

# 加法的関数の連続性について

渚野 昌\*

## On Continuity of Additive Functions

Sakaé FUCHINO\*

(Received September 14, 2001 (updated on 2023 年 08 月 16 日))

Some pathologic behaviors of the set of additive functions, automatic continuity of such functions in particular, depend largely on the axioms of set-theory. We review here some known results on additive functions and provide compact but self-contained proofs.

This is an extended version of the paper. All the materials added to the paper after the publication are typeset in dark electric blue (like this sentence).

### 目次

0	はじめに	1
1	加法的関数	2
2	凸関数の連続性	4
3	Steinhaus と Piccard の定理の証明	8
4	$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ 上の自己同型写像	10
5	指数関数の特徴付けと選択公理	12
	参考文献	13

Keywords : Additive function, Continuity, Axiom of Choice, Axiom of Determinacy

### 0 はじめに

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  がコーシーの方程式  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  を満たすとき、 $f$  は何になるだろうか？

定数倍を与える関数  $x \mapsto ax$  はこのようなものとなっ

\*理学教室 (Department of Natural Science and Mathematics)  
(この論文の発表当時の所属): 以下は、渚野 昌: 加法的関数の連続性について, 中部大学工学部紀要, Vol.37, (2001), 55–64. として発表された expository paper の拡張版 (2023 年 08 月 16 日版) である。発表後の訂正/補筆や、発表された論文には含まれていなかった細部が含まれている。変更補筆の主なものは、dark electric blue の foreground (このパラグラフの foreground の色) でマークしてある。この拡張版の最新のファイルは <https://fuchino.ddo.jp/papers/additive-kiyou-x.pdf> として download できる。

ているが、

(\*)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  を満たす関数で定数倍関数でないものは存在するのだろうか？

一見非常に単純に見える問題であるが、実は、この問題の答は選択公理を認めるかどうかで違ってくる：選択公理の下ではコーシーの方程式を満たす関数で定数倍関数と異なるものが無数に存在するが、選択公理を認めないときには、「コーシーの方程式を満たすすべての関数は定数倍関数である」という命題が正しいものでありうる。以下の小文ではこの事情について細説する。

第1節で、ZFC では<sup>†</sup>上の問題 (\*) に肯定的な解が与えられることを示し (定理 5), 選択公理を仮定しないときには、この問題の解が否定的なものになり得る (系 8, 定理 1 も参照.) ことを述べる. 第2節では、第1節の後半で述べた問題 (\*) の否定的解のために必要となる定理 (定理 9, 系 19) を凸関数に関して一般化した形で証明する. 第3節は第2節で用いた、可測集合に関する Steinhaus の定理 (定理 16) の証明を与える. 第4節は、第1, 2節の結果の応用として、 $\mathbb{R}$  上の自己同型写像と  $\mathbb{C}$  上の自己同型写像で自明でないものの存在に関する結果を証明する.

記述は self-contained になるように努めた. 読者に仮定したのは、教養課程の解析学と線型代数の基礎的な知識を別にすれば、測度論のごく初歩的な部分の知識程度である. ただし第4節では代数学の基礎と超限帰納法の知識が仮定されている. 超限帰納法については [4] を参照されたい.

証明は [5] を参考にして書いた. 特に Steinhaus の定理 (定理 16) と Piccard の定理 (定理 A8) の証明は [5] のものをほとんどそのまま踏襲した. 第1節の終りで述べた Shelah の結果と無矛盾性の強さに関連する注意は、ミシガン大学の Andreas Blass 教授から、彼の email による議論を通じて教わったものである.

本稿は、[1] と [2] の続編である. 筆者は、1998 年から 2000 年にかけて、北海道大学理学部数学科において、集合論の公理系の解析学への影響に関する一般の数学者を対象とした特別講演を何回か行なった. これらの講演の後、非常に多くの質問を受けたが、時間の関係もあり、いくつかの質問には、その場で十分に答えることができなかった、[1], [2] と本稿は、その時の質問に対する答えの、より完全な解説を与える目的で書かれた. これらの講演を熱心に聞き有意義な質問をいただいた北海道大学数学科の方々に深く感謝したい.

## 1 加法的関数

以下では  $N > 0$  をある自然数とする. 関数  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が、**加法的**とは、 $f$  が、**コーシーの等式**と呼ばれる次の関数方程式を満たすことである<sup>‡</sup>:

すべての  $x, y \in \mathbb{R}^N$  に対し、 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

連続な加法的関数は、次のように特徴付けることができる:

<sup>†</sup>ZF で選択公理以外の集合論の公理を集めた公理系をあらわす. ZF は集合論の公理系を確立した E. Zermelo (1871–1953) と A. Fraenkel (1891–1965) の名前の頭文字からきている. また、ZFC で ZF に選択公理 (Axiom of Choice) を加えた公理系をあらわす.

<sup>‡</sup>以下の議論のほとんどは、凸集合  $D \subseteq \mathbb{R}^N$  上に定義された関数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  に対して一般化することができる. しかし、ここでは煩雑さをさけるために  $\mathbb{R}^N$  上の関数のみを扱うことにする.

**定理 1**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を加法的関数とすると、以下は同値である:

- (a)  $f$  は連続である.
- (b)  $c = \langle c_0, \dots, c_{N-1} \rangle \in \mathbb{R}^N$  で、すべての  $x = \langle x_0, \dots, x_{N-1} \rangle \in \mathbb{R}^N$  に対し、 $f(x) = c_0x_0 + \dots + c_{N-1}x_{N-1}$  となるようなものが存在する. *i.e.*  $f$  は  $\mathbb{R}$ -線型写像である.

定理の証明のために、まず次を示す:

**補題 2**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を、加法的関数とする.  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^N$ ,  $q_0, \dots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}$  とするとき、

$$f(q_0x_0 + \dots + q_{n-1}x_{n-1}) = q_0f(x_0) + \dots + q_{n-1}f(x_{n-1})$$

が成り立つ. したがって、 $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が加法的であることと  $f$  が  $\mathbb{Q}$ -線型写像であることは、同値である.

**証明.** 加法性により、すべての  $x \in \mathbb{R}^N$  と  $q \in \mathbb{Q}$  に対し、 $f(qx) = qf(x)$  が成り立つことを示せばよい.

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  とすると、 $f$  の加法性により、任意の  $x \in \mathbb{R}^N$  に対し、

$$f(x) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}x + \dots + \frac{1}{n}x}_{n \text{ 個}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}x\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}x\right)}_{n \text{ 個}}$$

となるから、任意の  $x \in \mathbb{R}^N$  と  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  に対し、

$$(1) \quad f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$$

となることが分る. ふたたび  $f$  の加法性と (1) により、任意の  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $q > 0$  に対し、 $q = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  として、

$$(2) \quad \begin{aligned} f(qx) &= f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n}x + \dots + \frac{1}{n}x}_{m \text{ 個}}\right) \\ &= \underbrace{f\left(\frac{1}{n}x\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}x\right)}_{m \text{ 個}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n}f(x) + \dots + \frac{1}{n}f(x)}_{m \text{ 個}} = \frac{m}{n}f(x) = qf(x) \end{aligned}$$

となることが分る. 次に、 $f$  の加法性から、

$$f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$$

だから、 $f(\vec{0}) = 0$  となる. このことから、

$$0 = f(\vec{0}) = f(x + -x) = f(x) + f(-x)$$

により、任意の  $x \in \mathbb{R}^N$  に対し、

$$(3) \quad f(-x) = -f(x)$$

となることが分る. したがって, (2) と (3) により,  $q \in \mathbb{Q}, q < 0$  に対しても,  $-q > 0$  に注意すると,

$$f(qx) = f(-(-q)x) = -f((-q)x) = -(-q)f(x) = q(x)$$

となることがわかる.  $\square$  (補題 2)

**定理 1 の証明.**  $i \in \mathbb{N}, i < N$  に対し,

$$u_i = \langle 0, \dots, 0, \overset{i \text{ 番目}}{1}, 0, \dots, 0 \rangle \in \mathbb{R}^N$$

とする.

$$c_i = f(u_i)$$

とすると, 補題 2 により,  $\vec{q} = \langle q_0, \dots, q_{N-1} \rangle \in \mathbb{Q}^N$  に対し,

$$\begin{aligned} f(q) &= f(q_0 u_0 + \dots + q_{N-1} u_{N-1}) \\ &= q_0 f(u_0) + \dots + q_{N-1} f(u_{N-1}) \\ &= q_0 c_0 + \dots + q_{N-1} c_{N-1} \end{aligned}$$

となる. つまり, 上のような  $c_0, \dots, c_{N-1}$  に対し,  $\mathbb{Q}^N$  の元に対しては定理の (b) が成り立つ. よって,  $\mathbb{Q}^N$  は  $\mathbb{R}^N$  で稠密だから,  $f$  が連続なら, 上のような  $c_0, \dots, c_{N-1}$  に対し, 定理の (2) が成り立つことが分る.

