

最終講義 連続体問題

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Graduate School of System Informatics, Kobe University, Japan
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://fuchino.ddo.jp/index-j.html>

(2020 年 12 月 23 日 (11:59 JST) version)

2020 年 10 月 29 日 (JST, 神戸大学工学部棟にて収録)

このプレゼンテーションは, [up \$\LaTeX\$](#) 上の [beamer](#) class でタイプセットしたものです.
本スライドの最新版は 以下から download できます:

<http://fuchino.ddo.jp/slides/kobe2020-10-29-pf.pdf>

* 本講演は Kakenhi Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 20K03717 の支援を受けている研究プロジェクト「集合論的多世界宇宙の視点での連続体問題の解決」での研究に関連する話題を含みます.

- ▶ エルデシュ・ポール (Paul Erdős)
(1913 (大正 2 年) – 1996 (平成 8 年))
は 20 世紀を代表する数学者の一人です。彼は、亡くなる直前まで、数学研究の前線で活躍した、数学者のロールモデルとなるべき人です。
- ▶ 高齢者 (≥ 40 才?) にとって、数学の研究は、脳の劣化との戦いです。
- ▷ エルデシュは、生前、「これでやっと頭が悪くなってゆくことがなくなった」と墓碑に彫ってほしいと言ったということです。

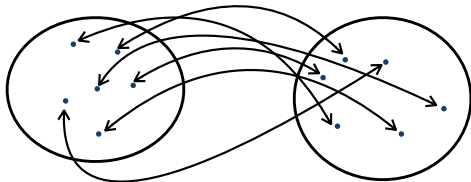


- ▶ 私の数学研究の、大きな motivations の一つは、
 - ・ (数学的な) 無限を理解したい
ということです.
- ▶ 数学、特に、19 世紀以降の数学では、
 - ・ 自然数の全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
 - ・ 実数の全体 $\mathbb{R} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$,
 - ・ 実数列 a_i ($i \in \mathbb{N}$) (つまり, $a_1, a_2, a_3, \dots$)
 - ・ ある性質 P を持つ実数列の全体

など、要素や成分が無限にある対象を、積極的に扱かう必要があります.

- ▷ 一方、数学的な無限が、うまく数学の言葉に乗せることのできない対象かもしれない、という表明は、ガリレオの 1638 年 (寛永 15 年 — 江戸時代前期) の著作に見出せます.

- ▶ 2つの集合は、互いの要素 (たち) の間に一対一の対応がつけられるときに同じ**サイズ** (**濃度**) を持つという.



- ▷ 集合の濃度の概念は、**カントル** (Georg Cantor, 1845 (弘化2年) – 1918 (大正7年)) によって、1870年代 (明治10年前後) に導入された.



- ▶ 自然数の全体 $\mathbb{N}$ から、偶数の全体 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ への 1 対 1 対応が存在する:

自然数の全体:	1	2	3	4	5	6	...	n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
偶数の全体:	2	4	6	8	10	12	...	$2n$	...

- ▶ 自然数の全体 $\mathbb{N}$ から、二乗数の全体 $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ への 1 対 1 対応が存在する:

自然数の全体:	1	2	3	4	5	6	...	n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
二乗数の全体:	1	4	9	16	25	36	...	n^2	...

- ▷ カントルの用語を用いると、
- ・ 自然数の全体と、偶数の全体は濃度が等しい
 - ・ 自然数の全体と、二乗数の全体は濃度が等しい

無限のパラドックス (3/3)

連続体問題 (5/20)

- ▷ カントルの用語を用いると,
 - ・ 自然数の全体と、偶数の全体は濃度が等しい
 - ・ 自然数の全体と、二乗数の全体は濃度が等しい
- ▶ これは、ユークリッドの「全体は部分より大きい」という公準に抵触するのではないか？

Simplicio: じゃあ結論はなんなんですか？

Salviati: 次のように言うしかない: 数の全体は無限である, 自乗数の全体も無限である, 平方根の全体も無限である; 自乗数たちの多さは数たちの多さより少なくない; 後者の方が多いわけでもない; よって, 等しい, 大きい, 小さい, という形容は無限に対しては適用できず, 有限の量のみ適用できるのである.

