

楕円関数論

森田 健

序

この本は,2008 年度 前期 Honors Program において,町頭先生の下で森田が行った楕円関数論のセミナーをまとめたものです.まとめるに当たって,発表内容の順序は殆ど変わっていませんが(その構造の類似性から),音楽理論において最も完成された形式と言われるソナタ形式になぞらえて(Jacobi の楕円関数を主題として)書くことにしました.

基本的には,関数論の立場から楕円関数を考察していますが,提示部においては実関数としての Jacobi の楕円関数や,物理的な応用を扱います.これは,楕円の弧長を求めようとすると $\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$ という形になり,初等関数で表すことが出来ないという問題に始まり,Legendre による「出来るだけ簡単な型の積分に帰着する」という研究を経て,Gauss,Jacobi,Abel 等による「この積分の逆関数を扱う」発想によって理論が大きく発展する一連の流れを表す内容および例として適切であると考えたためです.そのために,多少技巧的な変数変換などを行わざるを得ませんでした.

展開部では,複素平面上で有理型であるような 2 重周期関数という定義(すなわち,楕円積分を経由しない形)から出発し,複素関数としての楕円関数の性質を扱いました.ここでは,楕円関数体の構造を記述する上で本質的に重要な意味を持つ,Weierstrass の $\wp$ 関数を中心に理論を展開し,Jacobi の楕円関数の複素変数に対する拡張,および $\wp$ 関数との関係を述べました.

さらに再現部においては,楕円関数の 1 つの表現である ϑ 関数を(Hermite によって導入された Θ 関数の特殊な場合として)導入し,Jacobi の楕円関数に対する ϑ 関数による表示を与えることで,三角関数の加法定理に類似する,Jacobi の楕円関数に関する加法定理を導きました.

セミナーの発表においては,出来るだけまとめたつもりが(著者の能力の為に)常々冗長になってしまいがちで,時には 7 時間近くに及ぶこともありました.非常に長い時間,丁寧に指導してくださった町頭先生に深く感謝します.また,関数論の基礎を教えてくださいました片山先生,Mathematica による図示について適切なアドバイスを下さった芦野先生,Mathematica に関する興味深い使用方法を示唆してくださった横山先生をはじめとして,様々な先生方にお世話になり,感謝しています.更に,音楽理論や表紙のデザインに関する相談に乗ってくれた母親,論理展開について,様々な方向から考察するきっかけを与えてくれた父親に感謝します.ありがとうございました.

2008 年 9 月 森田 健

目次

第 I 部 提示部

実関数としての楕円関数 9

第 1 章 楕円関数 11

- 1.1 楕円関数の, 楕円との関連性 11
- 1.2 第 2 種楕円積分 11
- 1.3 第 1 種楕円積分 15
- 1.4 Serret による変数変換 (1845) の意味 17
- 1.5 Gauss の lemniscate 関数 19

第 2 章 不定積分 23

- 2.1 楕円積分 23
- 2.2 物理的な例 25

第 3 章 Jacobi の楕円関数 31

- 3.1 実変数関数としての Jacobi の楕円関数 31
- 3.2 Jacobi の楕円関数と, 第 2 種, 第 3 種楕円積分の関係 35
- 3.3 Jacobi の楕円関数の, 物理に対する応用例 37

第 II 部 展開部

複素関数としての楕円関数 45

第 4 章 複素変数の楕円関数 47

- 4.1 一般の複素変数楕円関数 47
- 4.2 Weierstrass の $\wp$ 関数 49

第 5 章 一般の楕円関数に関する性質 55

- 5.1 楕円関数体 55
- 5.2 Liouville の第 1, 第 2, 第 3, 第 4 定理 56

第 6 章	$\wp$ 関数の性質	61
6.1	Laurent 展開と不変量	61
6.2	$\wp$ 関数の満たす微分方程式	62
6.3	不変量と Laurent 係数の関係	63
6.4	$\wp$ 関数による楕円関数の表示 (楕円関数体の構造)	66
第 7 章	ζ 関数	71
7.1	ζ 関数	71
7.2	ζ 関数の性質	72
第 8 章	σ 関数	75
8.1	σ 関数	75
8.2	σ 関数の性質	76
第 9 章	$\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)$ 間の公式	79
9.1	ζ 関数の原点近傍における Laurent 展開	79
9.2	σ 関数の原点近傍における Laurent 展開	79
9.3	$\wp(z)$ と $\sigma(z)$ の関係	81
9.4	ζ 関数の加法公式	82
9.5	$\wp$ 関数の加法公式	83
9.6	$\wp$ 関数の代数的加法公式	83
第 10 章	σ_k 関数, $\wp_k$ 関数	85
10.1	σ_k 関数	85
10.2	σ_k 関数の性質	85
10.3	$\wp_k$ 関数	86
10.4	$\wp_k$ 関数の性質	87
第 11 章	複素変数の Jacobi の楕円関数	93
11.1	準備	93
11.2	実変数の Jacobi の楕円関数の, 複素変数への拡張	98
第 12 章	Jacobi の楕円関数の性質	103
12.1	周期, 極, 零点など	103
12.2	種々の公式と, 原点近傍における展開	106
12.3	$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の極限としての三角関数, 及び双曲関数に対する展望	111
12.4	$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の満たす微分方程式	113