逆に (2) が成り立つなら,  $f$  が連続であることは明らかである.  $\square$  (定理 1)

$N = 1$  の場合には, 上の定理はさらに次のように拡張できる:

**定理 3**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を加法的関数とすると, 次は同値である:

- (a)  $f$  は連続である;
- (b) ある  $c \in \mathbb{R}$  に対し,  $f(x) = cx$  がすべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し成り立つ;
- (c)  $f$  は単調である.

定理の証明には次の補題が必要になる:

**補題 4**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を単調関数とすると,  $f$  の不連続点は高々可算個しか存在しない.

**証明.**  $f$  は単調増加とする. 単調減少の場合も証明は同様である.  $D \subseteq \mathbb{R}$  を  $f$  の不連続点の集合とする.  $D$  が非可算と仮定して矛盾を示す.  $f$  が単調であることから, 各  $x \in \mathbb{R}$  での  $f$  の値の左極限と右極限が存在する. これらをそれぞれ  $f^-(x), f^+(x)$  であらわす. つまり,  $x \in \mathbb{R}$  に対し,

$$f^-(x) = \lim_{y \rightarrow x-0} f(y), \quad f^+(x) = \lim_{y \rightarrow x+0} f(y)$$

である.  $f$  は単調増加であることから,  $f^-(x) \leq f^+(x)$  となる.

$$d(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

とすると,  $x \in D$  なら  $d(x) > 0$  となる.  $d$  の定義と  $f$  が単調増加であることから次は明らかであろう:

**Claim 4.1** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$  で,

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

となるものに対し,

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_0) + d(x_1) + \dots + d(x_n)$$

が成り立つ.  $\dashv$

$D$  は非可算だったから, 鳩の巣原理により,  $k \in \mathbb{N}, k > 0$  と非可算な  $D' \subseteq D$  で,

$$\text{すべての } x \in D' \text{ に対し, } d(x) > \frac{1}{k}$$

となるものがとれる. もう一度鳩の巣原理を用いて,  $l, m \in \mathbb{Z}, l < m$  で,  $D' \cap (l, m)$  が非可算になるようなものがとれる. このとき任意の  $M \in \mathbb{N}$  に対し,  $x_1, \dots, x_M \in D'$  で

$$l < x_1 < x_2 < \dots < x_M < m$$

となるものがとれるから, Claim 4.1 により,

$$f(m) \geq f(l) + d(x_1) + \dots + d(x_M) \geq f(l) + \frac{M}{k}$$

となるが, これは不可能である.  $\square$  (補題 4)

**定理 3 の証明.** (a)  $\Leftrightarrow$  (b) は定理 1 の特別な場合である. (b)  $\Rightarrow$  (c) は明らかだから, あとは (c)  $\Rightarrow$  (a) を示せばよい.

(c) を仮定して  $f$  が連続でなかったとして矛盾を示す.  $f$  を  $x^* \in \mathbb{R}$  で連続でないとする.  $f$  が単調増加であることから, 上昇列  $x_n \in [-\infty, x^*), n \in \mathbb{N}$  と下降列  $y_n \in (x^*, \infty], n \in \mathbb{N}$  で,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*$$

かつ,

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

となるものがある. 任意の  $r \in \mathbb{R}$  に対し,  $d = x^* - r$  とすると, (1) により,

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - d) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - d) = x^* - d = r$$

で, 補題 2 と (2) により,

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - d) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(d) < \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) - f(d) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n - d)$$

となる。したがって、 $f$  は  $r$  でも連続でない。 $r$  は任意だったから  $f$  は  $\mathbb{R}$  のすべての点で不連続となるが、これは補題 4 に矛盾である。  $\square$  (定理 3)

選択公理の下では連続でない加法的関数は無数に存在する。

**定理 5** (Hamel, 1905) 選択公理を仮定する。このとき任意の  $N > 1$  に対し、連続でない加法的関数  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。

**証明.**  $\mathbb{R}^N$  と  $\mathbb{R}$  を  $\mathbb{Q}$  上の線型空間と見なしたとき、 $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への任意の  $\mathbb{Q}$ -線型写像は加法的関数になる。 $B$  を  $\mathbb{R}^N$  の  $\mathbb{Q}$  上の基底とすると  $B$  から  $\mathbb{R}$  への任意の写像は  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への  $\mathbb{Q}$  上の線型写像に拡張される。このような写像は  $2^{2^{\aleph_0}}$  個あるから、数の上からその中には連続でないものが含まれることは明らかである（この証明の直後の注意を参照）。

こう書くところの証明は非常に非構成的であるように思えるかもしれないが、実は  $B$  を固定すると、連続でない加法的関数を、例えば次のようにして具体的に定めることもできる：一般性を失わずに  $B$  は定理 1 の証明での  $u_0, \dots, u_{N-1}$  を含んでいるものとしてよい。 $h: B \rightarrow \mathbb{R}$  を  $i = 0, \dots, N-1$  に対し、 $h(u_i) = 0$ ,  $x \in B \setminus \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$  に対し  $h(x) = 1$  と定義すれば、定理 1 の証明から、 $h$  によって決まる  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への  $\mathbb{Q}$  線型写像は連続とはならない。  $\square$  (定理 5)

上の証明から、 $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への加法的関数は  $2^{2^{\aleph_0}}$  個存在することが分るが、 $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への連続関数はその  $\mathbb{Q}^N$  への制限によって確定するから、その数は高々  $2^{\aleph_0}$  しかない。したがって、数の上では、ほとんどすべての加法的関数が不連続であることが分かる。

ここでの構成では、 $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への加法的関数で、単射でないものが  $2^{2^{\aleph_0}}$  個作られているが、 $B$  を  $B$  自身に one to one onto に移す写像を考えることで、全単射になっているような加法的関数も  $2^{2^{\aleph_0}}$  個存在することが示せる ( $\mathbb{Q}$  が可算であることから、 $B$  の濃度は  $2^{\aleph_0}$  となることに注意する)。

定理 5 の証明では、 $\mathbb{R}^N$  の  $\mathbb{Q}$  上の基底  $B$  の存在を保証するために選択公理が用いられていた。このような基底は、**Hamel 基底**と呼ばれている。Hamel 基底  $B$  の構成のためには、選択公理からの帰結の 1 つである  $\mathbb{R}$  上の整列順序の存在があれば十分であることは明らかであるが、 $V = L$  の下では、 $\mathbb{R}$  の整列順序で  $\Delta_2^1$  集合となるものが存在する。定理 5 の証明の後半でも明

らかなようにこのような整列順序から連続でない加法的関数は構成的に得られる<sup>§</sup>。したがって、

**命題 6**  $V = L$  が成り立つとすれば、 $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への連続でない加法的関数で、（この関数をグラフとして見たときに） $\Delta_2^1$  集合となるようなものが存在する。  $\square$

