射影代数，κ-距離付け可能空間からコーエン・モデルへ[*1]

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)[*2]
中部大学 工学部

1 はじめに

こう書くと日本では欲張りだと非難されてしまうかもしれないが，私は，日頃，興味のある多様なテーマについて（可能なかぎり）そのすべてに関した研究を幅広く行いたいと思っていて，また，そのように努めてもきたつもりでもある．しかし，ふりかえってみると，この講演の表題で表されるようなテーマに関しては，ひとつながりの文脈に総括できるような研究を，長い時間をかけて[*3]行なってきたと言うこともできそうである．

ただし，ひとつながりの文脈とは言っても，初期の研究とそれから派生したより最近の研究では，見かけや動機付けは全く異なるものになっている．

初期の研究における目標は，射影ブール代数を包含するいくつかのブール代数のクラスに関する普遍代数的な色合いを持つ問題の解明や，これらのクラスの位相的なデュアルとして得られる空間に関する E.V. Ščepin の遺した問題の解決といった，集合論の代数的または位相空間論的な問題への応用であったのに対し，この研究に連なる最近の仕事では，コーエン (Cohen) 拡大を含む集合論のモデルの公理的な特徴付け，という純粋に集合論的な問題が扱われている．

[*1] 本稿は 2007 年度日本数学会秋季総合分科会の「数学基礎論と歴史」分科会で行われた特別講演の予稿の updated version （2007 年 12 月 27 日版）である．

[*2] fuchino@isc.chubu.ac.jp
Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 19540152.

[*3] [6] の結果の一部を発表した，1992 年ポーランドのカトヴィッツでのトポロジーの研究集会から数えると，もうかれこれ 15 年越しの研究ということになる．

そこで，本講演では，これらの研究の関連性について論じ，それらの研究の推移の軌道をたどりながら概説を試みたいと思う．

2 射影ブール代数と Freese-Nation Property

ブール代数 B が射影的 (projective) であるとは，他のカテゴリーでと同様，次のような可換図式が常に成り立つことである:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ B \arrow[ur, dashed] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright", shift right=3ex] & A \end{tikzcd}$$

射影ブール代数は次のような特徴付けが可能である．

定理 2.1 無限ブール代数 B に対して[*4]，次は同値である:

(1) B は射影的である．

(2) B は自由ブール代数のレトラクトである（つまり， $B \underset{}{\overset{\circlearrowright_{id}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fr}|B|$ が成り立つ）．

(3) $B \oplus \mathrm{Fr}|B|$ は自由ブール代数である[*5]．

(4) (R. Haydon, S. Koppelberg [18]) 濃度が $|B|$ 未満の B の部分代数の連続な[*6]上昇列 $(B_\alpha)_{\alpha<\delta}$ で，(i) すべての $\alpha < \delta$ に対し，$B_\alpha \leq_{\mathrm{rc}} B$; (ii) すべての $\alpha < \delta$ に対し，$B_{\alpha+1}$ は B_α 上可算生成される; (iii) $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha = B$, となるものが存在する．

ここに，$A \leq_{\mathrm{rc}} B$ は「A は B の relatively complete な部分代数である」 を表している．A が B の relatively complete な部分代数とは，A は B の部分代数で，すべての $b \in B$ に対し $\{a \in A : a \leq b\}$ が（ A の中に）最大元を持つことである．

---

*4 定理 2.1,(1),(2),(3) は有限のブール代数に対しても成立する．特にすべての有限ブール代数は射影的である．

*5 ブール代数 A, B に対し，$A \oplus B$ で A と B の自由積をあらわす．

*6 （順序数の添字を持つ）集合列 $(X_\alpha)_{\alpha<\delta}$ が連続な上昇列である，とは，すべての $\alpha < \beta < \delta$ に対し，$X_\alpha \subseteq X_\beta$ で，すべての極限順序数 $\gamma < \delta$ に対し，$X_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ が成り立つことである．

R. Freese と J.B. Nation は，[5] で射影的束の代数的特徴付けを与えているが，この特徴付けの中で用いられた射影的束の性質のうち，L. Heindorf ([14]) が Freese Nation Property と名付けた次の性質は，ブール代数や，もっと一般的に半順序でも考えることのできるものとなっている．

ブール代数（あるいはもっと一般に半順序） B が Freese-Nation Property（以下 FNP とも略）を満たす (あるいは，持つ）とは，写像 $f : B \to [B]^{<\aleph_0}$ で[*7]，次の性質を持つものが存在することである:

