「ほとんどすべて」は 《ほとんどすべて》か？

Sakaé Fuchino **(渕野 昌)**

Graduate School of System Informatics
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://fuchino.ddo.jp/index-j.html

数理の翼 大川セミナー 2016

(2016 年 08 月 22 日 (15:12 JST) version)

2016 年 08 月 20 日 (於 大川)

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.
These slides are downloadable as
http://fuchino.ddo.jp/slides/ookawa2016-08-pf.pdf

実数の全体の完備性

- $\mathbb{R}$ で実数 (real numbers (or simply “reals”) — 数直線の上の点に対応するような数) の全体の集まり (集合) をあらわす.
  - $\mathbb{R}$ は，区間 $(-\infty, \infty)$ としてあらわされることもある.
  - $\mathbb{R}$ は物理的な “直線” の理想化のようなものだが，物理的な直線そのものではない！

$\mathbb{R}$ の基本性質の一つとして，通常，次の性質を仮定する.

- $\mathbb{N}$ で **自然数** (natural numbers) の全体の集合をあらわす. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である.

$\mathbb{R}$ の完備性 (completeness of the reals)
— 単調有界列の収束

a_n, $n \in \mathbb{N}$ を実数の上昇列として，ある実数 $b \in \mathbb{R}$ に対し，$a_n \le b$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つ (つまり，数列 a_n, $n \in \mathbb{N}$ は上に有界) なら，この数列は極限 $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ を持つ (つまり，$b = \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ となるような実数 $b \in \mathbb{R}$ が存在する).

実数の全体の完備性 (2/3)

$\mathbb{R}$ の完備性 (completeness of the reals)
— 単調有界列の収束

a_n, $n \in \mathbb{N}$ を実数の上昇列として，ある実数 $b \in \mathbb{R}$ に対し，$a_n \leq b$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つ (つまり，数列 a_n, $n \in \mathbb{N}$ は上に有界) なら，この数列は極限 $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ を持つ (つまり，$b = \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ となるような実数 $b \in \mathbb{R}$ が存在する).

- $\mathbb{Q}$ で **有理数** (rational numbers, 分数 (quotients) としてあらわせる数) の全体からなる集合をあらわす． $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ である．
  - $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中に “ぎっしりと” つまっている: $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で **稠密** (ちゅうみつ, dense) である．つまり，すべての 区間 I に対し，$\mathbb{Q}$ と I の共通部分 $\mathbb{Q} \cap I$ は空 (くう) でない．しかし …

演習 1. $\mathbb{Q}$ は上の意味での “完備” ではない．

実数の全体の完備性 (3/3)

$\mathbb{R}$ の完備性 (completeness of the reals)
— 単調有界列の収束

a_n, $n \in \mathbb{N}$ を実数の上昇列として，ある実数 $b \in \mathbb{R}$ に対し，$a_n \leq b$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つ (つまり，数列 a_n, $n \in \mathbb{N}$ は上に有界) なら，この数列は極限 $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を持つ (つまり， $b = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ となるような実数 $b \in \mathbb{R}$ が存在する).

定理 2. I_n, $n \in \mathbb{N}$ を閉区間の包含関係に関する下降列 $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ とする．このとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ である (つまり $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ は少なくとも一つは要素を持つ).

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$I_n = [a_n, b_n]$ とする．このとき，a_n, $n \in \mathbb{N}$ は実数の上昇列で，$a_n \leq b_0$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し成り立つ．したがって，$\mathbb{R}$ の完備性から，$a = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が存在するが，$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ である． □

演習 3. 定理 2 の主張は，開区間の列に対しては必ずしも成り立たない．

カントルの定理

定理 2. I_n, $n \in \mathbb{N}$ を閉区間の包含関係に関する下降列 $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ とする．このとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ である (つまり $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ は少なくとも一つは要素を持つ)．

- 集合 X が **可算** (countable) であるとは，X は空集合であるか，または，X の要素を u_n, $n \in \mathbb{N}$ とならべあげることができる (つまり，$X = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ とあらわせる) こととする．

定理 4. (G. Cantor) $X \subseteq \mathbb{R}$ が可算なとき，任意の区間 I に対し，I の要素で X に属さないようなものが存在する．

証明． X が空集合なら主張は明らかである．$X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とする．閉区間の下降列 I_n, $n \in \mathbb{N}$ を次が成り立つように作る:

(1) $I_0 = I$, (2) $a_n \notin I_{n+1}$.