選択公理を仮定しないときには、状況は全く違ったものでありえる。Sierpiński の定理により、すべての可測な加法的関数は連続になる (定理 9 を参照) が、このことから直ちに次が分る：

**定理 7**  $ZF +$  “すべての実数の集合はルベーグ可測である”のもとで、すべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への加法的関数は連続になる。

**証明.** 仮定からすべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への関数は可測となる。特にすべての加法的関数はルベーグ可測になる。したがって Sierpiński の定理によりこれらの関数はすべて連続である。  $\square$  (定理 7)

決定性の公理 (AD) から “すべての実数の集合はルベーグ可測である” が帰結できる<sup>¶</sup>。したがって、

**系 8** ( $ZF + AD$ ) すべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への加法的関数は連続となる。  $\square$

$ZF +$  “すべての実数の集合はルベーグ可測である” は  $ZFC +$  “到達不可能基数が少なくとも 1 つ存在する” と無矛盾等価である ([6])<sup>||</sup>。そこで、 $ZF +$  “すべての加法的関数は連続である” でも巨大基数の無矛盾性の強さが関与しているのかどうかは興味のある問題となるが、実は、これは (巨大基数の仮説を必要とせず)  $ZFC$  (のみ) と無矛盾等価となることが次のようにして分る：

Sierpiński の定理と同様にして、ベール関数となるような加法的関数も連続になることが分る (系 19 を参照) が、Saharon Shelah [6] により、 $ZF +$  “すべての実数の集合はベールの性質を持つ” は  $ZFC$  と無矛盾等価である。上の定理と同様に、 $ZF +$  “すべての実数の集合はベールの性質を持つ” から、“すべての加法的関数は連続となる” ことが示せるから、後者の命題を  $ZF$  で考えたものも  $ZFC$  と無矛盾等価であることが分る。

## 2 凸関数の連続性

$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が凸関数であるとは、すべての  $x, y \in \mathbb{R}^N$  に対し、

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

が成り立つこととする。

<sup>§</sup> $V = L$ ,  $\Delta_2^1$  については、例えば [3] を参照されたい。

<sup>¶</sup>決定性の公理や無矛盾等価性についても、[3] を参照されたい。

<sup>||</sup>決定性の公理の無矛盾性は、これよりずっと大きな巨大基数の無矛盾性と等価になる。

補題 A 1 加法的関数は、凸関数である。

証明. 補題 2 によりよい. □ (補題 A 1)

この節では、次の定理の証明を与える：

**定理 9** (Sierpiński の定理)

$f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を可測な凸関数とすると、 $f$  は連続である。

補題 2 により、加法的関数は凸関数であるから、上の定理から、すべての可測な加法的関数は連続であることが導け、このことから定理 7 が得られる。

まず凸関数の基本的な性質を証明しておく：

**補題 10**  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とすると、任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  と  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N$  に対し、不等式

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

が成り立つ。

**証明.**  $n \in \mathbb{N}$  が  $2^p$  の形をしているときに上の不等式が成り立つことは、 $p$  に関する帰納法で示せる。一般の  $n$  に対しては、 $p$  を  $n < 2^p$  となるようにとる。任意の  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N$  に対し、 $x_{n+1} = \dots = x_{2^p} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  として、 $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2^p}$  を考えると、

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_i\right) &= \frac{1}{2^p} \left( n \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^{2^p} n x_i \right) \\ &= \frac{1}{2^p} \left( n \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=n+1}^{2^p} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^p} \left( 2^p \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

だから、

$$\frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{2^p} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

となる。したがって、 $2^p$  に対しては補題の不等式が成り立っていることを使って、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^p}}{2^p}\right) \\ &\leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^p})}{2^p} \\ &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{2^p} \\ &\quad + \frac{\overbrace{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)}^{2^p - n \text{ 個}}}{2^p} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} 2^p f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) - (2^p - n) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \\ \leq f(x_1) + \dots + f(x_n) \end{aligned}$$

したがって、

$$n f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n)$$

となり、補題の等式が成り立つことが分る。 □ (補題 10)

**補題 11**  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数として、 $x, y \in \mathbb{R}^N$ ,  $q \in \mathbb{Q}[0, 1]$  とするとき、

$$f(qx + (1 - q)y) \leq qf(x) + (1 - q)f(y)$$

が成り立つ。

**証明.**  $q \in \{0, 1\}$  のときには、上の不等式は自明である。 $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  として、 $q = \frac{m}{n}$  とすると、補題 10 により、

$$\begin{aligned} f(qx + (1 - q)y) &= f\left(\overbrace{x + \dots + x}^{m \text{ 個}} + \overbrace{y + \dots + y}^{n - m \text{ 個}}\right) \\ &\leq \frac{\overbrace{f(x) + \dots + f(x)}^{m \text{ 個}} + \overbrace{f(y) + \dots + f(y)}^{n - m \text{ 個}}}{n} \\ &= \frac{\overbrace{f(x) + \dots + f(x)}^{m \text{ 個}}}{n} + \frac{\overbrace{f(y) + \dots + f(y)}^{n - m \text{ 個}}}{n} \\ &= qf(x) + (1 - q)f(y) \end{aligned}$$

となる。

□ (補題 11)

関数  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、 $m_f : \mathbb{R}^N \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  を次のようにして定義する：

$x \in \mathbb{R}^N$  と  $r > 0$  に対し、 $K(x, r)$  で  $x$  を中心とした半径  $r$  の開球を表すことにする。

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| < r\}$$

である。 $x \in \mathbb{R}^N$  と  $r > 0$  に対し、

$$\varphi_x(r) = \inf_{y \in K(x, r)} f''(y)$$

とする\*\*。 $\varphi_x(r) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  である。ここで、

$$m_f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi_x(r)$$

と定義する。

$$m_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in K(x, \frac{1}{n})} f''(y)$$

---

\*\* $f''X$  で  $f$  の  $X$  による像をあらわす。つまり  $f''X = \{f''(y) : y \in X\}$  である。

である.

$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が  $x \in \mathbb{R}$  で上に局所有界であるとは,  $x$  の近傍  $U$  で,  $f|_U$  が上に有界になること, つまり, ある  $M \in \mathbb{N}$  で  $f|_U \subseteq (-\infty, M)$  となることとする.

したがって  $f$  が  $x \in \mathbb{R}$  で上に局所有界でないのは,  $x$  のどんな近傍  $U$  をとって, 任意の  $M \in \mathbb{N}$  に対し,  $f(t) \geq M$  となるような  $t \in U$  がとれることである.

**定理 12**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $x \in \mathbb{R}^N$  に対し,  $m_f(x) \neq f(x)$  なら,  $f$  は  $x$  で上に局所有界でない.

**証明.**  $x \in \mathbb{R}^N$  で  $m_f(x) \neq f(x)$  とする. 任意の  $x$  の近傍  $U$  と  $M \in \mathbb{N}$  に対し,  $t \in U$  で  $f(t) \geq M$  となるものが存在することを示せばよい.

まず  $m_f(x) = -\infty$  の場合を考える. このときには,  $\delta \in \mathbb{R}^N$  で,

$$(1) \quad x + \delta, \quad x - \delta \in U$$

かつ,

$$(0) \quad f(x + \delta) < 2f(x) - M$$

となるようなものがとれる. (0) により,

$$(0') \quad M < 2f(x) - f(x + \delta)$$

である. このとき, 補題 10 により,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x + (x + \delta) + (x - \delta)}{3}\right) \\ &\leq \frac{1}{3}(f(x) + f(x + \delta) + f(x - \delta)) \end{aligned}$$

だから,

$$2f(x) - f(x + \delta) \leq f(x - \delta)$$

となる. したがって,  $t = x - \delta$  とすれば, (1) により  $t \in U$  で, (0') により,  $M \leq f(t)$  である.

