

Multiverse reflected down to the Set-Theoretic Geology

Sakaé Fuchino (渚野 昌)

Kobe University, Japan

<https://fuchino.ddo.jp/index.html>

(2026 年 9 月 3 日 (09:18 JST) printer version)

► 2026 年 9 月 3 日 (17:15 ~ 17:30 JST):

日本数学会秋季総合分科会 2026

数学基礎論および歴史分科会

The following slides are typeset using $\text{up}\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ with `beamer` class, and
presented on `GoodReader v.6.0.1230`

The most up-to-date version of these slides is downloadable as
<https://fuchino.ddo.jp/slides/multiverse-in-geology-mathsoc2026-pf.pdf>



Multiverse reflected down to the Set-Theoretic Geology — Outline

Multiverse (2/12)

- ▷ Outline
- ▷ 集合強制法多世界宇宙 (Set-generic Multiverse)
- ▷ 集合強制法多世界宇宙のモデル $\mathcal{MV}_0^M$
- ▷ Steel の多世界宇宙モデル $\mathcal{MV}_{ST}^{M,G}$
- ▷ The Super- $\mathcal{C}^{(\infty)}$ -LgLCAA for hyperhuge
- ▷ 多世界宇宙の geology への反映 (reflection)
- ▷ Open Problems and reference

- [2] S.F., Iterated forcing, Lecture note (2018).

- ▶ 矛盾の回避の一つの方法は，“ V の p.o. $\mathbb{P}$ による，ある generic-拡大 $V[G]$ で φ が成り立つ”を“ある $p \in \mathbb{P}$ に対し， $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ ”と読み換えることである。
- ▷ しかしこの「読み換え」は meta mathematical な解釈を含んでいるため，これでは，集合論的多世界宇宙の直接的な解釈とはいいたいものになってしまっているし，generic set G に関する features は考察から抜け落ちてしまう。
- ▶ この「すべての集合からなるユニヴァースの更なる拡張」の問題を回避するために，ZFC または，ZFC の十分に大きな fragment の可算な推移的モデル M をとり，

$$\mathcal{MV}_0^M := \{N : N \text{ is a generic extension of a ground of } M\}$$

を集合強制法多世界宇宙のモデルとしてとる．ということが考えられる．

- ▷ このモデルは，可算構造からなる toy model でしかない (“本物”の multiverse との関連性が不明である — ただし，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して， $M \equiv_{\Sigma_n} V$ とすることはできる).

MV_0^M は, それが toy model であることのみでなく, それが upward closed でない, という問題も残っている.

Theorem 1. (H.Woodin, see Hamkins [3]) For a countable transitive model M of ZFC and $\mathbb{P} \in M$ with $M \models \mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, \omega)$, there are $(M, \mathbb{P})$ -generic $\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1$ such that $M[\mathbb{G}_0]$ and $M[\mathbb{G}_1]$ do not have any common extension. 

► J.Steel は, この問題を解決するために次のような多世界宇宙のモデルを導入している [4], [5]:

▷ Let M be an arbitrary countable transitive model of ZFC and let $\mathbb{G}$ be a $(M, \text{Col}(\omega, \text{On}^M))$ -generic filter.

$$MV_{ST}^{M,G} := \{N : N \text{ is a ground of } M[\mathbb{G} \restriction \alpha] \text{ for some } \alpha \in \text{On}^M\}.$$

[3] Joel D. Hamkins, Upward closure and amalgamation in the generic multiverse of a countable model of set theory, 数理解析研究所講究録 (RIMS Kôkyû-roku) Vol.1988, (2016).

[4] John. R. Steel, Gödel's program, in: J. Kennedy (ed.), Interpreting Gödel: Critical Essays. Cambridge, UK: Cambridge University Press (2014).

[5] _____, Generically invariant set theory, in: S. Arbeiter, and J. Kennedy (eds.), The Philosophy of Penelope Maddy, Springer (2024).