第 III 部 再現部

ϑ 関数と楕円関数 115

第 13 章 ϑ 関数 117

13.1	与えられた周期を持つ, 整関数の展開	117
13.2	記号	118
13.3	$\varphi(u)$ の展開	120
13.4	ϑ_1 関数	121
13.5	ϑ_2 関数, ϑ_3 関数, ϑ_0 関数	122

第 14 章 Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数 127

14.1	Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数	127
14.2	$\Theta_{\mu,\nu}(v)$ による, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$ の表示	127
14.3	$\Theta_{\mu,\nu}(v)$ の満たす関数等式	130
14.4	ϑ 関数の関数等式と零点	131
14.5	ϑ 関数の零点と, その零点における z^2 の値	132
14.6	e_1, e_2, e_3 と Δ の, ϑ 関数の零における値による表示	133
14.7	諸定数に関する計算と表示	135
14.8	ϑ 関数の無限積表示	136
14.9	$\zeta(u)$ の, z^2 の関数としての展開と η_1, g_2, g_3 の表現	140

第 15 章 Jacobi の楕円関数との関係 145

15.1	Jacobi の楕円関数と, 諸定数の表示	145
15.2	Jacobi の楕円関数の満たす関数等式	146
15.3	$\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ に関する加法定理	147
15.4	$\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ の極限としての三角関数	148

第 16 章 Graphics gallery as "coda" 151

16.1	Weierstrass の $\wp$ 関数	151
16.2	ζ 関数	156
16.3	σ 関数	158
16.4	Jacobi の楕円関数	160

付録 A 公式一覧表 167

A.1	$\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)$ の定義	167
A.2	Laurent 展開	167
A.3	種々の定数	168
A.4	$\wp$ 関数の満たす微分方程式	168
A.5	周期との関係	168

A.6	加法公式関連	168
A.7	周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ を持った有理型関数 $f(z)$ の, $\wp(z), \sigma(z)$ による表示	169
付録 B	$\wp$ 関数と種々の関数の関係	171
B.1	$\wp$ 関数の定義	171
B.2	$\sigma(u), \sigma_k(u)$ の表示	171
B.3	$\wp_k(u)$ の表示	171
B.4	$v = 0$ における展開	172
参考文献		173

第 I 部

提示部

実関数としての楕円関数

第 1 章

楕円関数

1.1 楕円関数の, 楕円との関連性

円, 楕円, 放物線, 双曲線は 2 次曲線 (円錐曲線) と呼ばれる. Euclid, Archimedes は円錐曲線を扱っていない (これは, 当時の幾何学の対象は円, 直線から構成される図形であったためである). 歴史的には, 初めて円錐曲線に関する考察, すなわち円錐を平面で切り, 曲線を得ることについての考察を行ったのは, Menecmo (B.C.350-) とされる. また, Apollonius (B.C.200-) は, 『円錐曲線論』において, 得られる曲線の分類を以下のように行っている.

1. ellipsis (不足する) → ellipse (楕円)
2. palabole (一致する) → parabola (放物線)
3. hyperbole (超過する) → hyperbola (双曲線)

ここで, 楕円を単純に円がつぶれたものとみなすと, 楕円の面積は, 初等的な関数で表すことが出来る. 一方, 弧長については, 各点における縮尺比が異なるので, それらの関係は初等的に, すなわち対数関数を含む初等関数とその四則の結果によって表すことが出来ない. この問題について, 以下の積分を導入して考えることにする.

1.2 第 2 種楕円積分

Definition. 1 第 2 種楕円積分

k : 母数 (長軸と短軸の関係を表すパラメータ) として,

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

を, 第 2 種楕円積分, 特に $\varphi = \pi/2$ までの積分を

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

で表し, 第 2 種完全楕円積分という.