次に  $m_f(x) > -\infty$  とする.  $p = f(x) - m_f(x)$  とすれば, 仮定により  $p > 0$  である.  $n \in \mathbb{N}$  を

$$(1) \quad \frac{1}{2}(n-1)p + m_f(x) > M$$

となるようにとり,  $h \in \mathbb{R}^N$  を,

$$(2) \quad \{x + kh : k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n\} \subseteq U$$

かつ,

$$(3) \quad m_f(x) - \frac{1}{2}p < f(x-h) < m_f(x) + \frac{1}{2}p$$

となるようにとる. これは  $m_f(x)$  の定義から可能である. ここで,  $x_1, \dots, x_n \in U$  を,

$$x_1 = \dots = x_{n-1} = x - h, \quad x_n = x + (n-1)h$$

ととると, 補題 10 により,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \\ &\leq \frac{(n-1)f(x-h) + f(x+(n-1)h)}{n} \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} &n(f(x) - f(x-h)) + f(x-h) \\ &= nf(x) - (n-1)f(x-h) \leq f(x+(n-1)h) \end{aligned}$$

である. 一方 (3) により,

上式の左辺

$$\begin{aligned} &\geq n(f(x) - (m_f(x) + \frac{1}{2}p)) + (m_f(x) - \frac{1}{2}p) \\ &= n((m_f(x) + p) - (m_f(x) + \frac{1}{2}p)) + (m_f(x) - \frac{1}{2}p) \\ &= n \cdot \frac{1}{2}p + m_f(x) - \frac{1}{2}p \\ &= (n-1) \cdot \frac{1}{2}p + m_f(x) > M \end{aligned}$$

である. したがって,  $f(x+(n-1)h) > M$  となるが, (2) により  $x+(n-1)h \in U$  だから,  $t = x+(n-1)h$  が求めるようなものとなっていることが分る.  $\square$  (定理 12)

**定理 13**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  が凸関数のとき,  $m_f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  は連続な凸関数となる.

上の定理の証明は冗長である ([5] ではこの定理の証明に 10 ポイント組みで約 4 ページ費やしている) ので, この定理を次の形に弱めたものの証明を与えておく (以下の応用にはこの形のもので十分である).

**補題 14**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $f$  が  $x \in \mathbb{R}^N$  で上に局所有界なら,  $m_f$  は  $x$  で連続である.

**証明.**  $f$  が  $x \in \mathbb{R}^N$  で上に局所有界なら, 定理 12 により,  $f(x) = m_f(x)$  である. このことと局所有界性から, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  と  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$  で

$$f''K(x, r) \subseteq (f(x) - \varepsilon, M)$$

となるものがとれる.  $0 < r^* < r$  を固定する.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  に対し,  $y \in K(x, \frac{r^*}{n})$  なら, ある  $y' \in K(x, r^*)$  により,

$$y = \frac{1}{n}y' + \frac{n-1}{n}x$$

とあらわせる (たとえば  $y' = x + n(y-x)$  と置けばよい). このような  $y, y'$  に対し, 補題 11 により,

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon &< f(y) \leq \frac{1}{n}f(y') + \frac{n-1}{n}f(x) \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{n-1}{n}f(x) \end{aligned}$$

となる.  $n$  を十分に大きくとれば, 上の不等式の右辺は  $< f(x) + \varepsilon$  とできる. このような  $n$  に対し,  $y \in K(x, \frac{r^*}{n})$  なら,  $|m_f(y) - m_f(x)| \leq \varepsilon$  となる. したがって,  $\varepsilon > 0$  は任意だったから,  $f$  は連続であることが分る.  $\square$  (補題 14)

**定理 15**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする. ある空でない開集合  $O \subseteq \mathbb{R}^N$  で  $f|_O$  が連続になるなら,  $f$  自身連続である.

**証明.**  $f$  が連続でないとして矛盾を導く.  $f$  が連続でないなら 定理 12 と補題 14 により,  $x^* \in \mathbb{R}^N$  で,  $f$  は  $x^*$  で上に局所有界でないようなものがとれる.

一方  $f$  は  $O$  で連続だから, 空でない開集合  $O' \subseteq O$  と  $M \in \mathbb{N}, M > 0$  で,

$$(0) \quad f''O' \subseteq (-M, M)$$

となるものがとれる.

$x' \in O'$  とする.  $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$  を  $K(x', \delta) \subseteq O'$  となるものとする.  $f$  は  $x^*$  で上に局所有界でないから,  $t \in \mathbb{R}^N$  で,

$$(1) \quad \|t\| < \frac{\delta}{3}$$

かつ

$$f(x^* + t) > \frac{M + f(3x^*) - f(x')}{3}$$

となるものがとれる. したがって,

$$(2) \quad M < 3f(x^* + t) - f(3x^*) + f(x')$$

である. このとき, 補題 10 により,

$$\begin{aligned} f(x^* + t) &= f\left(\frac{3x^* + (x' + 3t) - x'}{3}\right) \\ &\leq \frac{1}{3}(f(3x^*) + f(x' + 3t) - f(x')) \end{aligned}$$

だから,

$$(3) \quad 3f(x^* + t) - f(3x^*) + f(x') \leq f(x' + 3t)$$

となる. (2) と (3) から

$$M < 3f(x^* + t) - f(3x^*) + f(x') \leq f(x' + 3t)$$

となる. ところが, (1) により  $x' + 3t \in K(x', \delta) \subseteq O'$  だから, これは (0) に矛盾である.  $\square$  (定理 15)

**定理 16** (Steinhaus, 1920)  $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$  を零集合でない可測集合とする. このとき,  $\text{int}(A+B) \neq \emptyset$  となる.

定理 16 の証明は次の節で与えることにして, ここでは上での準備と 定理 16 から, 次が示せることを見ることにする:

**定理 17**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $T \subseteq \mathbb{R}^N$  を零集合でないルベーク可測集合として,  $g: T \rightarrow \mathbb{R}$  を可測関数で, すべての  $x \in T$  に対し,  $f(x) \leq g(x)$  となるものとする. このとき,  $f$  は連続になる.

**証明.**  $k \in \mathbb{N}$  に対し,

$$D_k = \{x \in T : g(x) < k\}$$

とする.  $g$  は可測関数だから, 各  $D_k$  は可測集合となり,  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$  である. したがって,  $k^* \in \mathbb{N}$  で  $m(D_{k^*}) > 0$  となるものがとれる<sup>††</sup>.

**Claim 17.1**  $f$  は  $\frac{1}{2}D_{k^*} + \frac{1}{2}D_{k^*}$  上で上に有界である.

$\vdash$   $x \in \frac{1}{2}D_{k^*} + \frac{1}{2}D_{k^*}$  とすると,  $d, d' \in D_{k^*}$  で,  $x = \frac{d+d'}{2}$  となるものがとれるが,  $f$  は凸関数だから,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{d+d'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(d) + f(d')) \\ &\leq \frac{1}{2}(g(d) + g(d')) < k^* \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$f''\left(\frac{1}{2}D_{k^*} + \frac{1}{2}D_{k^*}\right) \subseteq [-\infty, k^*)$$

である.

$\dashv$  (Claim 17.1)

$\frac{1}{2}D_{k^*}$  は可測で,  $m\left(\frac{1}{2}D_{k^*}\right) = \frac{1}{2} \cdot m(D_{k^*}) > 0$  だから, Steinhaus の定理 (定理 16) により,  $\text{int}\left(\frac{1}{2}D_{k^*} + \frac{1}{2}D_{k^*}\right) \neq \emptyset$  となる.  $O \subseteq \frac{1}{2}D_{k^*} + \frac{1}{2}D_{k^*}$  を空でない開集合とすれば, Claim 17.1 により,  $f$  は  $O$  上で上に有界だから, 定理 12 により,  $f|_O = m_f|_O$  となり, 補題 14 により, これは連続である. したがって, 定理 15 により,  $f$  は  $\mathbb{R}^N$  全体でも連続となることが分る.

