = k) = \lim_{n\to\infty}\left({}_nC_k \cdot p^k(1-p)^{n-k}\right)$$

とすればよいことがわかる．ところが，この右辺は $\dfrac{m^k}{k!}e^{-m}$ に一致する:

命題 3.4 $m > 0$ として，$k \in \mathbb{N}$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left({}_nC_k \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}\right) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

が成り立つ．

証明.

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} $$

だった．このことと，数列の積の極限は各々の数列の極限の積と一致することから，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left({}_nC_k \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n} \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{-k}\right) \\
&= \frac{m^k}{k!} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n}}_{=e^{-m}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-k}}_{=1} \\
&= \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}
\end{aligned}
$$

となる．上式の最後の等号のところでは，以下のような部分計算 (1), (2), (3) が用いられている:

(1):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot,\ldots\ \cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot,\ldots\ \cdot 2\cdot 1}{\underbrace{n\cdot,\ldots\ \cdot n}_{k\text{ コ}}\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot,\ldots\ \cdot 2\cdot 1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot,\ldots\ \cdot(n-k+1)}{\underbrace{n\cdot,\ldots\ \cdot n}_{k\text{ コ}}} = 1
\end{aligned}
$$

(2): e が，

$$ e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} $$

と表わせることと，任意の α に対し，関数 $x \mapsto x^\alpha$ が連続であること（ここでは $\alpha = -m$ を考える）を用いる．

今，$h = -\dfrac{m}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ なら $h\to 0$ だから，

$$ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{m}{h}} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{-m} = \left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^{-m} = e^{-m} $$

である．

(3): (2) と同様に，関数 $x \mapsto x^\alpha$ の連続性から，

$$ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-k} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)\right)^{-k} = 1^{-k} = 1 $$

である． □ (命題 3.4)

3.3 Chebyshev の定理と大数の法則

Chebyshev

X を確率変数として，$\varphi(x)$ を X の確率密度関数とする．つまり，可測集合 $D \subseteq \mathbb{R}$ に対し，X の返す値が D に入っている確率 $P(X \in D)$ は，

$$P(X \in D) = \int_D \varphi(x)dx \tag{3.5}$$ random-2

となる．

$E(X)$ で X の期待値を，$V(X)$ で X の分散をあらわす．

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx \tag{3.6}$$ random-0

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 - E(X)\right)^2 \varphi(x)dx \tag{3.7}$$ random-1

である．

$f(x)$ を（$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への）可測関数するとき，$f(X)$ で X と共時的な確率変数で，試行したとき X の返した値が x のとき $f(x)$ を返すようなものをあらわすことにする．

これは，理論的な枠組の中では，$f(X)$ を，すべての可測な $T \subseteq \mathbb{R}$ に対して

$$P(Y \in T) = P(X \in f^{-1}{''}T) \tag{3.8}$$ random-3

となるような（確率密度関数を持つ），確率変数 Y とする，ということである．このとき，

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{3.9}$$ random-4

となる．

Che-0

補題 3.5 X を確率変数とするとき，

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

が成り立つ．

証明． $\varphi(x)$ を X の確率密度関数とすると，

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 - 2E(X)x + (E(X))^2\right) \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx - 2E(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx}_{=E(X)} + (E(x))^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx}_{=1} \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

❑ (補題 3.5)

定理 3.6 (P. L. Chebyshev) X を確率変数とするとき，任意の $c > 0$ に対し， cheby-0

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq V(X)/c^2$$

が成り立つ．余事象に翻訳すると，

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - V(X)/c^2$$

である．

証明. $\varphi(x)$ を X の確率密度関数とする．このとき，

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2\varphi(x)dx \\
&= \int_{E(X)-c}^{E(X)+c}(x - E(X))^2\varphi(x)dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{E(X)-c}(x - E(X))^2\varphi(x)dx + \int_{E(X)+c}^{\infty}(x - E(X))^2\varphi(x)dx \\
&\geq \int_{-\infty}^{E(X)-c}(x - E(X))^2\varphi(x)dx + \int_{E(X)+c}^{\infty}(x - E(X))^2\varphi(x)dx \\
&\geq \int_{-\infty}^{E(X)-c}c^2\varphi(x)dx + \int_{E(X)+c}^{\infty}c^2\varphi(x)dx \\
&= c^2P(|X - E(X)| \geq c)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