Galileo Galilei

(1564 (天文 33 年) – 1642 (寛永 19 年)),
『新科学対話』 (1638 (寛永 15 年))

(講演者による英訳からの再訳)



- ◀ ◻ ▶ ◀ ▢ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

- ▶ 実数の全体が可算でないこと (これは実数の全体が **非可算** であるとも表現される) は、カントルによって、**1873 年 12 月** (明治 6 年 12 月) に得られている。
- ▶ 1 つ前のスライドで説明した証明のアイデアは、現在では **カントルの対角線論法** と呼ばれている。
- ▶ カントルの対角線論法の一般化を用いると、次が証明できる:

定理. 任意の無限集合 X に対し、 X の要素を添字として使って数え上げられない (つまり X より濃度の真に大きい) 集合が存在する。 X の冪集合はそのようなものの一つである。

- ▶ 上の定理と、超限帰納法を組み合わせると、無限集合の濃度を小さい順に数え上げることができる。最小の無限の濃度は自然数のそれ (**可算濃度**) で、これを、ヘブライ語のアルファベットの最初の文字 $\aleph$ を用いて $\aleph_0$ とあらわし、順に、

$$\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots, \aleph_n, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \dots$$

と続ける。 $\aleph_1$ は最小の非可算濃度で、 $\aleph_\omega$ は $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$ の極限である。

- $$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_n, \dots \quad \mathcal{H}_\omega, \mathcal{H}_{\omega+1}, \mathcal{H}_{\omega+2}, \dots$$

- ▶ カントル自身は、 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ であることを信じて、その証明を試み続けた。この等式は、**連続体仮説** (Continuum Hypothesis) と呼ばれており、**CH** と略記されることも多い。

- 定理 1. (ゲーデル)** 数学の公理系が矛盾しないなら、それに連続体仮説を付け加えても矛盾しない.

-
- A black and white portrait of a man with dark hair, wearing round-rimmed glasses, a dark suit jacket, a white shirt, and a dark tie. He is looking directly at the camera with a neutral expression. The background is a plain, light-colored studio backdrop.

- 定理 2. (コーエン)** 数学の公理系が矛盾しないなら，それに連続体仮説の否定を付け加えても矛盾しない.

- 

- ▶ 連続体問題は、1960 年代に、ある意味で解決されている。
- ▶ 前のスライドで述べたように、(数学が矛盾しない限り)、通常の数学からは、連続体仮説は証明もできないし、その否定を証明することもできない結論できるが、このことは **連続体仮説は数学の公理から独立である** と表現される。
- ▶ コーエンの研究が引き金になって、集合論はその後爆発的な進化を遂げたし、現在でも遂げつつある。
- ▷ コーエンの研究の直後、ソロベイ (Robert Solovay, 1938 (昭和 13 年) -) により、連続体の濃度 $2^{\aleph_0}$ は、 $\aleph_0$ でありえない、 $\aleph_\omega$ でもありえない、など König の結果による制限を除くと、それ以外のどの $\aleph_\alpha$ としても矛盾しないことが示された。たとえば:

数学の体系が無矛盾なら、それに $2^{\aleph_0} = \aleph_{2020}$ という主張を加えた体系も無矛盾である。

数学の体系が無矛盾なら、それに $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$ という主張を加えた体系も無矛盾である。

- ▶ このような連続体仮説の独立性の結果をもって、この問題は解決した、と看做されることが少なくないが、ゲーデルは、これに対して異議を唱えている。

この (数学の公理系が記述すべき) 実存では、カントルの仮説は正しいか正しくないかのいずれかであるはずで、その仮説の、今日知られている公理たちからの決定不可能性は、これらの公理がこの実存の完全な記述を含んでいない、ということを意味するにすぎないからである; しかも、このような確信は、決して奇想天外なものではない。現在の形の公理系から決定できない問題でも、問い答えの決定を得ることは (以下のような意味で) 可能だからである。

— Kurt Gödel, What is Cantor's continuum problem (1946/64)
講演者訳 (括弧内は講演者による (文脈からの) 補筆)

- ▶ 数学の公理系を正しいと言える公理を付け加えて拡張し、そこで連続体仮説をはじめとする重要な命題の真偽を確定する、という方針は、現在では **ゲーデルのプログラム** と呼ばれている。

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

- ▶ コーエンが連続体仮説の否定の無矛盾性の証明のために導入した**強制法**は、集合論のモデルを、拡張して様々な付加的な性質を持つ集合論のモデルを作る方法であるが、この方法は数理論理学の手法を用いると、我々の“住んでいる”数学のユニヴァースを拡張する方法と読み替えることができる。
- ▷ この読み替えで見たとき、我々の“住んでいる”数学のユニヴァースは、このユニヴァースの拡張によって性質が大きく変らない安定したものになっている (ことが好ましい) であろう。**強制法での絶対性**はそのような直観をサポートする原理である。
- ▶ 一方、強制法で得られる、集合論のモデルの総体自体を、数学の世界のパラレルワールドとして見ることもできる。
- ▷ この見方での多世界宇宙には (これは **集合論的多世界宇宙** と呼ばれる) 数学のユニヴァースとしてふさわしいものもあれば、人工的なものと看做すべきものもあえるが、数学のユニヴァースとしてふさわしいものとみなせるものが複数あるという可能性もある。