- ▶ $\mathcal{MV}_{ST}^{M, \mathbb{G}}$ は M と $\mathbb{G}$ に依存しているし、依然として toy model にすぎない、という問題は残っている。
- ▷ 公理図式 the Super- $C^{(\infty)}$ -Laver generic Large Cardinal Axiom for All p.o.s and for hyperhugeness (以下 The **super- $C^{(\infty)}$ -LgLCAA for hyperhuge** と略), を仮定すると, upward closedness を含む Steel の要請した multiverse の性質を満たすモデル $\mathcal{MV}$ で, “本物の multiverse” の状況をより良く反映していると解釈のできるものが導入できる。

The super- $C^{(\infty)}$ -LgLCAA for hyperhuge: (これでもまだ長いので, 以下では (Δ) と略す)

For all $n \in \mathbb{N}$, for any $\lambda_0 > 2^{\aleph_0}$ and p.o. $\mathbb{P}$, there are $\lambda > \lambda_0$ with $V_\lambda \prec_{\Sigma_n} V$, and a $\mathbb{P}$ -name $\mathbb{Q}$ of a p.o. s.t., for $(V, \mathbb{P} * \mathbb{Q})$ -generic $\mathbb{H}$, there are $j, M \subseteq V[\mathbb{H}]$ with

- $j : V \xrightarrow{\sim}_{2^{\aleph_0}} M$,
- $j(2^{\aleph_0}) > \lambda, \mathbb{P}, \mathbb{P} * \mathbb{Q}, \mathbb{H} \in M$,
- (tightness) $|\text{RO}(\mathbb{P} * \mathbb{Q})| \leq j(2^{\aleph_0})$, and
- $j''j(\lambda) \in M$ (the closure property corresponding to hyperhugeness),
- $V_{j(\lambda)}^{V[\mathbb{H}]} \prec_{\Sigma_n} V[\mathbb{H}]$ (i.e. $\lambda \in (C^{(n)})^V; j(\lambda) \in (C^{(n)})^{V[\mathbb{H}]}$) (super- $C^{(\infty)}$ feature).

- ▶ (Δ) を仮定して, $\kappa := (2^{\aleph_0})^V$ とし,

$$\mathcal{MV} := \{V_\kappa \bar{W}[\mathbb{G}] : \mathbb{G} \text{ is a } (\bar{W}, \mathbb{P})\text{-generic filter } \in V \text{ for some } \mathbb{P} \in V_\kappa \bar{W}\}$$

とする.

- ▷ Theorem 4 により, bedrock $\bar{W}$ が存在し, $\kappa := (2^{\aleph_0})^V$ は $\bar{W}$ で super- $\mathcal{C}^{(\infty)}$ hyperhuge である.
- ▷ By Theorem 5, により, $V_\kappa \bar{W} \prec \bar{W}$ である. したがって, $\mathcal{MV}$ の定義でのような $\mathbb{G}$ に対し, $V_\kappa \bar{W}[\mathbb{G}] \prec \bar{W}[\mathbb{G}]$ が成り立つ.

Theorem 6. (S.F.-Usaba^[6], Theorem 4.10) (Δ) implies the Maximality Principle $\text{MP}(\text{all p.o.s, } \mathcal{H}(2^{\aleph_0}))$.

- ▶ このことを使うと, $\mathcal{MV}$ が upward closedness を含む多元宇宙の持つべき性質をすべて満たすことが証明できる.