chebyshev-0

となるから，この両辺を c^2 で割ると求める不等式が得られる． ❑ (定理 3.6)

random-5

補題 3.7 X_1 と X_2 を共時的な確率変数として，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を定数とする．このとき
(1) $E(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2)$ が成り立つ．
(2) X_1 と X_2 が独立なら，$V(c_1X_1 + c_2X_2) = (c_1)^2V(X_1) + (c_2)^2V(X_2)$ が成り立つ．

証明. $\psi(x_1, x_2)$ を X_1 と X_2 の同時確率密度関数として，$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)$ をそれぞれ X_1 と X_2 の周辺確率密度関数とする．

$$\varphi_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_1, x_2)dx_2, \qquad \varphi_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_1, x_2)dx_1$$

である．このとき，

(1)

$$\begin{aligned}
E(c_1X_1 + c_2X_2) &= \iint_{\mathbb{R}^2}(c_1x_1 + c_2x_2)\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= c_1\iint_{\mathbb{R}^2}x_1\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2 + c_2\iint_{\mathbb{R}^2}x_2\psi(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= c_1\int_{-\infty}^{\infty}x_1\varphi_1(x_1)dx_1 + c_2\int_{-\infty}^{\infty}x_2\varphi_2(x_2)x_2 \\
&= c_1E(X_1) + c_2E(X_2).
\end{aligned}$$

(2) 仮定から $\psi(x_1,x_2)=\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$ である．したがって，(1) を使うと，

$$
\begin{aligned}
V(c_1X_1+c_2X_2) &= \iint_{\mathbb{R}^2}\left(c_1x_1+c_2x_2-E(c_1X_1+c_2X_2)\right)^2\psi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2}\left(c_1x_1+c_2x_2-(c_1E(X_1)+c_2E(X_2))\right)^2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2}(c_1x_1)^2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2+\iint_{\mathbb{R}^2}(c_2x_2)^2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad+\iint_{\mathbb{R}^2}(c_1E(X_1))^2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2+\iint_{\mathbb{R}^2}(c_2E(X_2))^2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad+\iint_{\mathbb{R}^2}2c_1c_2x_1x_2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad+\iint_{\mathbb{R}^2}2c_1c_2E(X_1)E(X_2)\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad-\iint_{\mathbb{R}^2}2c_1c_2x_1E(X_2)\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad-\iint_{\mathbb{R}^2}2c_1c_2E(X_1)x_2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad-\iint_{\mathbb{R}^2}2(c_1)^2E(X_1)x_1\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&\quad-\iint_{\mathbb{R}^2}2(c_2)^2E(X_2)x_2\varphi_1(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2\\
&= (c_1)^2E((X_1)^2)+(c_2)^2E((X_2)^2)\\
&\quad+(c_1)^2(E(X_1))^2+(c_2)^2(E(X_2))^2\\
&\quad+2c_1c_2E(X_1)E(X_2)\\
&\quad+2c_1c_2E(X_1)E(X_2)\\
&\quad-2c_1c_2E(X_1)E(X_2)\\
&\quad-2c_1c_2E(X_1)E(X_2)\\
&\quad-2(c_1)^2(E(X_1))^2\\
&\quad-2(c_2)^2(E(X_2))^2\\
&= \left((c_1)^2E((X_1)^2)-(c_1)^2(E(X_1))^2\right)\;+\;\left((c_2)^2E((X_2)^2)-(c_2)^2(E(X_2))^2\right)\\
&= (c_1)^2V(X_1)+(c_2)^2V(X_2).
\end{aligned}
$$