(2.1)　任意の $a, b \in B$, $a \leq b$ に対し，$c \in f(a) \cap f(b)$ で $a \leq c \leq b$ となるものが存在する．

ブール代数のカテゴリーでも射影的なオブジェクトは FNP を満たす．

定理 2.2 すべての射影的ブール代数は FNP を持つ．

証明． 自由ブール代数が FNP を持つことはすぐに示せる（$b \in \mathrm{Fr}X$ に対し，$x \in [X]^{<\aleph_0}$ を b を生成するようにとり，$f(b)$ として x の生成する $\mathrm{Fr}X$ の有限部ブール代数をればよい）．また B が FNP を持つときには，B のレトラクトも FNP を持つことは直ちに確かめられるから，定理 2.1, (2) により，本定理の主張が結論できる．　❑ (Theorem 2.2)

FNP を持つブール代数のクラスは射影的なブール代数のクラスとは一致しない:

定理 2.3 (L.B. Shapiro [23]) すべての $\kappa > \aleph_1$ に対し，濃度が κ の，射影的でない FNP を持つブール代数が存在する．

次節の 系 3.2 で見るように，“$\kappa > \aleph_1$” という条件は本質的である．

3　Freese-Nation Property を持つブール代数の特徴付けと κ-距離付け可能空間

1990 年代の初めに L. Heindorf は FNP を持つブール代数の全体が，κ-距離付け可能なブール空間の双対ブール代数の全体と一致することに気付いた．

---

*7 集合 X に対し $[X]^{<\aleph_0}$ で X の有限部分集合の全体からなる集合（族）を表す．

ここで，コンパクト・ハウスドルフ空間 X が κ-距離付け可能とは，以下の性質 (3.1)〜(3.4) を持つ写像 $\rho : X \times RC(X) \to \mathbb{R}$ が存在することである．だたし，$RC(X)$ は X 正則閉集合（開集合の closure）の全体をあらわす．

(3.1) すべての $x \in X$ と $F \in RC(X)$ に対し，
$x \in F \Leftrightarrow \rho(x, F) = 0$;

(3.2) すべての $x \in X$ と，$F \subseteq G$ となる $F, G \in RC(X)$ に対し，
$\rho(x, F) \geq \rho(x, G)$ が成り立つ;

(3.3) すべての $F \in RC(X)$ に対し，写像 $X \ni x \mapsto \rho(x, F) \in \mathbb{R}$ は連続である;

(3.4) すべての $\subseteq$ に関する $RC(X)$ での上昇列 $(F_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ に対し，
$\rho(x, \overline{\bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha}) = \inf\{\rho(x, F_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ である．

E.V. Ščepin による [20], [21], [22] などでの，κ-距離付け可能な空間の特徴付けに関する結果は，Heindorf の発見により，FNP を持つブール代数の特徴付けに翻訳できることになる:

定理 3.1 (L. Heindorf, [14] を参照) 無限ブール代数 B に対し，次は同値である:

(1) B は FNP を持つ．

(2) B の dual space は κ-距離付け可能である．

(3) $\{A \in [B]^{\aleph_0} : A \leq_{\mathrm{rc}} B\}$ は $[B]^{\aleph_0}$ の club な部分集合を含む[*8]（この性質を「B は openly generated である」と表現することもある．）．

(4) B の濃度 $|B|$ 未満の部分代数の連続的な上昇列 $(B_\alpha)_{\alpha<\delta}$ で，(i) すべての $\alpha < \delta$ に対し，$B_\alpha \leq_{\mathrm{rc}} B$; (ii) $\bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha = B$, となるものが存在する．

[*8] 無限集合 X に対し $[X]^{\aleph_0} = \{u \subseteq X : u$ は可算 $\}$ とする．より一般的には κ を基数とするとき，$[X]^\kappa$ で $\{u \subseteq X : |u| = \kappa\}$ をあらわす．$[X]^{\leq\kappa}$, $[X]^{<\kappa}$ も同様に定義される．

$S \subseteq [X]^{\aleph_0}$ が club (closed unbounded) とは，(i) すべての $u \in [X]^{\aleph_0}$ に対し $u \subseteq v$ となる $v \in S$ が存在し，(ii) すべての S の元の可算な長さの上昇列 $(u_\alpha)_{\alpha<\delta}$ に対し，$\bigcup_{\alpha<\delta} u_\alpha \in S$ となることである．非可算な正則基数 κ に対する $[X]^\kappa$ の club 部分集合も同様に定義される．

上の定理の (3) と 定理 2.1 から直ちに次の 2 つの系が得られる:

系 3.2 FNP を持つブール代数 B が $|B| \leq \aleph_1$ を満たすなら B は射影的である.