$\square$  (定理 17)

$D = \mathbb{R}^N, f = g$  とすることにより, 定理 17 から, 定理 9 が導ける. 定理 16 は “零集合でない可測集合” を “疎集合でないベールの性質を持つ集合” で置き換えても成り立つことが知られている (Piccard の定理 — 定理 A8 を参照). したがって, 定理 17 の証明は “零集合でないルベーク可測集合”, “可測関数” をそれぞれ “疎集合でないベールの性質を持つ集合”, “ベール関数” で置き換えても同じように行うことができる. よって次が得られる:

<sup>††</sup> $m(X)$  で可測集合  $X$  のルベーク測度を表すことにする

**定理 18**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数とする.  $T \subseteq \mathbb{R}^N$  を疎集合でないベールの性質を持つ集合として,  $g: T \rightarrow \mathbb{R}$  をベール関数で, すべての  $x \in T$  に対し,  $f(x) \leq g(x)$  となるものとする. このとき,  $f$  は連続になる.  $\square$

**系 19**  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を凸関数でベール関数であるとき,  $f$  は連続である.  $\square$

したがって, 前節の終りでの議論と同様にして次が分る:

**系 20** ZF + “すべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への凸関数は連続である” は, ZFC と無矛盾等価である.  $\square$

命題 “すべての実数の集合はルベーク可測である” および, 命題 “すべての実数の集合はベールの性質を持つ” は, 決定性の公理 (AD) から帰結できる. したがって:

**系 21** (ZF + AD) すべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}$  への凸関数は連続である.  $\square$

(A) と (B) を, それぞれ, “すべての実数の集合はルベーク可測である”, “すべての実数の集合はベールの性質を持つ” という主張とする.

**系 A 2** (A) または (B) が成り立つなら, すべての  $N \in \mathbb{N}$  と  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $f$  が加法的なら,  $f$  は  $\mathbb{R}$ -線型写像である.

**証明.** 補題 A 1 により  $f$  は凸関数だから, 仮定 (A) または (B), および, 定理 9 と系 19 により,  $f$  は連続である. したがって, 定理 1 により,  $f$  は  $\mathbb{R}$ -線型写像である.  $\square$  (系 A 2)

**系 A 3** (A) または (B) が成り立つなら,  $\mathbb{R}$  の  $\mathbb{Q}$  上のハメル基底は存在しない. 特に ZF + AD の下で,  $\mathbb{R}$  の  $\mathbb{Q}$  上のハメル基底は存在しない.

**証明.** ハメル基底が存在したとすると, 定理 5 の証明が成立するので, 連続でない加法的関数の存在が示せる. 補題 A 1 により加法的関数は凸関数だから, 定理 9 と系 19 により, これは, 仮定 “(A) または (B)” に矛盾である.  $\square$  (系 A 3)

**補題 A 4** すべての  $N, M \in \mathbb{N}$  と  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  に対し,  $f$  が  $\mathbb{R}$ -線型写像となるのは, すべての  $i < M$  に対し,  $f_i$  が線型写像となる, ちょうどそのときである. ただし,  $f_i$  で,  $x \in \mathbb{R}^N$  を  $f(x)$  の  $i$ -座標の値に移す関数をあらわす.

**証明.**  $\mathbb{R}^M$  の和とスカラー倍が座標ごとに定義されていることからよい.  $\square$  (補題 A 4)

**系 A 5** (A) または (B) が成り立つなら, すべての  $N, M \in \mathbb{N}$  と  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  に対し,  $f$  が加法的なら,  $f$  は  $\mathbb{R}$ -線型写像である.

**証明.** 系 A 2 と補題 A 4 によりよい.  $\square$  (系 A 5)

**系 A 6** (ZF + AD) すべての  $\mathbb{R}^N$  から  $\mathbb{R}^M$  への加法的関数は,  $\mathbb{R}$ -線型写像である.  $\square$

**系 A 7** (A) または (B) が成り立つとする.  $X$  と  $Y$  を任意の  $\mathbb{R}$ -線型空間として,  $f: X \rightarrow Y$  とするとき,  $f$  が加法的で,  $f$  は  $X$  の任意の有限部分空間を  $Y$  の有限部分空間の部分集合に移すなら,  $f$  は  $\mathbb{R}$ -線型写像である.  $\square$

### 3 Steinhaus の定理と Piccard の定理の証明

完全のために, この節では前節で証明なしに引用した Steinhaus の定理 (定理 16) と Piccard の定理 (定理 A 8 を参照) の証明を与えることにする.

次の補題を用いる:

**補題 22**  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^N$  を可測集合とし,  $m(A) < \infty$  とする. このとき,

$$|m(A \cap B) - m(A \cap C)| \leq m(B \Delta C)$$

が成り立つ.

**証明.**

$$\begin{aligned} m(A \cap B) - m(A \cap C) &= m(A \cap B \cap C) + m(A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus C)) \\ &\quad - (m(A \cap B \cap C) + m(A \cap (\mathbb{R} \setminus B) \cap C)) \\ &= m(A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus C)) - m(A \cap (\mathbb{R} \setminus B) \cap C) \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} |m(A \cap B) - m(A \cap C)| &\leq m(A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus C)) + m(A \cap (\mathbb{R} \setminus B) \cap C) \\ &\leq m(B \cap (\mathbb{R} \setminus C)) + m((\mathbb{R} \setminus B) \cap C) \\ &= m(B \Delta C) \end{aligned}$$

である.  $\square$  (補題 22)

**Steinhaus の定理 (定理 16) の証明.** 一般性を失うことなく,  $A, B$  はコンパクトとしてよい.  $t \in \mathbb{R}^N$  に対し,  $w: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  を,

$$w(t) = m(A \cap (t - B)) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x) \cdot \chi_{t-B}(x) dx$$

により定義する $\ddagger$ .

---

$\ddagger$   $\chi_X$  で集合  $X$  の特性関数をあらわす.



**Claim 22.1**  $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  は連続である.

┆ 任意の  $t \in \mathbb{R}^N$  に対し,  $w$  が  $t$  で連続であることを示す.  $\varepsilon > 0$  を任意にとるとき, 開集合  $G$  で,  $t-B \subseteq G$  かつ  $m(G \setminus (t-B)) < \frac{1}{2}\varepsilon$  となるようなものをとる.  $(t-B) \cap (\mathbb{R}^N \setminus G) = \emptyset$  だが  $t-B$  も  $\mathbb{R}^N \setminus G$  も閉集合だから, これらの集合の間の距離  $\delta$  は 0 より真に大きい.

以下で  $w''K(t, \delta) \subseteq (w(t) - \varepsilon, w(t) + \varepsilon)$  となることを示すが,  $\varepsilon > 0$  は任意だったから, これにより証明が完了する.

$h \in \mathbb{R}^N$  で  $\|h\| < \delta$  なら,  $t+h-B \cap (\mathbb{R}^N \setminus G) = \emptyset$  となる. つまり,  $t+h-B \subseteq G$  である. したがって,

$$m((t+h-B) \setminus (t-B)) \leq m(G \setminus (t-B)) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

となる. 同様に,  $m(t+h-B) = m(t-B)$  だから,

$$\begin{aligned} m((t-B) \setminus (t+h-B)) &\leq m(G \setminus (t+h-B)) \\ &= m(G) - m(t+h-B) \\ &= m(G) - m(t-B) \\ &= m(G \setminus (t-B)) < \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

となる. したがって,  $\|h\| < \delta$  なら,

$$m((t+h-B) \Delta (t-B)) < \varepsilon$$

となることが分る. したがって 補題 22 により, このような  $h$  に対し,

$$\begin{aligned} |w(t-h) - w(t)| &= |m(A \cap (t+h-B)) - m(A \cap (t-B))| \\ &\leq m((t+h-B) \Delta (t-B)) < \varepsilon \end{aligned}$$

となる. したがって,  $w''K(t, \delta) \subseteq (w(t) - \varepsilon, w(t) + \varepsilon)$  が示せた. ┆ (Claim 22.1)