- ▶ 数学のユニヴァースとしてふさわしい性質を持つものが複数あるという可能性も視野に置いて連続体問題の解決を考えると、講演者は、その一つの可能な解決となっている結果を、神戸大学の酒井拓史氏と、私の PhD 学生だった Dr. André Ottenbreit Maschio Rodrigues 氏との共著の研究で得ている。
- ▶ 数学の公理系に加えるべき新しい公理の正しさのガイドラインとして、 $2^{\aleph_0}$ は豊かな数学的構造を包含するものになっているべきである、という直観があげられる。この直観の自然な表現の一つとして、「無限構造である性質が実現されたときには、その構造の部分構造で連続体濃度以下、あるいは未満の大きさを持ち、同じ性質を実現するものが存在する」という形の原理が考えられる。これを、連続体濃度以下への **反映原理** と呼ぶことにする。

- ▶ 「無限構造である性質が実現されたときには、その構造の部分構造で連続体濃度以下、あるいは未満の大きさを持ち、同じ性質を実現するものが存在する」という形の反影原理は、ここで考える構造の範囲や、“ある性質”の範囲を指定することで様々なヴァリエーションがありえる。そのなかのいくつかは、既に数学の公理から導かれ、他のいくつかは、矛盾する。

定理 3. (S.F, H. Sakai, A. Ottenbreit Maschio Rodrigues) 弱い二階の論理のヴァリエーションである stationary logic と呼ばれる論理での Löwenheim-Skolem の定理として記述できる連続体濃度以下/未満への反映原理として記述できる原理が成り立つとすると、この原理の細部の妥当な設定の仕方により、(1) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ または (2) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ または (3) $2^{\aleph_0}$ は非常に大きなものになる。

- ▶ Löwenheim-Skolem 定理は、数学の通常の公理系で証明できる:

定理 4. (Löwenheim-Skolem の定理) 任意の (可算な言語に対する) 無限数学構造 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A}$ のサイズを κ として, $\lambda \leq \kappa$ となる任意の無限濃度に対し, $\mathfrak{A}$ のサイズが λ の部分構造 $\mathfrak{B}$ で, 1 階の論理で $\mathfrak{A}$ と区別できないようなものが存在する.

- ▶ 次の Löwenheim-Skolem 定理の拡張は, まだ通常の数学の体系で成り立つ.
- ▷ $L(Q)$ で通常の 1 階の論理に, “非可算個の x が存在して ... が成り立つ” ということを表現する新しい量化子を加えて得られる論理とする.

定理 5. (Löwenheim-Skolem の定理の拡張) 任意の (可算な言語に対する) 無限数学構造 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A}$ のサイズを κ として, $\lambda \leq \kappa$ となる任意の 非可算無限濃度 に対し, $\mathfrak{A}$ のサイズが λ の部分構造 $\mathfrak{B}$ で, $L(Q)$ で $\mathfrak{A}$ と区別できないようなものが存在する.

- ▶ 我々の結果は, この Löwenheim-Skolem の定理の拡張の更なる拡張となっているような命題についての三分律となっている.

集合論的多世界宇宙的な連続体仮説の最終的な解決に向けて 連続体問題 (19/20)

- ▶ 定理 3. での反映原理による三分律は、更に、Laver-generically large cardinal と名付けられた、潜在的な巨大基数が存在することを主張する公理によって説明できる.
- ▶ S.F, H. Sakai, A. Ottenbreit Maschio Rodrigues の結果での反映原理を、この Laver-generically large cardinal のアイデアにより、強制法での絶対性と融合できないか、というのは現在考えている問題の一つである.
- ▶ 我々の研究はウディンの研究と直接抵触するものではないが、ウディンの研究とどのように融合できるのか／できないのか、ということも今後の大きな問題として残っている.



(故) 竹内外史先生と講演者 (2002 年 11 月 3 日, 名古屋大学にて)



(故)角田譲先生, 新井敏康氏 (現 東京大学教授), 依岡輝幸氏 (現 静岡大学准教授), 講演者
(2009年10月16日, 神戸にて)

Thank you for your attention!

Grazie per l'attenzione!



Thank you for your attention.

Dziękuję za uwagę.