系 3.3 (S. Fuchino, [7]) ブール代数 B に対し，次は同値である:

(1) B は FNP を持つ.

(2) $\mathbb{P}$ を濃度 $|B|$ 未満の基数を可算に collapse する σ-closed な poset とするとき，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "B は射影的" が成り立つ.

上の特徴付けに $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の組合せ論[*9]で知られている手法などを応用することで，筆者は E.V. Ščepin が [22] で挙げた未解決問題のいくつかを（ブール代数のセッティングで）解決した ([6], [7], [8]). ここでは，それらの結果のうち，[22] の Question 7 に対する解となている，FNP の $\aleph_2$-projective filteration による特徴付けに関する結果について述べることにする.

ブール代数 B が κ-projectively filtered である，ということを B の部分代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ で，次の (3.5)〜(3.10) を満たすものが存在すること，とする:

(3.5) $I = (I, \leq_I)$ は上方向に directed な半順序集合;

(3.6) $i, j \in I$ で $i \leq_I j$ なら，$B_i \leq B_j$ が常に成り立つ[*10]

(3.7) $S \subseteq I$ を，長さが κ 未満の $\leq_I$ に関する上昇列とするとき，$i^* = \sup S$ となる $i^* \in I$ が存在する.

(3.8) $S \subseteq I$, $i^* \in I$ で $i^* = \sup S$ なら，$B_{i^*} = \bigcup_{i\in S} B_i$;

(3.9) すべての B_i, $i \in I$ は射影的;

(3.10) $B = \bigcup_{i\in I} B_i$.

定理 3.1 から直ちに次が分る:

補題 3.4 すべての FNP を持つブール代数は $\aleph_2$-projectively filtered である.

FNP を持つブール代数で $\aleph_3$-projectively filtered でないものは存在する ([14], Section 6.3 を参照）.

---

*9 $[\kappa]^{<\lambda}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ とも表される.

*10 「B は C の部分代数」を $B \leq C$ であらわす.

$\aleph_2$-projectively filtered なブール代数は FNP を持つブール代数と非常によく似た性質を持つことも確かめられている ([8] を参照). しかし, $\aleph_2$-projectively filtered なブール代数が FNP を持つブール代数と一致するかどうかは集合論から独立である:

定理 3.5 (S. Fuchino [6]) $V = L$ を仮定すると, すべての weakly compact でない正則基数 κ に対し, κ-projectively filtered だが FNP を持たないような濃度 κ のブール代数が存在する.

定理 3.6 (Q. Feng, S. Fuchino [7, 8]) Fleissner の Axiom R を仮定すると, $\aleph_2$-projectively filtered なブール代数の全体と FNP を持つブール代数の全体は一致する.

ここに, Fleissner の Axiom R は [15] で RP とよばれている反映原理 (Reflection Principle) を強めたものである. 特に, Axiom R は $2^{\aleph_0} \le \aleph_2$ を帰結する. Axiom R は RP と同様に $\mathrm{MA}^+(\sigma\text{-closed})$ から導くことができる ([1]).

[7], [8] では, 上の定理 3.5, 定理 3.6 の応用として,「$L_{\infty,\aleph_2}$-projective なブール代数はすべて FNP を持つ」, という命題の集合論からの独立性も得られている.

4 Weak Freese-Nation Property とコーエン・モデルの公理的把握

Freese-Nation Property の定義での写像 f の値域を $[B]^{<\aleph_0}$ でなく $[B]^{\aleph_0}$ としたときに得られる条件は何か? というのはきわめて自然な疑問に思える.

$f : B \to [B]^{\aleph_0}$ で (2.1) を満たすようなものが存在するとき, ブール代数 B は Weak Freese-Nation Property (以下 WFN と略) を満たす (または, 持つ) と言うことにする. WFN を満たすブール代数のクラスの基本性質に関する研究は [14] や [12] で始められたが, FNP を満たすブール代数が, たとえば 定理 3.3 の意味で, 射影的なブール代数との深い関係性を保っていたのに対し, WFN を満たすブール代数の全体のクラスはそれよりずっと広いものになっており, そのことから WFN を満たすブール代数の研究の可能な方向は FNP を満たすブール代数のそれとは必然的にかなり異なるものとなることは明白である.