□ (補題 3.7)

定理 3.8 (大数の法則) X_1, X_2, $X_3\ldots$ を，独立な，同じ確率分布を持つ確率変数で $\mu=E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=\cdots$, $\sigma^2=V(X_1)=V(X_2)=V(X_3)=\cdots$ とする． cheby-1

$$\bar{X}_{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$$

とするとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty}P(|\bar{X}_{(n)}-\mu|\leq\varepsilon)=1$$

が成り立つ．

証明.　補題 3.7, (1) により，$E(\bar{X}_{(n)}) = \mu$ である．一方，補題 3.7, (2) により，$V(\bar{X}_{(n)}) = \dfrac{1}{n}\sigma^2$ である．

　したがって Chebyshev の定理（定理 3.6）により，

$$P(|\bar{X}_{(n)} - \mu| \leq \varepsilon) = P(|\bar{X}_{(n)} - E(\bar{X}_{(n)})| \leq \varepsilon) \geq 1 - V(\bar{X}_{(n)})/\varepsilon^2 = 1 - \frac{1}{n}\sigma^2/\varepsilon^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

である．　□ (定理 3.8)

3.4 正規分布と Kurtosis

kurtosis

正規分布の密度関数 (probability density function, pdf) の正規化のための積分計算:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} dx\right)^2 &= \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{x^2+y^2}{a}} dx\, dy \\ &= \lim_{s\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{s} e^{-\frac{r^2}{a}} r\, dr\, d\theta \\ &= \lim_{s\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{a}{2}e^{-\frac{r^2}{a}}\right]_{r=0}^{s} d\theta \\ &= \pi a\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} dx = \sqrt{\pi a}$$

である．

x を密度関数 $\dfrac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}}$ を持つ確率変数とする．このとき，密度関数の対称性から $E(x) = 0$ だから，

$$\begin{aligned}Var(x) &= E((x-E(x))^2) = E(x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(-\frac{a}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\left(\left[-\frac{a}{2}\cdot x e^{-\frac{x^2}{a}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}}\, dx\right) \qquad \text{(部分積分の定理による)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\left(0 + \frac{a}{2}\sqrt{\pi a}\right) = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

平均値が 0 分散が 1 となるような正規分布を標準正規分布とよぶが，標準正規分布は，上の計算から，a に 2 を代入した

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を確率分布関数として持つことがわかる．

x を標準正規分布に従う確率変数とするとき，

$$\begin{aligned}E(x^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} -x^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} -3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\right) \\ &= 3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx\right) \\ &= 3\end{aligned}$$

となる．より一般には，x を正規分布に従う確率変数とするとき，$E(x^4) = 3(E(x^2))^2$ となることがわかる．ここで，確率変数 y に対しその kurtosis を

$$kurt(y) = E(y^4) - 3(E(y^2))^2$$

と定義すると，これは y が正規分布のときに $kurt(y) = 0$ となるような y の不変量となる．

4 初等数論

number-theory

4.1 $\sqrt{n}$ が無理数になる場合

sqrt

$\sqrt{2}$ が無理数になることのユークリッドによる証明は有名で，(少なくとも僕が中学生のときには) 中学校の教科書にも載っていました．でも，同様の証明で，$\sqrt{n}$ が無理数になるような自然数 n の特徴付けを与えることができることは見逃されていることが多いように思います．

補題 4.1 自然数 n に対し，$\sqrt{n}$ が無理数になるのは，n がある自然数 m の二乗として表わせない，ちょうどそのときである．

証明． もし，ある $m \in \mathbb{N}$ に対して，$n = m^2$ なら，$\sqrt{n} = m$ だから，特に $\sqrt{n}$ は有理数です (つまり「無理数でない」です)．このような $m \in \mathbb{N}$ が存在しないとして，$\sqrt{n}$ が有理数でない (つまり無理数である) ことを背理法で示します．$n > 1$ について示せば十分なので，これを仮定します．