定理 2 から，$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq I_0 = I$ がとれるが，x はどの a_n, $n \in \mathbb{N}$ とも異なる． □

(上級者のための) 演習 5. 上の定理 4 の証明は選択公理を用いず行なうことができる．

カントルの定理 (2/2)

定理 4. (G. Cantor) $X \subseteq \mathbb{R}$ が可算なとき，任意の区間 I に対し，I の要素で X に属さないようなものが存在する．

系 6. すべての区間は可算でない．

- 可算でない集合は **非可算** (または不可算，uncountable) であるという．
  - この用語を用いて系 6 を言い換えると: すべての区間は非可算である．特に $\mathbb{R}$ は非可算である．

補題 7. $\mathbb{Q}$ は可算である．

証明のスケッチ

演習 7a. (加藤先生の講義で出てきた) $\overline{\mathbb{Q}}$ は可算である．

実数の可算集合

- $[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X$ は可算 $\}$ は以下の性質を満たす:

(1) $\mathbb{R} \notin [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$ (定理 4); (6) $\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}} \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$ (補題 7, 演習 7a).
(2) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し, $\{r\} \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$;
(3) $X \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$ で $Y \subseteq X$ なら $Y \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$;
(4) $X, Y \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$ なら $X \cup Y \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$;
(5) $X_n \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$, $n \in \mathbb{N}$ なら, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$;

- 上の (5) が言えるためには選択公理 (の弱いヴァージョン: 可算選択公理) が必要.
- $\mathbb{R}$ の可算な部分集合は, “無視していいくらい小さい” $\mathbb{R}$ の部分集合であると考えることができる.
- ▷ 「$\mathbb{R}$ の “無視していいくらい小さい” 部分集合」を, 可算な部分集合のことだと解釈したときには, 補集合が可算集合であるような $\mathbb{R}$ の部分集合 ($\mathbb{R}$ の **補可算集合** (co-countable sets)) は “ほとんどすべての実数を含む集合” だと考えてよい.

可算性を拡張する “$\mathbb{R}$ の無視していいくらい小さい部分集合” の概念が幾つか知られている. 以下でこれについて話す.

痩集合 (meager sets)

- **注意.** ここでは，区間と言ったときには，2 つの異なる端点を持つ区間のこと．$(a, a) = \emptyset$, $[a, a] = \{a\}$ は区間とは考えていない．

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が **nowhere dense** (全疎?) であるとは，任意の区間 I に対し，$I' \subseteq I$ で X と共通部分を持たないようなものが存在することである．(例: 一点集合，カントル集合)

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が **meager** (痩，昔は第一類 (of first category) と言った) であるとは，nowhere dense な $X_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ で， $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ となるものがとれること．

- meager な $X \subseteq \mathbb{R}$ は nowhere dense とは限らないし，$\mathbb{R}$ の中で稠密であることすらあり得る．(例: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

定理 8. (R. Baire，カテゴリー定理) $X \subseteq \mathbb{R}$ が meager なとき，任意の区間 I に対し，I の要素で X に属さないようなものが存在する．

証明. カントルの定理 (定理 4) と同様に示せる **(演習 9)**. □

瘦集合 (meager sets) (2/2)

- $\mathcal{M} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X$ は meager$\}$ は以下の性質を満たす:

(1) $\mathbb{R} \notin \mathcal{M}$ (定理 8);
(2) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し, $\{r\} \in \mathcal{M}$;
(3) $X \in \mathcal{M}$ で $Y \subseteq X$ なら $Y \in \mathcal{M}$;
(4) $X, Y \in \mathcal{M}$ なら $X \cup Y \in \mathcal{M}$;
(5) $X_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ なら, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{M}$;
(6) $X \in \mathcal{M}$ で非可算なものが存在する (例: カントル集合).

- (2), (3), (5) から, $[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0} \subseteq \mathcal{M}$ が成り立つ.
- $\mathbb{R}$ の meager な部分集合は, "無視していいくらい小さい" $\mathbb{R}$ の部分集合であると考えることができる.
  - 「$\mathbb{R}$ の "無視していいくらい小さい" 部分集合」を, meager な (of first category) 部分集合のことだと解釈したときには, 補集合が meager であるような $\mathbb{R}$ の部分集合 ($\mathbb{R}$ の **co-meager** な部分集合) は, カテゴリーの意味で "ほとんどすべての実数" を含む集合だと考えてよい.