このことは，次のほとんどトリビアルな事実にも見ることができる:

定理 4.1 (L. Heindorf and L.B. Shapiro [14]) 濃度が $\aleph_1$ 以下のブール代数（あるいはもっと一般に半順序）は WFN を満たす．

証明． B を濃度が $\aleph_1$ 以下の半順序として，B を（重複も許して）$B = \{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と数え上げる．このとき，$f : B \to [B]^{\aleph_0}; b_\alpha \mapsto \{b_\beta : \beta \leq \alpha\}$ は (2.1) を満たす． ❑ (Theorem 4.1)

系 4.2 連続体仮説のもとで，$(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ は WFN を満たす[*11]．

「$\mathcal{P}(\omega)$ が WFN を持つ」，という命題を WFN($\mathcal{P}(\omega)$) とあらわすことにする．上で見たように連続体仮説のもとでは WFN($\mathcal{P}(\omega)$) が成り立つことはトリヴィアルであるが，連続体仮説の否定のもとでは WFN($\mathcal{P}(\omega)$) が成り立つかどうかは自明ではない問題となる．

定理 4.3 (S. Fuchino, S. Koppelberg and S. Shelah [12]) 連続体仮説を仮定する．$\kappa < \aleph_\omega$ として $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ とする[*12]．
このとき，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "WFN($\mathcal{P}(\omega)$)" が成り立つ．特に，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は，連続体仮説の否定と矛盾しない．

一方，Cohen 実数とは異なる実数の付加による連続体仮説の否定のモデルで，よく知られているものでは，すべて WFN が成り立たないことが知られている[*13]．

連続体仮説のモデルから出発して $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ の形の poset で force して得られる集合論のモデルを Cohen モデルとよぶことにする．S. Fuchino, S. Geschke, L. Soukup [11] は，Cohen モデルで成立する性質の多くが WFN($\mathcal{P}(\omega)$) から証明できることを確かめている．特に，

定理 4.4 (S. Fuchino, S. Geschke and L. Soukup [11]) WFN($\mathcal{P}(\omega)$) が成立ち， さらに，$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ であるか，または $\neg 0^\sharp$ が成り立つなら，Cichoń's

---

[*11] 集合論では ω で自然数の全体をあらわす．$\mathcal{P}(\omega)$ は自然数の全体の上の冪集合で，これはよく知られているように集合算の包含関係を順序として考えたときにブール代数になる．

[*12] $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ は κ 個の Cohen 実数を ground model に付加する強制法である．Cohen 実数や強制法についは，詳しくは，[19] を参照されたい．

[*13] たとえば次の 定理 4.4 で見るように，このようなモデルが Cohen モデルとは異なる Cichoń's diagram の付値を実現するときには，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) はそこでは成立ち得ない．

diagram や Van Douwen's diagram にあらわれるすべての基数不変量は，同じ連続体濃度を持つ Cohen モデルでのそれらの値と一致する．

特に上の定理の仮定のもとで，拡張された Cichoń's diagram は次のような付値を与えられることになる（[11] に掲載された図式の引用）：

$$
\begin{tikzcd}
cov(null) \arrow[d] & non(meager) \arrow[l] \arrow[d] & shr(meager) \arrow[l] \arrow[d] & cof(meager) \arrow[l] \arrow[d] & cof(null) \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \mathfrak{b} \arrow[d] & \mathfrak{b}^* \arrow[l] & \mathfrak{d} \arrow[l] \arrow[d] & \\
add(null) & add(meager) \arrow[l] & & cov(meager) \arrow[ll] & non(null) \arrow[l] \\
 & \Leftarrow & \aleph_1 & 2^{\aleph_0} & \Rightarrow
\end{tikzcd}
$$

このような結果から，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) を，Cohen モデルの特徴の多くを捉えた，言わば，"Cohen モデルの公理" のようなもの，としてとらえることも可能であることがわかる．