もし $\sqrt{n}$ が有理数だったとすると，互いに素な 0 でない自然数 p, q で，$\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ となるものがとれます．この式の両辺を二乗して $n = \dfrac{p^2}{q^2}$．したがって，$nq^2 = p^2$ です．$n > 1$ で，p と q は互いに素なので，この等式が成り立つことから (等式の両辺の素因数分解を考えてみると)，$q = 1$ でなくてはならないことがわかります．したがって，$n = p^2$ となりますが，仮定によりそのような p は存在しないのだったから，矛盾です． ❑ (補題 4.1)

4.2 n^9

n29

以下の文章は，今のところ，ある程度の数学の素養を読者に仮定したものとなっているが，後で拡張してもっと初心者向けのテキストにするつもりである:

先日[63)]，職員食堂でコンピュータ・リテラシーの講義を受けもっている先生から

(4.1) どんな数でも，9 乗した結果の 1 の桁と，もとの数の 1 の桁は同じになる n-to-9-0

というのが昔から気になっていたのだが，これは何でなのか，という質問を受けた．もちろん，(4.1) の証明には，0 から 9 までの数について，このことが成り立つことを計算で示せば十分である．試しにやってみると:

```
1^9 = 1
2^9 = 512
3^9 = 19683
4^9 = 262144
5^9 = 1953125
6^9 = 10077696
7^9 = 40353607
```

63) これは，日記で調べてみると 2005 年 11 月の初めのことだった．(19.02.18(月 12:44(JST)) に補筆)

```
8^9 = 134217728
9^9 = 387420489
```

となるから，確かによい．しかし，この計算は何でそうなるのかということを何も説明していないように思える．

そこで，この場合は，10 進法の数表示だったが，一般の n 進法ではどうかを考えてみることにする．つまり，任意の n について，

(4.2) どんな数 $k \in \mathbb{N}$ でも k の n 進法表示の 1 桁目の数字と k^{n-1} の n 進法表示の 1 桁目の数字が同じになる n-to-9-1

という主張を考えてみる．この主張が，すべての n に対し成り立つわけでないことは，n が素数の場合について考えてみれば分かる．たとえば，$n = 3$ のときには，$2^2 = 4$ だから，3 進数表記では，$2^2 = 11$ となり，$2 \neq 1$ である．次のフェルマーの小定理の帰結の一つを使うと，関連した，いくつかの事実が示せる．$\equiv_n$ で n を法とする整数の同値関係を表すことにする．つまり $k, \ell \in \mathbb{Z}$ のとき，$k \equiv_n \ell \iff k - \ell \in n\mathbb{Z}$ である．

定理 4.2 (フェルマーの小定理からの帰結) p を素数とするとき，任意の $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し，$k^{p-1} \equiv_p 1$ である．特に，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $k^p \equiv_p k$ となる． ❑ fermat

したがって p が素数の場合には任意の数の p 進数表示の 1 桁目は，その数の（$p-1$ 乗ではなく）p 乗の p 進数表示の第 1 桁と等しくなる．

定理 4.2 を使うと，次の補題が示せる:

2p

補題 4.3 $n = 2p$ で p は素数とする．このとき，任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し $k^{n-1} \equiv_n k$ となる．

証明． $k = 0$ のときは，等式は明らかである．$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ とするとき，$k^{n-1} - k = k^{2p-1} - k = k(k^{2(p-1)} - 1) = k\left(\left(k^{p-1}\right)^2 - 1\right) = k(k^{p-1} - 1)(k^{p-1} + 1)$ となるが，定理 4.2 により，$k^{p-1} - 1$ は p の倍数となり，k か $k^{p-1} + 1$ の，少なくとも 1 つは 2 の倍数である．したがって，$k^{n-1} - k$ は n の倍数であることがわかる．つまり $k^{n-1} - k \equiv_n 0$ である．