零集合 (nullsets)

- 区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ に対し，I の端点を $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ とするとき，I の **長さ** を $|I| = b - a$ で定める．

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が **零集合** (nullset) あるいは，**測度 0 の集合** (set of measure 0) であるとは，すべての $\varepsilon > 0$ に対し，区間の列 I_n, $n \in \mathbb{N}$ で，$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ かつ，$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon$ となるものが存在することをいう．

零集合 (nullsets)

- $X \subseteq \mathbb{R}$ が **零集合** (nullset) あるいは，**測度 0 の集合** (set of measure 0) であるとは，すべての $\varepsilon > 0$ に対し，区間の列 I_n, $n \in \mathbb{N}$ で，$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ かつ，$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \varepsilon$ となるものが存在することをいう．

補題 10. (1) $r \in \mathbb{R}$ として，$\emptyset$ も $\{r\}$ も零集合である．
(2) X_i, $i \in \mathbb{N}$ が零集合のとき，$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ は零集合である．
(3) すべての可算集合 $\subseteq \mathbb{R}$ は零集合である．

証明． (1): $\varepsilon > 0$ として，$n \in \mathbb{N}$ に対し，
$I_n = (r - 2^{-n-3}\varepsilon,\ r + 2^{-n-3}\varepsilon)$ とすれば，$\{r\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ で，
$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ である．

(2): $\varepsilon > 0$ として，$i \in \mathbb{N}$ に対し，区間 I^i_n, $n \in \mathbb{N}$ を，
$X_i \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^i_n$ かつ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I^i_n| < 2^{-n-2}\varepsilon$ となるようにとれば，
$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \bigcup_{i,n\in\mathbb{N}} I^i_n$ で，$\sum_{i,n\in\mathbb{N}} |I^i_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

(3): (1) と (2) から明らか． $\square$

零集合 (nullsets) (2/4)

定理 11. (E. Borel) 任意の区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ に対し，区間 I_n, $n \in \mathbb{N}$ が I を覆う (つまり，(*) $I \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ が成り立つ) なら，$|I| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n|$ である．

系 12. すべての区間は零集合ではない．

定理 11 の証明． I が閉区間 (たとえば $I = [a, b]$) で，各 I_n, $n \in \mathbb{N}$ は開区間の場合に定理を示す．一般の場合は，この場合の結果を用いて証明できる **(演習 13)**.

$N \in \mathbb{N}$ と (a_k, b_k), $k < N$ を以下のように構成する:

(a_0, b_0) を，$a \in I_n$ となるような最初の (つまり添字 n が最小の) ものとする．(*) によりこのようなものは存在する．$b < b_0$ なら，$N = 1$ として構成を終える．$b_0 \leq b$ なら，(a_1, b_1) を $b_0 \in I_n$ となるようなもののうちの最初のものとする．$b < b_1$ なら $N = 2$ として構成を終える．$b_1 \leq b$ なら，... ．

零集合 (nullsets) (3/4)

証明の続き.

この構成は有限回 N の後停止する: もしそうでなければ, b_k, $k \in \mathbb{N}$ は増加列で b で押えられているから, $\mathbb{R}$ の完備性から, 極限 $b^* = \lim_{k \in \mathbb{N}} b_k \leq b$ を持つ. $n* \in \mathbb{N}$ を $b^* \in I_{n^*}$ となるようなものとすると, ある $\ell \in \mathbb{N}$ をとると, すべての $k \geq \ell$ に対し, $b_k \in I_{n^*}$ となるから, (a_{k+1}, b_{k+1}) は n^* より小さい添字 n を持つ I_n とならなくてはならないが, そのようなものは有限個しかないので矛盾である.

ここで, $I \subseteq \bigcup_{k<N}(a_k, b_k)$ だから,

$$|I| \leq \sum_{k<N}(b_k - a_k) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n|$$

となり, 得たい不等式が示せた. □

零集合 (nullsets) (4/4)

- 以上から，$\mathcal{N} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ は零集合 }\}$ は以下の性質を満たすことがわかる:

(1) $\mathbb{R} \notin \mathcal{N}$ (系 12);
(2) すべての $r \in \mathbb{R}$ に対し，$\{r\} \in \mathcal{N}$ (補題 10, (1));
(3) $X \in \mathcal{N}$ で $Y \subseteq X$ なら $Y \in \mathcal{N}$;
(4) $X, Y \in \mathcal{N}$ なら $X \cup Y \in \mathcal{M}$;
(5) $X_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$ なら，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathcal{N}$ (補題 10, (2));
(6) $X \in \mathcal{N}$ で非可算なものが存在する (例: カントル集合).