ここでもう一度 定理 4.3 にもどると，そこで，"$\kappa < \aleph_\omega$ として $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ とする" という κ に関する制限が果されていた．$\kappa \geq \aleph_\omega$ の場合には $\mathbb{P}$ が WFN($\mathcal{P}(\omega)$) を force するかどうかは,（巨大基数公理の無矛盾性の仮定のもとで）集合論から独立である: S. Fuchino と L. Soukup [13] は $V = L$ （の満たす性質のうちのいくつか）が成り立っているような ground model から出発したときには，この答は肯定的であることを示している．一方，$\aleph_\omega$ での Chang's conjecture と GCH の成り立つモデルから出発して，Hechler 実数を 1 つ付加するという下準備をして得られたモデルを ground model とすると（ここでも GCH は成立する），ここで $\mathrm{Fn}(\aleph_\omega, 2)$ で force したときには，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は成立しない (S. Fuchino, S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup [10])．

WFN を持つブール代数は，定理 3.3 と類似の特徴付けが可能である:

定理 4.5 (S. Fuchino, S. Koppelberg and S. Shelah [12]) 無限ブール代数 B に対し，次は同値である:

(i) B は WFN を満たす．

(ii) $\{C \in [B]^{\aleph_1} : C \leq_\sigma B\}$ は club な部分集合を含む．

ここで $C \leq_\sigma A$ は， C が A の σ-部分代数であることをあらわす．C が A の σ-部分代数である，とは，C は A の 部分代数 で，すべての $a \in A$ に対し，C のイデアル $\{c \in C : c \leq a\}$ が可算な生成系を持つことである．

上の特徴付けから，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) は $\mathcal{P}(\omega)$ の “良い” 部分代数（ここでは σ-部分代数）が “沢山” （ここでは club many に）存在することを主張する公理になっていることがわかる．“良い” と “沢山” の別の解釈を採用すると，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) の様々なバリアントが得られることになりそうであるが，実際，A. Dow と K.P. Hart は [4] で，[13] ですでに隠伏的に用いられていた，上のような意味での WFN($\mathcal{P}(\omega)$) のバリアントを公理として抽出し，これを IDP （ideal property） と命名している．IDP は WFN を弱めたものとなっている．また，I. Juhász と K. Kunen は [16] で，SEP と名付けられた，これも “良い”–“沢山” 系列の公理を導入している．S. Fuchino と S. Geschke は [9] で，SEP が IDP から導き出されることが直ちに分るような特徴付けを与え，S. Fuchino, S. Geschke, L. Soukup [11] の結果のほとんどが実はすでに SEP から導き出されることを示している．一方，WFN($\mathcal{P}(\omega)$) $\rightarrow$ IDP と IDP $\rightarrow$ SEP の implications は両方とも分離できることが知られている（[13] と [9] を参照）[*14]．

これらの “良い”–“沢山” 系列の公理とは独立に，I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy は [17] で $\mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\kappa)$, $\hat{\mathrm{C}}^{\mathrm{s}}(\kappa)$, $\mathrm{F}^{\mathrm{s}}(\kappa)$ とよばれる，やはり Cohen モデルで成立する公理群を導入している（κ は $\aleph_2$ 以上の正則基数）．これらの公理は，$\mathcal{P}(\omega)$ がブール演算に関して，ある種の “一様性” を持っていることを主張する命題となっている．I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy の公理群と “良い”–“沢山” 系列の公理群の関係は，当初明らかでなかったが，S. Shelah は，2002 年に SEP と $\mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\kappa)$ $\kappa \geq \aleph_2$ を補間する原理（以下のダイヤグラムでは Princ と呼ばれている）を導入して，$\mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\kappa)$ と “良い”–“沢山” 系列の公理群の関連を明らかにしている．

筆者は，I. Juhász, L. Soukup, Z. Szentmiklóssy の公理群を，（射影集合として）定義可能な $\mathcal{P}(\omega)$ 上の関係に関する一様性を主張する公理に拡張することを思いつき，これらを Homogeneity Principle HP(κ), Injectivity Principle

---

*14 「命題の implication $\varphi \rightarrow \psi$ が分離できる」，とは，ここでは，この implication の逆 $\psi \rightarrow \varphi$ が（集合論の公理系から）証明できないこと，あるいはもう少し具体的には，φ の否定と ψ を（同時に）満たすような集合論のモデルが（ある場合には巨大基数公理の無矛盾性の仮定のもとで）構成できること，を意味している．