$w(t)$  の連続性により,  $\int_{\mathbb{R}^N} w(t)dt$  が存在するが,  $w$  の定義と Tonelli の定理により,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} w(t)dt &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x)\chi_{t-B}dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x)\chi_{t-B}dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x) \left( \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{t-B}dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x) \left( \int_B (t-x)dt \right) dx \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\int_B (t-x)dt = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B(u)du$$

だから,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} w(t)dt &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_B(u)du \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x)dx \\ &= m(B) \cdot m(A) > 0 \end{aligned}$$

である. 特に  $w(t^*) \neq 0$  となる  $t^* \in \mathbb{R}^N$  がとれる. Claim 22.1 により  $w$  は連続だから,  $t^*$  の近傍  $U$  で, すべての  $t \in U$  に対し,  $w(t) \neq 0$  となるようなものが存在する. ところが,  $w(t) \neq 0$  なら,  $w$  の定義から,  $m(A \cap (t-B)) \neq 0$  だから, 特に  $A \cap (t-B) \neq \emptyset$  である.  $a \in A \cap (t-B)$  とすれば,  $a \in A$  で,  $t-b = a$  となるような  $b \in B$  が存在する. つまり,  $t = a+b$ ,  $a \in A, b \in B$  と書けるから,  $t \in A+B$  である. 以上から  $U \subseteq A+B$  となり,  $\text{int}(A+B) \neq \emptyset$  がわかる. □ (定理 16)

前節で述べたように, Piccard の定理は Steinhaus の定理のカテゴリーでの双対であるが, ここでは以下の一般化された形で証明しておく:

**定理 A 8** (L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma, 1973)  $(X, +, \mathcal{O})$  を分離的な位相群とする (ただし必ずしも  $+$  は可換でなくてもよい).  $A, B \subseteq X$  を疎集合でないベールの性質を持つ集合とるとき,  $\text{int}(A+B) \neq \emptyset$  が成り立つ.

**証明.** 仮定により,  $X$  自身も疎集合でない. したがって,  $X$  の任意の空でない開集合は疎集合でない:  $G \subseteq X$  が空でない開集合で疎集合でもあるとして,  $a \in G$  を 1 つ固定する. このとき, すべての  $x \in X$  に対し,  $G-a+x$  は開集合で疎集合となる.  $x \in G-a+x$  だから,  $X$  は各点で局所的に疎集合となるが,  $X$  は分離的だったから, このことから  $X$  自身も疎集合であることが帰結できてしまい矛盾である.

$A, B$  はベールの性質を持ち疎集合でないから, 空でない開集合  $G, H$  と疎集合  $P, Q, R, S$  で,

$$A = (G \cup P) \setminus R, \quad B = (H \cup Q) \setminus S$$

となるものがとれる.  $g \in G$  と  $f \in H$  を固定して,  $G_0 = -g+G, H_0 = H-h, A_0 = -g+A, B_0 = B-h$  とする. このとき,

$$G_0 \setminus A_0 = (-g+G) \setminus (-g+A) = -g + (G \setminus A)$$

は疎集合となり, 同様に  $H_0 \setminus B_0 = (H \setminus B) - h$  も疎集合になる.

$$U = G_0 \cap -H_0$$

とすると,  $U$  は開集合で  $0 \in U$  だから,  $U$  は空でない. したがって次の Claim により証明が完了する.

**Claim A 8.1**  $g + U + h \subseteq A + B$ .

┆ 各  $t \in U$  に対し,

$$U_t = U \cap (U - t)$$

とする.  $U_t$  は開集合で,  $0 \in U_t$  だから,  $U_t$  は空でない.

$$U_t \setminus A_0 \subseteq U \setminus A_0 \subseteq G_0 \setminus A_0$$

だから,  $U_t \setminus A_0$  は疎集合である. 同様に,

$$\begin{aligned} U_t \setminus (-B_0 - t) &\subseteq (U - t) \setminus (-B_0 - t) \\ &= (U \setminus -B_0) - t \subseteq (-H_0 \setminus -B_0) - t \end{aligned}$$

だから,  $U_t \setminus (-B_0 - t)$  も疎集合である. 一方,

$$U_t \subseteq (A_0 \cap (-B_0 - t)) \cup (U_t \setminus A_0) \cup (U_t \setminus (-B_0 - t))$$

だから,  $A_0 \cap (-B_0 - t)$  は疎集合でない. 特にこの集合は空でないから, 各  $t \in U$  に対し,  $a_t \in A_0 \cap (-B_0 - t)$  がとれる. したがって,

$$g + t + h = (g + a_t) + (-a_t + t + h) \in A + B$$

である. ┆ (Claim A 8.1)

□ (定理 A 8)

#### 4 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ 上の自己同型写像

実数体  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  上の自己同型写像は  $\mathbb{R}$  上の恒等写像  $id_{\mathbb{R}}$  以外には存在しないことが次の補題から分る:

**命題 23**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が, すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し

- (1)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
- (2)  $f(xy) = f(x)f(y)$

を満たすとき,  $f$  は値 0 をとる定値関数となる (つまり, すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し,  $f(x) = 0$  となる) か, あるいは,  $\mathbb{R}$  上の恒等写像  $f = id_{\mathbb{R}}$  となるかのいずれかである.

**証明.** すべての  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$  に対し, (2) により,

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$$

である. したがって, (1) により,  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し,  $x < y$  なら,

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x) + f(y - x) \geq f(x)$$

となるから,  $f$  は単調増加であることがわかる. (1) により  $f$  は加法的関数だから, 定理 3 により, ある  $c \in \mathbb{R}$

で,  $f(x) = cx$  がすべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し成り立つようなものが存在する. このことと (2) により,

$$c = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = c^2$$

となるから,  $c = 0$  または  $c = 1$  である.  $c = 0$  の場合には  $f$  は定値関数  $f(x) = 0$  となり,  $c = 1$  の場合には  $f = id_{\mathbb{R}}$  となる. いずれの場合にも  $f$  が (1) と (2) を満たすことは明らかである. □ (命題 23)

**系 24**  $id_{\mathbb{R}}$  は, 唯一の  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  上の自己同型写像である.

**証明.**  $f$  を  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  上の自己同型写像とすると, 命題 23 により,  $f(x) = 0$ , または  $f = id_{\mathbb{R}}$  のいずれかだが, 前者は  $\mathbb{R}$  の自己同型写像ではない. □ (系 24)

$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  では自己同型に関する状況は  $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  とは異なったものになる.

**命題 25**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  が連続で, すべての  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  に対し,

- (1)  $f(z_0 + z_1) = f(z_0) + f(z_1)$ ;
- (2)  $f(z_0 z_1) = f(z_0)f(z_1)$

を満たすなら,  $f$  は定値関数  $z \mapsto 0$ , 恒等写像  $z \mapsto z$ , 共役写像  $z \mapsto \bar{z}$  のいずれかである.