❑ (補題 4.3)

系 4.4 n が素数の 2 倍のとき，任意の正の数 k の n 進数表示の第 1 桁目の数字は，k^{n-1} の n 進数表示の第 1 桁目の数字と等しくなる． ❑

$10 = 5 \times 2$ だから，10 進法表記は系 4.4 の適用範囲に入っていることに注意する．したがって，補題 4.3 が (4.1) の背後にある数学的事実を述べたものとなっている，と考えることができる．

次の補題も同様に証明できる:

補題 4.5 $n = 2^m$ $(m \in \mathbb{N})$ とするとき，任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$k^{n-1} \equiv_n k \tag{4.3}$$ n-to-9-2

となる．

証明. m に関する帰納法で示す．$m=1$ のときは明らかである．$n=2^m$ に対し (4.3) が成り立つことが示せたとして，$n=2^{m+1}$ に対しても，(4.3) が成り立つことを示す．$n=2^{m+1}$ とする．$k=0$ のときは (4.3) が成り立つことは明らかだから，$k\neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} k^{n-1}-k &= k^{2^{m+1}-1}-k = k^{2(2^m-1)+1}-k = k(k^{2(2^m-1)}-1) \\ &= k\left(\left(k^{2^m-1}\right)^2-1\right) = k(k^{2^m-1}-1)(k^{2^m-1}+1) \end{aligned}$$

となるが，$k^{2^m-1}-1$ は帰納法の仮定から 2^m の倍数で，k か $k^{2^m-1}+1$ の，少なくとも 1 つは 2 の倍数である．したがって，$k^{n-1}-k$ は $n=2^{m+1}$ の倍数であることがわかる．つまり $k^{n-1}\equiv_n k$ である． ❑ (補題 4.5)

系 4.6 n が 2 の冪乗のとき，任意の正の数 k の n 進数表示の第 1 桁目の数字は，k^{n-1} の n 進数表示の第 1 桁目の数字と等しくなる． ❑

これらの結果から，2 進数，4 進数, 8 進数，10 進数，16 進数といった我々が通常に用いる数表示では，常に (4.1) と同様の性質が成り立つことが結論される．

以上を書いた後で，補題 4.3 はさらに以下のように一般化できることを [1] で知った．

補題 4.7 n を平方因子を持たないような正の自然数とする．つまり，n は異なる素数の（1 乗の）積の形に表せるようなものとする．このとき，正の自然数 t が $t\equiv_{\varphi(n)} 1$ を満たせば．すべての整数 a に対し，$a^t\equiv_n a$ が成り立つ．ただし，$\varphi(n)$ でオイラーの関数を表す． ❑

$\varphi(10)=4$ だから，$10\equiv_{\varphi(10)} 1$ だが，$5\equiv_{\varphi(10)} 1$ である．したがって，補題 4.7 により，十進数表示については，任意の数の十進数表示の第 1 桁の数字と，その数の 5 乗の十進数表示の第 1 桁の数字も常に等しくなることがわかる．これも試しに計算してみると，

```
1^5 = 1
2^5 = 32
3^5 = 243
4^5 = 1024
5^5 = 3125
6^5 = 7776
7^5 = 16807
8^5 = 32768
9^5 = 59049
```

となっていて，確かに成り立つことがわかる．

上の議論は，この節の初めに述べた，計算による (4.1) の証明に比べて，(4.1) の，より本質的な説明を与えているとは言えないだろうか．「一般論は分りにくい」というのは一般的な偏見のような気がするが，上の議論は，一般論を行うことによって，本質がより深く見えてくることの 1 つの好例になっていると思う．

References

[1] 楫 元，公開鍵暗号を解読せよ! — 君もスパイになれる? —, 数学通信，10(2), (2005), 5–34.