IP(κ,λ) と名付けた．これらの新しい公理群とその帰結は S. Fuchino と J. Brendle により [2] で詳細に調べられている．$\kappa=\aleph_2$ に対する，ここで述べた公理の間の implication のネットワークは次のようにまとめることができる:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \mathrm{WFN}(\mathcal{P}(\omega)) \arrow[d] \\
 & \mathrm{IP}(\aleph_2,\aleph_1) \arrow[r, phantom] \arrow[dr] \arrow[dddl] & & & & \mathrm{IDP} \arrow[d] \\
 & & \mathrm{IP}(\aleph_2,\aleph_2) \arrow[dr] & & & \mathrm{SEP} \arrow[dd] \\
 & & & \mathrm{HP}(\aleph_2) \arrow[ddll] \arrow[ddr] & & \\
 \mathrm{F^s}(\aleph_2) \arrow[dr] & & & & & \textsc{Princ} \arrow[dllll] \arrow[dl] \\
 & \hat{\mathrm{C}}^{\mathrm{s}}(\aleph_2) & & & \mathrm{C^s}(\aleph_2) &
\end{tikzcd}
$$

[2] では，ここで述べた諸公理と bounding number $\mathfrak{b}$ のバリエーションである $\mathfrak{b}^{\uparrow}$, $\mathfrak{b}^{h}$, $\mathfrak{b}^{*}$ $\mathfrak{do}$ のサイズの間の関係も調べられており，それらの implications のネットワークと implications の分離の可能性をまとめたものが，次節の後に置かれた，[2] からの図式である（[2] では，この以下の (1)〜(8) の分離を実現するモデルの構成法が述べられているが，ここではそれは割愛する）．

5　集合論のモデルへのさらなる公理的なアプローチ

WFN が Cohen モデルの公理化とすると， HP(κ) や IP(κ,λ) は比較的小さな（単一の） poset のコピーの side-by-side product による generic 拡大として実現できるモデルの公理化と言えそうであることが，[2] で得られた結果から窺われる．

forcing によって得られる集合論のモデルの公理的な把握と，そのモデルの理論の公理からの再編成という方向の研究としては，Sacks モデルの性質を

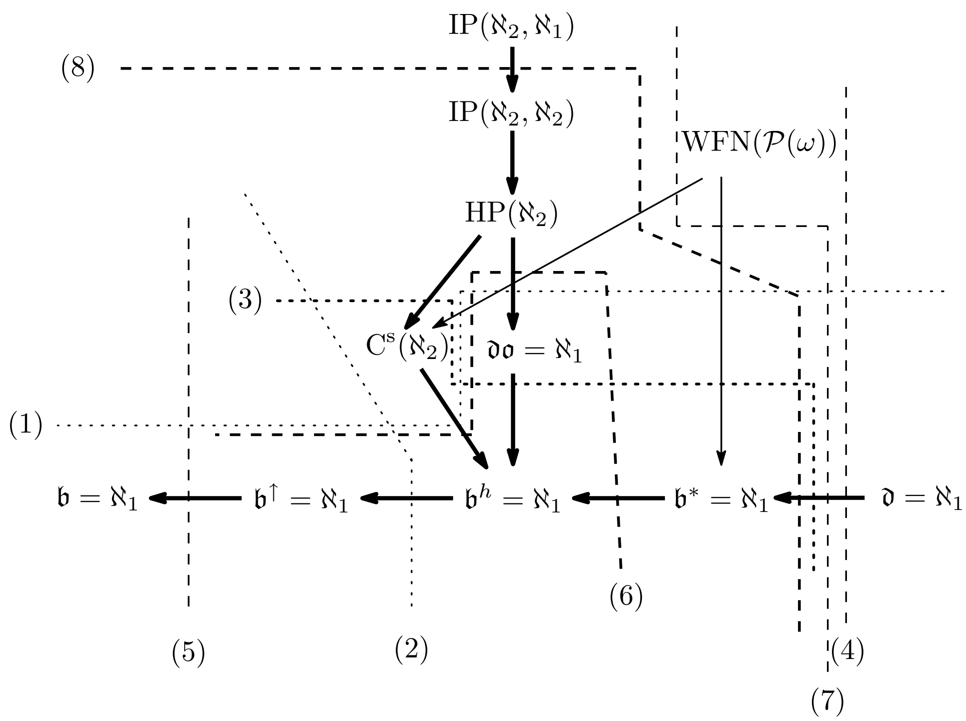
このような観点から研究した，K. Ciesielski と J. Pawlikowski による [3] もある．