**証明.**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を連続で, すべての  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  に対し上の (1) と (2) を満たすものとする.  $f_0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  をそれぞれ, すべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し,

$$f_0(z) = \operatorname{Re}(f(z)), \quad f_1(z) = \operatorname{Im}(f(z))$$

となるものとして定義する.

$$(3) \quad f(z) = f_0(z) + f_1(z)i$$

である. 仮定により,  $f_0$  と  $f_1$  は連続である.  $\mathbb{R}$  は位相加法群としては  $\mathbb{R}^2$  と同型だから, 標準的な同型写像により  $f_0, f_1$  は  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}$  への加法的関数に対応する. したがって,  $f_0$  と  $f_1$  の連続性から, 定理 1 により,  $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11} \in \mathbb{R}$  で, すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し,

$$(4) \quad f_0(x + yi) = c_{00}x + c_{01}y; \quad f_1(x + yi) = c_{10}x + c_{11}y$$

となるものが存在する. したがって (3) と (4) を整理すると,  $a, b \in \mathbb{C}$  で, すべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し,

$$(5) \quad f(z) = az + b\bar{z}$$

となるようなものが存在することが分る.  $x = y = 1$  と置くと, (5) と (2) により,

$$a + b = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = (a + b)^2$$

となるから,

$$(6) \quad a + b = a^2 + 2ab + b^2$$

となる. 同様に  $x = y = i$  に対し,

$$-a - b = f(-1) = f(i \cdot i) = f(i)f(i) = (ai - bi)^2$$

により,

$$(7) \quad -a - b = -a^2 + 2ab + -b^2$$

となる. したがって (6) と (7) から

$$(8) \quad ab = 0$$

である. よって, (a)  $a = b = 0$ ; (b)  $a = 0, b \neq 0$ ; (c)  $a \neq 0, b = 0$  の三つの場合が考えられるが, (a) なら  $f(z) = 0$  がすべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し成り立つ. (b) の場合には, (5) と (2) から,

$$-bi = f(i) = f(i \cdot 1) = f(i)f(1) = -bi \cdot b = -b^2i$$

となり,  $b = 1$  となるから,  $f(z) = \bar{z}$  がすべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し成り立つ. (c) の場合には, (5) と (2) から,

$$a = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = a^2$$

となり,  $a = 1$  となる. このときには  $f(z) = z$  がすべての  $z \in \mathbb{C}$  に対し成り立つ.

□ (命題 25)

系 8 とその後の注意と同様に上の命題 25 から次が帰結できる:

系 26 (ZF + AD)  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の自己同型写像は  $z \mapsto z$  と  $z \mapsto \bar{z}$  の 2 つのみである. □

系 27 ZF + “ $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の自己同型写像は  $z \mapsto z$  と  $z \mapsto \bar{z}$  の 2 つのみである” は ZFC と無矛盾等価である. □

一方 ZFC のもとでは,  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の自明でない (つまり  $id_{\mathbb{C}}$  でも共役写像でもないような) 自己同型写像が存在する.

定理 28 選択公理を仮定する. このとき,  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の自明でない自己同型写像が存在する.

以下の補題を用いて, 超限帰納法により  $\mathbb{C}$  の自明でない自己同型写像を構成することができる:

補題 29  $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  を  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の部分体として,  $f: F \rightarrow F$  を  $F$  の自己同型写像とする.  $a \in \mathbb{C}$  を  $F$  上の超越数とすると, 自己同型写像  $f^*: F(a) \rightarrow F(a)$  で  $f$  の拡張となっているものがとれる. □

補題 30  $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  を  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$  の部分体として,  $f: F \rightarrow F$  を  $F$  の自己同型写像とする. このとき,  $f$  は  $F$  の代数的閉包  $F^*$  の自己同型写像に拡張することができる. □

補題 31  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  の自明でない自己同型が存在する.

証明.  $\{1, \sqrt{2}\}$  は  $\mathbb{Q}$  上の線型空間としての  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  の基底になるから,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  の任意の元は  $1, \sqrt{2}$  の  $\mathbb{Q}$  上の線型結合として一意に表せるが,  $f_0: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  を,  $q, r \in \mathbb{Q}$  に対し,

$$f_0(q + r\sqrt{2}) = q - r\sqrt{2}$$

として定義すると,  $f_0$  は体  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  の自己同型写像となっていることが確かめられる. □ (補題 31)

定理 28 の証明.  $\kappa = 2^{\aleph_0}$  として,  $\mathbb{C} = \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$  とする.  $\alpha < \kappa$  に関する帰納法で,  $\mathbb{C}$  の部分体の上昇列  $\langle F_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  と  $F_\alpha$  の自己同型  $f_\alpha: F_\alpha \rightarrow F_\alpha$  の上昇列  $\langle f_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  を次のようにとる:

(0)  $F_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  とし,  $f_0$  は補題 31 の証明でのようにとる.

(1)  $\gamma < \kappa$  が極限順序数で,  $F_\alpha, \alpha < \gamma$  と  $f_\alpha, \alpha < \gamma$  がすでに構成できたときには,

$$F_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} F_\alpha, \quad f_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha$$

とする.

(2)  $\gamma < \kappa$  が非極限順序数で,  $\gamma = \alpha + 1$  のとき,

(a)  $c_\alpha$  が  $F_\alpha$  上超越数なら,  $F_\gamma = F_\alpha(c_\alpha)$  とし,  $f_\gamma$  は  $F_\gamma$  の自己同型写像で,  $f_\alpha$  を拡張するものとする (これは補題 29 により可能である).

(b)  $c_\alpha$  が  $F_\alpha$  上代数的なら,  $F_\gamma$  を  $F_\alpha$  の代数的閉包として,  $f_\gamma$  を  $F_\gamma$  の自己同型写像で,  $f_\alpha$  を拡張するものとする (これは補題 30 により可能である).

(2)(a), (b) により, 各  $\alpha < \kappa$  に対し,  $c_\alpha \in F_{\alpha+1}$  だから,

$$\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha = \mathbb{C}$$

である. したがって,

$$f = \bigcup_{\alpha < \kappa} f_\alpha$$

は  $\mathbb{C}$  の自己同型写像となるが, (0) により,

$$f(\sqrt{2}) = f_0(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$

だから  $f$  は自明でない.  $\square$  (定理 28)

### 5 指数関数の特徴付けと選択公理

指数関数 (ある  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  に対する, 関数  $x \mapsto a^x$ ) は,  $\mathbb{Q}$  上では, 以下のような特徴付けができる.  $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$  である.

**補題 A 9**  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とするとき, 関数  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$  で,

- (1)  $f(1) = a$ ;
- (2) すべての  $x, y \in \mathbb{Q}$  に対して,  $f(x+y) = f(x)f(y)$  が成り立つ

を満たすものが一意に存在して, 通常の指数関数  $x \mapsto a^x$  に一致する.

**証明.** 指数関数

$$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} : \frac{m}{n} \mapsto a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$$

が, (1), (2) を満たすことは明らかだから, 任意の関数  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  が, (1), (2) を満たすとき,  $f$  が指数関数と, 一致すること (つまり, すべての  $q \in \mathbb{Q}$  に対し  $f(q) = a^q$  となること) が示せればよい. (1) による

$$(a) \text{ 自然数 } 1, 2, 3, \dots \text{ に対しては, } f(1) \stackrel{(1)}{=} a = a^1;$$

$$f(2) = f(1+1) \stackrel{(2)}{=} f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2;$$

$$f(3) = f(2+1) \stackrel{(2)}{=} f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3;$$

etc. によりよい.

(b)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  とするとき,

$$(1) \text{ による} \quad (2) \text{ による}$$

$$a \stackrel{(1)}{=} f(1) = f(-n + n + 1) \stackrel{(2)}{=} f(-n) \cdot f(n + 1)$$

$$1) \stackrel{(a)}{=} f(-n) \cdot a^{n+1}. \text{ だから}$$

$$f(-n) = \frac{a}{a^{n+1}} = \frac{1}{a^n} = a^{-n} \text{ である.}$$

$$(c) f(0) = f(-1+1) \stackrel{(2)}{=} f(-1) \cdot f(1) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{a} \cdot a = 1 = a^0.$$

(2) による (1) と (b) による

(d)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  に対し,

$$a \stackrel{(1)}{=} f(1) = f(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ 個}}) \stackrel{(2)}{=} \underbrace{f(\frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot f(\frac{1}{n})}_{n \text{ 個}}$$

である.  $f(\frac{1}{n}) > 0$  だから (ここで  $f$  の行き先が  $\mathbb{R}^+$  という条件が必要になる),  $f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  である.

$$(e) n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \text{ に対し,}$$

$$1 \stackrel{(c)}{=} f(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) \stackrel{(2)}{=} f(-\frac{1}{n}) \cdot f(\frac{1}{n}) \text{ だから,}$$

$$f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{f(\frac{1}{n})} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}} \text{ である.}$$