- (2), (3), (5) から，$[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0} \subseteq \mathcal{N}$ が成り立つ.
- $\mathbb{R}$ の零集合は，“無視していいくらい小さい” $\mathbb{R}$ の部分集合であると考えることができる.
  - 「$\mathbb{R}$ の “無視していいくらい小さい” 部分集合」を，零集合のことだと解釈したときには，補集合が零集合であるような $\mathbb{R}$ の部分集合 ($\mathbb{R}$ の **co-null** な部分集合) は，測度の意味で “ほとんどすべての実数” を含む集合だと考えてよい.

$\mathbb{R}$ の “小さな” 部分集合の概念たち

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[dr, phantom, sloped, "\supseteq"] & & \mathcal{N} \arrow[dl, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
& \mathcal{M}\cap\mathcal{N} \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] & \\
& {[\mathbb{R}]^{\le\aleph_0}} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}$ の “小さな” 部分集合の概念たち

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M} & & & & \mathcal{N} \\
& \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
& & \mathcal{M} \cap \mathcal{N} & & \\
& & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \\
& & [\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0} & &
\end{array}
$$

例: カントル集合

「ほとんどすべて」と《ほとんどすべて》

定理 13. $\mathbb{R}$ の分割 $\mathbb{R} = A \cup B$ で，A は零集合で，B は meager となっているようなものが存在する．特に，A はカテゴリーの意味でほとんどすべての実数を含んでいるが，B は測度の意味でほとんどすべての実数を含んでいる．

証明． $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ とする．$i, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$I_{i,n} = (q_n - 2^{-(i+n)}, q_n + 2^{-(i+n)})$$

とする．$|I_{i,n}| = 2^{-(i+n)+1}$ だから，$\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_{i,n}| = 2^{-(i+2)}$ である．したがって，

$$A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{i,n},\ i \in \mathbb{N} \quad \text{として} \quad A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

とすると，A は零集合である．

一方，各 $i \in \mathbb{N}$ に対し，$B_i = \mathbb{R} \setminus A_i$ は nowhere dense だから，$B = \mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ は meager である．

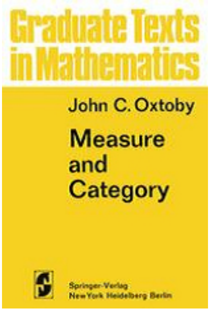
よって，これらの A, B は求めるようなものとなっている． $\square$

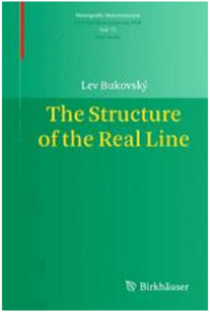
$\mathbb{R}$ の "小さな" 部分集合の概念たち (2/2)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[rr, phantom, "\not\subset \ \not\supset"] & & \mathcal{N} \\
& \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \arrow[ul, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneq"] \arrow[d, phantom, "\subsetneq"] & \\
& {[\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0}} &
\end{tikzcd}$$

定理 13

参考文献





実数の集合論の基礎の基礎

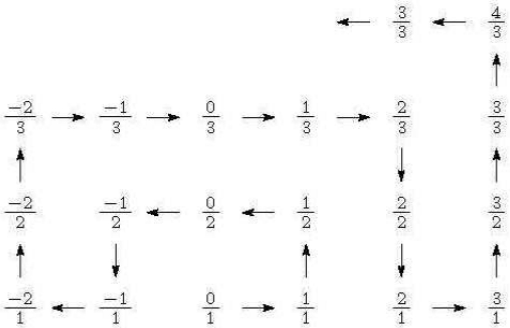
淵野 昌 (Sakaé Fuchino)
fuchino@isc.chubu.ac.jp

目次

1

$\mathbb{Q}$ は可算である．

- 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は可算である:



1. （無限）平面に座標を入れて x 軸より上にある，各格子点 (n, m) 上に分数 $\frac{n}{m}$ を置く． **2.** 格子点を蛇行しながら辿って，格子点に乗った分数を 0 番目, 1 番目, 2 番目, $\cdots$ と数え上げてゆく． **3.** ただし，前にすでに出てきた数はとばす．

戻る