しかし，この方向では，まだ，研究すべき課題が多く残っているように思える．

たとえば， random モデル（measure theoretic side-by-side product により random 実数を CH モデルに多数付加して得られるモデル）をこのような視点からとらえようとしたとき，公理の候補になるのは，

「ω_1-scale の存在」 $+\ \alpha$

の形のものであろうが，この "α" としては，前節であげた [2] での公理を採用することはできない．これは，measure theoretic side-by-side product が通常の side-by-side product とよく似た一様構造を持っていることを考えると不思議であるが，K. Kunen による結果から，ランダム・モデルでは $\mathrm{C}^{\mathrm{s}}(\kappa)$ が成り立たないことが証明できる．講演では，時間の余裕があれば，"α" の候補となりそうな組合せ論的命題についても議論したいと思う．



参考文献

[1] R.E. Beaudoin, Strong Analogues of Martin's Axiom Imply Axiom R, The Journal of Symbolic Logic, 52 (1987), 216–218.

[2] J. Brendle and S. Fuchino, Coloring ordinals by reals, to appear in Fundamenta Mathematicae.

[3] K. Ciesielski and J. Pawlikowski, *The Covering Property Axiom, CPA*, Cambridge University Press (2004).

[4] A. Dow and K.P. Hart, Applications of another characterization of $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, Topology and its Applications, 122, 1-2, 105–133 (2002)

[5] R. Freese and J.B. Nation, Projective lattices, Pacific Journal of Mathematics, 75 (1978), 93–106.

[6] S. Fuchino, Some problems of Ščepin on openly generated Boolean algebras, Proceedings of the Tenth Easter Conference on Model Theory Berlin, Fachbereich Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin (1993), 14–29.

[7] ____, Some remarks on openly generated Boolean algebras, Journal of Symbolic Logic, Vol. 59 (1994), 302–310.

[8] ____, Set-theoretic aspects of nearly projective Boolean algebras, Appendix to [14] (1994), 165–194.

[9] S. Fuchino and S. Geschke, Some combinatorial principles defined in terms of elementary submodels, Fundamenta Mathematicae 181, (2004) 233-255.

[10] S. Fuchino, S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, On the weak Freese-Nation property of complete Boolean algebras, Annals of Pure and Applied Logic, 110 (1-3) (2001) 89-105.

[11] S. Fuchino, S. Geschke and L. Soukup, On the weak Freese-Nation property of $\mathcal{P}(\omega)$, Archive for Mathematical Logic, Vol.40, (2001) 425-435.

[12] S. Fuchino, S. Koppelberg and S. Shelah, Partial orderings with the weak Freese-Nation property, Annals of Pure and Applied Logic 80 (1996), 35–54.

[13] S. Fuchino and L. Soukup, More set-theory around the weak Freese-Nation property, Fundamenta Matematicae 154 (1997), 159–176.

[14] L. Heindorf and L.B. Shapiro, *Nearly Projective Boolean Algebras*, Springer Lecture Notes of Mathematics 1596, (1994), I–X, 1–202.

[15] T. Jech, *Set theory, The Third Millennium Edition*, Springer-Verlag (2002).

[16] I. Juhász and K. Kunen, The Power Set of ω, Elementary submodels and weakenings of CH, Fundamenta Mathematicae 170 (2001), 257–265.

[17] I. Juhász, L. Soukup, and Z. Szentmiklóssy, Combinatorial principles from adding Cohen reals, in Logic Colloquium 95, Haifa, Israel, Springer (1998), 79–103.

[18] S. Koppelberg, Projective Boolean Algebras, in: *Handbook of Boolean Algebras*, J. D. Monk with R. Bonnet(Eds.) Vol.3, (North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1989), 741–773.

[19] K. Kunen, *Set Theory*, North-Holland (1980).

[20] E.V. Ščepin, Topology of limit spaces of uncountable inverse, Russian Mathematical Surveys 31 (1976), 155–191.

[21] ____, On κ-metrizable spaces, Math. USSR Izvestija 14, 407–440, (1980).

[22] ____, Functors and uncountable powers of compacta, Russian Mathematical Surveys 36 (1981), 1–71.

[23] L. Shapiro, The space of closed subsets of $D^{\aleph_2}$ is not a dyadic bicompact, Soviet Math. Doklady, 17 (1976), 937–941.