4.3 The exponential a^b etc.

a2b

補題 4.8 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数なら，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい．そうでないなら，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすれば,

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる[64]． □ (補題 4.8)

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\,(n+1)}$$

と

$$\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ \cdots \ + \frac{1}{n}}_{m \text{ times}}$$

を組み合せると，すべての有理数は，それぞれ異なる分母を持つ単位分数 (unit fraction — 分子が 1 の分数) の和に書けることがわかる．しかも，1 つの数に対し，このような表現は無限に存在する（これは Fibonacci (Leonardo, (1180?-1250?)) によるものらしい [Paul Hoffman, The man who loved only numbers] からの孫引き）．

以下の議論も Fibonacci による: $\dfrac{m}{n}$ が与えられたとき，$m_0 = m$, $n_0 = n$ として，$m_k \neq 0$ のときには,

$$\ell_k = \min\{\ell \,:\, \frac{m_k}{n_k} \geq \frac{1}{\ell}\}$$

として,

$$n_{k+1} = n_k \ell_k,$$
$$m_{k+1} = m_k \ell_k - n_k$$

とする．

$\dfrac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \dfrac{m_k}{n_k} - \dfrac{1}{\ell_k}$ である．

演習問題 4.9 このプロセスは，有限回のステップの後，ある k^* で $m_{k^*} = 0$ となって停止する．

[ヒント ℓ_k の選び方から，$\dfrac{1}{\ell_k} \leq \dfrac{m_k}{n_k} < \dfrac{1}{\ell_k - 1}$ である．$\dfrac{m_k}{n_k} - \dfrac{1}{\ell_k} = \dfrac{m_k\ell_k - n_k}{n_k\ell_k}$ とすると，$\dfrac{1}{\ell_k} \leq \dfrac{m_k}{n_k}$ から，$0 < m_k\ell_k - n_k$, また $\dfrac{m_k}{n_k} < \dfrac{1}{\ell_k - 1}$ から，$m_k(\ell_k - 1) < n_k$ したがって $m_k\ell_k - n_k < m_k$ である．]

このとき,

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{\ell_0} + \cdots + \frac{1}{\ell_{k^*-1}}$$

となる．

[64] 実は $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数となることは Gelfond-Schneider の定理から導ける．しかし，この証明の面白いところは，この事実を知らなくても証明ができてしまうところであろう．

4.4 Bertrand's Postulate

bertrand
bertrand-T

Theorem 4.10 (Bertrand's Postulate, Chebyshev's Theorem) *For any natural number $n > 1$ there is always at least one prime number p such that $n < p < 2n$.*

Corollary 4.11 *The sequence of prime numbers (starting with 1) is complete. That is, any natural number can be represented as the sum of pairwise distinct prime numbers (where 1 is thought to be a prime number here).*

Proof. Let p_n denote nth prime number where we set $p_0 = 1$. We prove

$(*)_n$ for any $m < p_n$, m can be represented as a sum of finite elements of p_k, $k < n$ where each p_k appears at most once in the sum

holds for all $n \in \omega$ by induction on n. For $n = 0$ and $n = 1$ this is easy to check.

Assume that $(*)_n$ holds and we show that $(*)_{n+1}$ holds. By Theorem 4.10 we have $p_n < p_{n+1} < 2p_n$. For any $\ell \le p_{n+1}$, if $\ell \le p_n$ then ℓ can be represented as a sum of some of p_k, $k < n$ by induction hypothesis. If $\ell \ge p_n$ then $\ell - p_n < p_n$ and hence, again by the induction hypothesis, $\ell - p_n$ can be represented as a sum $\Sigma\, S$ of the elements of some $S \subseteq \{p_k : k < n\}$. Thus $\ell = \Sigma\, S + p_n$ is represented as the sum of the elements of $S \cup \{p_n\}$. ❑ (Corollary 4.11)

5　ブール代数

boolean-algebras

補題 5.1 X と Y を Boolean spaces として，$f : X \to Y$ を continuous な surjection とする．このとき，$\tilde{f} : Clopen(Y) \to Clopen(Z); U \mapsto f^{-1}(U)$ は embedding となるが，次の同値が成り立つ：

f は open mapping $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ は relatively complete embedding.