多世界宇宙の geology への反映 (reflection) (2/3)

Multiverse (9/12)

- 以下の議論から、 V に関する単一の formula として記述できる集合強制法多世界宇宙の性質は、すべて “geological な multiverse” MV に反映されることが分かる (説明は時間の都合で略):
 - Assume that (Δ) holds. Then there is the bedrock $\overline{W}$ (Theorem 4), $MP(\text{all-p.o.s}, \mathcal{H}(2^{\aleph_0}))$ (Theorem 6), and $\kappa := 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Lemma 3) holds.
 - Let $V = \overline{W}[G]$ for a $(\overline{W}, \mathbb{P})$ -generic $G \in V$ for some $\mathbb{P} \in \overline{W}$.
 - Suppose that $V \models \Vdash_Q “\varphi”$ for an $\mathcal{L}_\varepsilon$ -sentence φ and a p.o. $Q \in V$. Let $\tilde{Q} \in \overline{W}$ be a $\mathbb{P}$ -name of Q s.t. $\overline{W} \models \Vdash_{\mathbb{P} * \tilde{Q}} “\varphi”$.
 - In V , let $\mathbb{R}$ be a p.o. that forces the continuum is $> |\mathbb{P} * \tilde{Q}|$. Then we have $V \models \Vdash_{\mathbb{R}} “\exists \underline{P} \in \overline{W} (|\underline{P}| < 2^{\aleph_0} \wedge \overline{W} \models \Vdash_{\underline{P}} “\varphi”)”$.
 - By $MP(\text{all-p.o.s}, \mathcal{H}(2^{\aleph_0}))$, there is a ground W of V s.t. $W \models \exists \underline{P} \in \overline{W} (|\underline{P}| < 2^{\aleph_0} \wedge \overline{W} \models \Vdash_{\underline{P}} “\varphi”)$.

多世界宇宙の geology への反映 (reflection) (3/3)

Multiverse (10/12)

- ▷ Since $(2^{\aleph_0})^W \leq (2^{\aleph_0})^V$, and $\overline{W}$ is absolute between W and V , it follows that $V \models \exists \underline{P} \in \overline{W} (|\underline{P}| < 2^{\aleph_0} \wedge \overline{W} \models \Vdash_{\underline{P}} \text{“}\varphi\text{”})$.
- ▷ Let $\mathbb{P}^* \in \overline{W}$ be s.t. $|\mathbb{P}^*| < \kappa$, and $\overline{W} \models \Vdash_{\mathbb{P}^*} \text{“}\varphi\text{”}$. By a consequence of [Theorem 6](#), there is a $(\overline{W}, \mathbb{P}^*)$ -generic $G^* \in V$. We have $\overline{W}[G^*] \models \varphi$.
- Thus, under (Δ) , $V_\kappa^{\overline{W}[G^*]} \in \mathcal{MV}$, and $V_\kappa^{\overline{W}[G^*]} \models \varphi$ by [Theorem 5](#). 

- ▶ **Problems:** MV について, Steel の公理系 MV を満たすこと以外に何が言えるか/何を MV に関する公理として更に追加できるか?
- $MV + BA$?
- the $L_{\omega_1, \omega}$ theory:
 $MV + \text{“there is } W \in \mathcal{W} \text{ s.t. } W \models (\Delta)\text{”}$?
- the $L_{\omega_1, \omega}$ theory:
 $MV + \text{“there is } W \in \mathcal{W} \text{ s.t. } W \models (\Delta)\text{”}$
+ “for all transitively iterable stationary preserving $\mathcal{P}$, there is $W \in \mathcal{W}$ s.t. $W \models$ the super- $C^{(\infty)}\mathcal{P}$ -LgLCA for extendible” ?
- *Bedrock* = *ultimate-L* ?

References.

- [1] Sakaé Fuchino, Two further aspects of Laver-generic Large Cardinal Axioms, RIMS Kôkûroku, No.2349, Recent Developments in Axiomatic Set Theory,(2026), 1–31.
Postprint: <https://fuchino.ddd.jp/papers/RIMS2025-multiverse-diamond-x.pdf>
- [2] Sakaé Fuchino, and Francesco Parente, The multiverse and diamonds in set theoretic geology, an extended version of [1] in preparation.



Thank you for your attention!

ご清聴ありがとうございました。

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.