(d) による

(f)  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  に対して,

$$f(\frac{m}{n}) = f(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ 個}}) \stackrel{(2)}{=} \underbrace{f(\frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot f(\frac{1}{n})}_{m \text{ 個}}$$

$$(d) \text{ による}$$

$$\stackrel{(d)}{=} (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}},$$

$$f(-\frac{m}{n}) = f(\underbrace{(-\frac{1}{n}) + \dots + (-\frac{1}{n})}_{m \text{ 個}}) \stackrel{(2)}{=} \underbrace{f(-\frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot f(-\frac{1}{n})}_{m \text{ 個}}$$

$$(e) \text{ による}$$

$$\stackrel{(e)}{=} (\frac{1}{\sqrt[n]{a}})^m = a^{-\frac{m}{n}} \text{ である.}$$

$\square$  (補題 A 9)

$\mathbb{Q}$  上の指数関数は locally uniformly continuous なので,  $\mathbb{R}$  上の連続関数に一意に拡張できる. 実際に  $\mathbb{R}$  上の指数関数は, このようにして定義されたものになっている. このことから, 次が分かる:

**補題 A 10**  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  とするとき, 関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  で,

- (0)  $f$  は連続である.
- (1)  $f(1) = a$ ;
- (2) すべての  $x, y \in \mathbb{Q}$  に対して,  $f(x+y) = f(x)f(y)$  が成り立つ

を満たすものが一意に存在して, 通常の指数関数  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a^x$  に一致する.

**証明.** 証明の子細は省略する. 一意性は  $\mathbb{Q}$  が  $\mathbb{R}$  で dense であることから従い, 通常の指数関数 ( $\mathbb{Q}$  上の指数関数の拡張となっているような連続関数)  $x \mapsto a^x$  が (2) を満たすことは, この関数の  $\mathbb{Q}$  への制限が (すべての  $x, y \in \mathbb{Q}$  に対して) (2) を満たすことと,  $\mathbb{Q}$  上の指数関数の局所的な一様連続性, および  $\mathbb{R}^2$  上の加法関数と乗法関数の連続性から導かれる.  $\square$  (補題 A 10)

通常の解析学 (最近の日本語では微分積分学) の教科書では, 指数関数  $f_a$  の連続性から, それが単調であること, そのことと, 再び連続性から,  $f_a$  が  $\mathbb{R}$  から,  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  への全単射になることが示され, このことから存在が保証される,  $f_a$  の逆関数

$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; r \mapsto \log_a r$  が導入されているだろう。 $\log_a$  が  $f_a$  の逆関数であることから、 $\log_a$  は、(1), (2) の“逆”  $(1^{-1})$   $\log_a a = 1$ ;

(2<sup>-1</sup>) すべての  $x, y \in \mathbb{R}^+$  に対し、  
 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

を満たす。

選択公理の下では、補題 A 10 で、条件 (0) を省略することはできない:

**補題 A 11** (AC) 各  $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$  に対し、関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  で、

- (1)  $f(1) = a$ ,  
 (2) すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し、 $f(x+y) = f(x)f(y)$   
 を満たすものが、 $2^{2^{\aleph_0}}$  個存在する。

**証明.**

$f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を (3):  $f_0(1) = 1$  で、

- (4) すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し、 $f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$

となるようなものとする。定理 5 (とその証明) により、このような  $f_0$  は  $2^{2^{\aleph_0}}$  個存在する。

- (5)  $f_0^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto a^{f_0(x)}$

とする。この定義から  $f_0^*(1) = a^1 = a$  だが、すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して、 $f_0^*(x+y) = f_0^*(x)f_0^*(y)$  となることも、成り立つ:  $f_0^*(x+y) = a^{f_0(x+y)} = a^{f_0(x)+f_0(y)} =$   
 $\underbrace{a^{f_0(x)}}_{(5) \text{ による}} \cdot \underbrace{a^{f_0(y)}}_{(4) \text{ による}} =$   
 $\underbrace{a^{f_0(x)} \cdot a^{f_0(y)}}_{(5) \text{ による}} = f_0^*(x)f_0^*(y).$

(5) は、異なる  $f_0$  に対して、異なる  $f_0^*$  を対応させるから、以上により、定理の主張が証明された。□ (補題 A 11)

前と同じように、(A) と (B) を、それぞれ、“すべての実数の集合はルベーク可測である”と、“すべての実数の集合はベールの性質を持つ”という主張とする。

**定理 A 12** (A) か (B) の少なくとも片方が成り立つものとする。このとき、すべての  $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$  に対し、指数関数  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto a^x$  は、(1)  $f(1) = a$  と、(2) すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し、 $f(x+y) = f(x)f(y)$  が成り立つ、という二つの性質を持つ唯一の関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  として特徴付けられる。

**証明.**  $f_a$  が (1) と (2) を満たすことは、補題 A 10 によりよい。

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を、(1) と (2) を満たす任意の関数とする。このとき、 $f^\dagger : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を、 $x \in \mathbb{R}$  に対し、 $f^\dagger(x) = \log_a(f(x))$  を対応させる関数として定義する。

$$f^\dagger(1) = \log_a(f(1)) = \log_a a = \underbrace{1}_{(1^{-1}) \text{ による}}$$

また、すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\begin{aligned} f^\dagger(x+y) &= \log_a(f(x+y)) = \log_a(f(x)f(y)) \\ &= \log_a f(x) + \log_a f(y) = \underbrace{f^\dagger(x) + f^\dagger(y)}_{(2^{-1}) \text{ による}} \end{aligned}$$

が成り立つ。つまり  $f^\dagger$  は加法的関数である。したがって、系 A 2 により、 $f^\dagger$  は恒等関数になる。したがって、すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し、

$$f_a(x) = a^x = a^{f^\dagger(x)} = a^{\log_a(f(x))} = \underbrace{f(x)}_{\log_a \text{ は } a^{(\cdot)} \text{ の逆関数だから}}$$

となる。つまり、 $f = f_a$  である。□ (定理 A 12)

**系 A 13** (ZF + AD) すべての  $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$  に対し、指数関数  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto a^x$  は、(1)  $f(1) = a$  と、(2) すべての  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し、 $f(x+y) = f(x)f(y)$  が成り立つ、という二つの性質を持つ唯一の関数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  として特徴付けられる。

**証明.** AD から、(A) と (B) が導けるので、補題は、定理 A 12 から従う。□ (系 A 13)

以上では指数関数に関する記述だったが、これは、指数関数の逆関数である対数関数の、特徴付けに関する不定性の記述に翻訳することもできる。

逆数学での研究の知見などから、古典的な解析学は、選択公理の成立/非成立にはほとんど影響を受けないことが知られている。そのことを頭に置くと、指数関数や対数関数といった、きわめて古典的な数学の対象の特徴付けが、選択公理や、決定性公理に影響を受ける、というのは、非常に不思議な現象と言えるだろう。

## 参考文献

- [1] 渚野 昌, 非可測集合は存在するのか, preprint (2000/2021).  
<https://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/notes/nonmeasurable.pdf> 2
- [2] 渚野 昌, 連続体仮説と数学, preprint (2000).  
<https://fuchino.ddo.jp/notes/ch.pdf> 2

- [3] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag (1994/1997), I-XXIV, 1-536.  
(A. カナモリ著, 瀧野 昌 訳, 巨大基数の集合論, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株) (1998), I - VI, 1 - 554)    4
- [4] K. Kunen: *Set Theory*, North-Holland (1980) i-xvi, 1-313.    2
- [5] Marek Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Uniwersytet Śląski Państwowe Wydawnictwo Naukowe (1985) 1-523. Birkhäuser (2009):  
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-7643-8749-5>  
2, 6
- [6] Saharon Shelah. Can you take Solovay's inaccessible away?, *Israel Journal of Mathematics*, 48 (1984), 1-47.    4