（この同値は Koppelberg の “Projective Algebras” では sheaf representation を介して証明してあるが以下で直接証明を与える.）

証明. $\Rightarrow$: $U \subseteq X$ を clopen とする．f は closed mapping だから，$f''U$ は Y の clopen subset である．つまり，$f''U \in Clopen(Y)$ $U \subseteq f^{-1}(f''U)$（つまり $Clopen(X) \models U \le \tilde{f}(f''U)$）だが，$\tilde{f}(f''U)$ は U の $\tilde{f}''Clopen(Y)$ への upper projection になっている：$V \in Clopen(Y)$ で $U \subseteq f^{-1}(V)$ なら，$f''U \subseteq f''f^{-1}(V) = V$ だから，$f^{-1}(f''U) \subseteq f^{-1}(V)$ となるからである.

$\Rightarrow$: f が open mapping でないなら，clopen な $O \subseteq X$ で $f''O \notin \mathcal{O}_Y$ となるようなものがとれる．f は closed mapping だから，$f''O$ は closed であることに注意する．O は $\tilde{f}''Clopen(Y)$ への upper projection を持たないことを示す：$U \in Clopen(Y)$ を $f^{-1}(U) \supseteq O$ となるものとする．このとき，$U \supseteq f''O$ だが，$f''O$ は open ではないので，$U \setminus f''O$ は空でない open set となる．したがって（X は Boolean だから）空でない clopen set $V \subseteq U \setminus f''O$ がとれる．このとき，$U' = U \setminus V$ とすると，$U' \subsetneqq U$ で $U' \supseteq f''O$ となる．したがって $\tilde{f}(U)$ は O の upper projection ではない. □ (補題 5.1)

6　初等幾何?

geometry

補題 6.1 平面は $< 2^{\aleph_0}$ 個の直線では覆えない. geometry-0

証明. L を濃度が $< 2^{\aleph_0}$ の平面上の直線の集合とする．各 $\ell \in L$ に対し，$w(\ell)$ を ℓ の傾き (角度) とすると，$|\,[0,\pi)\,| = 2^{\aleph_0}$ だから，$r \in [0,\pi) \setminus \{w(\ell) : \ell \in L\}$ がとれる．ℓ^* を，傾き r を持つ任意の 直線とすると，任意の $\ell \in L$ は ℓ^* と異る傾きを持つから，ℓ と ℓ^* はちょうど 1 点で交じわっている．したがって，ℓ^* 上に L のどの直線とも交じわらない点が存在する. □ (補題 6.1)

命題 6.2 (S. Mazurkiewicz 1914, see [1]) どの直線ともちょうど 2 点で交じわるような平面上の集合が存在する.

証明. 平面上の直線の全体を $\langle \ell_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0} \rangle$ と enumerate する．点の集合の continuous な increasig sequence P_α, $\alpha < 2^{\aleph_0}$ を以下が成り立つように構成する.

(6.1) P_α の任意の 3 点は同一直線上にない (更に $P_{\alpha+1} \setminus P_\alpha$ の点は P_α のどの 2 点を結んだ直線上にもない); geom-0

(6.2) 任意の $\beta < \alpha$ に対し，$|\,\ell_\beta \cap P_\alpha\,| = 2$. geom-1

この構成が可能なことは 補題 6.1 からわかる: $\alpha+1$ 番目のステップでは，L_α を P_α の 2 点を結んでできる直線の全体とする．ℓ_α が L_α に含まれているなら，$P_{\alpha+1}=P_\alpha$ とする．そうでなければ，(6.1) により，$k=2-|\ell_\alpha\cap P_\alpha|>0$ だから，k $(=1$ or $2)$ 個の点を $\ell_\alpha\setminus(\bigcup L_\alpha)$ からとって，それらを P_α に加えたものを $P_{\alpha+1}$ とすればよい．

$P=\bigcup_{\alpha<2^{\aleph_0}} P_\alpha$ とすれば，これが求めるようなものとなる． □ (命題 6.2)

References

[1] Ben Chad, Robin Knight and Rolf Suabedissen, Set-theoretic constructions of two-point sets, in Fundamenta Mathematicae, 203 (2009), 179-189.

7 グラフ理論

graph-th

定理 7.1 (平面上) 多角形の頂点を互いに交じわらない直線で結ぶことで得られる平面グラフの頂点は，辺で結ばれた 2 点が異る色を割り当てられるように 3 色で塗り分けることができる．

証明． ある多角形 P の対角線による分割から得られたグラフを G とする．必要なら対角線を足して P は G で三角形に分割されているとしてよい，このとき，

Claim 7.1.1 G の頂点で対角線で結ばれていないようなものが少なくとも 2 つは存在する．

$\vdash$ P の頂点の数 n に関する帰納法で証明する．$n=3$ のときには主張は自明に成り立つ．

すべての $n<k$ に対し主張が成り立つとして $n=k$ に対しても主張が成り立つことを示す．P を k 個の頂点を持つ多角形として，G を P の頂点を結んで得られた三角形分割のグラフとする．このとき，G の対角線の一つを d とすると，d の両側のグラフを考えることで，G は d を一辺とする 2 つの多角形の分割のグラフ G', G'' に分割される．帰納法の仮定から，G', G'' はともに少なくとも二つの対角線で結ばれていないような頂点を持つ．たとえば G' でのそれらの 2 つの頂点が d の両端だとするると G' は三角形でなくてはならない．したがって，この場合にも，G' 頂点で d の両端以外の点で対角線で結ばれていない点が存在する． G'' についても同様である．したがって，G も対角線で結ばれていない頂点が少なくとも 2 つは存在することがわかる． $\dashv$ (Claim 7.1.1)

定理を証明する．P の頂点の数 n に関する帰納法で証明する．$n=3$ のときには自明である．

今，すべての $n<k$ に対して定理が成り立つとして $n=k$ のときにも定理が成り立つことを示す．P を k 個の頂点を持つ多角形として，G を P の頂点を結んで得られた三角形分割のグラフとする．補題により，G の頂点で対角線で結ばれていないものが存在するが，その一つを v として G から，v と v につながっている二つの辺 e_0, e_1 を取り除いてできるグラフ G' を考える．G' に帰納法の仮定を適用すると G' の頂点は 3 色で塗り分けられるが，この色分けで e_0 と e_1 の端点で v でない方のものの G' の色分けでの色を c_0,

c_1 として 3 色のうち c_0, c_1 以外のものを v に割り当てることで拡張した色分けは G の頂点の 3 色塗り分けになっている． ❑ (定理 7.1)

8 雑

misc

8.1 2 次方程式

quadratic

複素数体 $K = \mathbb{C}$ で考える．一般の代数閉体で考えても同様だが，この場合については $\sqrt{a}$ は，$b^2 = a$ となるような b のうちの一つというような定義に変更する必要がある．

$a, b, c \in K$ として $a \neq 0$ とする．このとき，2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.1}$$ quad-1

を解く．$a \neq 0$ だから方程式の両辺を a で割ることができて

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{8.2}$$ quad-2

である．ここで (8.1) の二つの解を α, β とすれば，

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta) \tag{8.3}$$ quad-3

だから，係数の比較から

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \tag{8.4}$$ quad-4

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \tag{8.5}$$ quad-5

である．したがって，

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \tag{8.6}$$ quad-6

となり，このことから

$$\alpha - \beta = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \tag{8.7}$$ quad-7

である．したがって，

$$\alpha = \frac{1}{2}((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)) = \frac{1}{2}(-\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.8}$$ quad-8

である．β についても同様だから，

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.9}$$ quad-9

が方程式 (8.1) の 2 つの解であることがわかる．