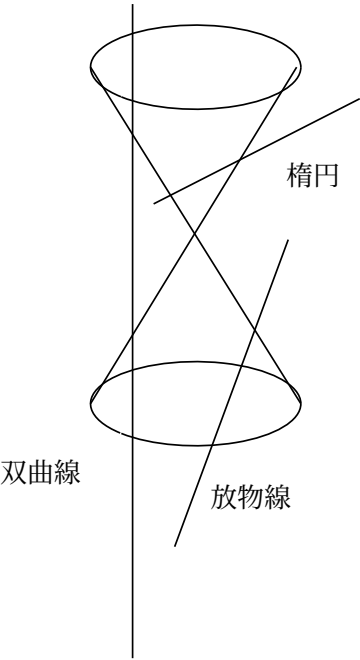


図 1.1 円錐の切り方による分類

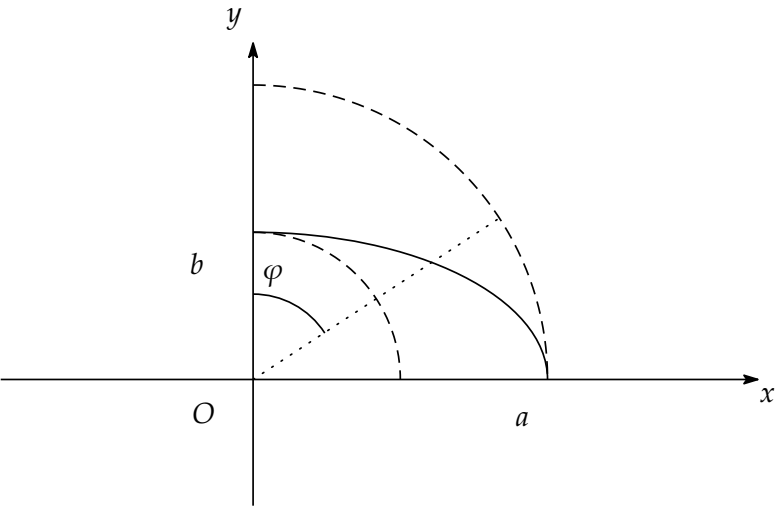


図 1.2 楕円の弧長

Proposition. 1 楕円の弧長は、第 2 種楕円積分で表される.

Proof. φ : y 軸からの角度
として,

$$(x, y) := (a \sin \varphi, b \cos \varphi) \tag{1.1}$$

とおく. 弧長の微分

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{1.2}$$

に対し, (1.1) から, $dx = a \cos \varphi d\varphi$, $dy = -b \sin \varphi d\varphi$. これを (1.2) に対して用いて,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi =: a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \left(k^2 := \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

よって, 弧長は

$$\frac{s}{a} = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

によって得られる.

Corollary. 1 楕円の周の全長 l は (対称性から), 第2種楕円積分を用いて,

$$l = 4aE(k) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

で表される.

Corollary. 2 Legendre の標準形

第2種楕円積分は,

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

と書くことも出来る. これを, Legendre の標準形という.

Proof. 楕円の式 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ を, y について解くと,

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

このとき,

$$\frac{dy}{dx} = \pm b \frac{-2\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \frac{1}{2} = \mp \frac{b}{a} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

と表される. これを, 弧長の微分に対して用いる.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{1 - k^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =: a \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz \quad \left(z = \frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

ここで, $x = a \sin \varphi$ であるから, $z = x/a = \sin \varphi$. 弧長を s と書くと,

$$s = a \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

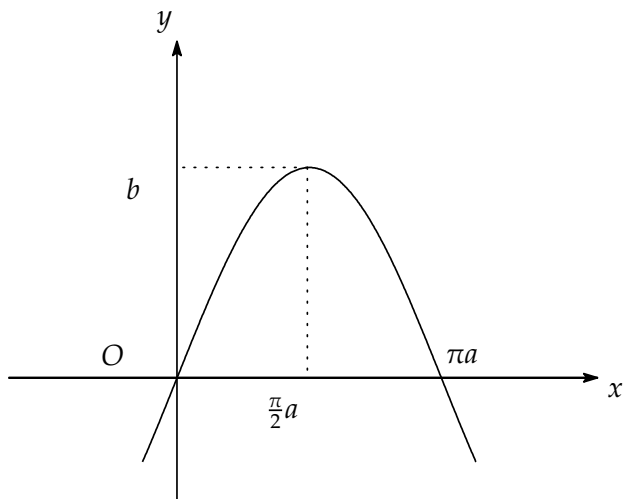


図 1.3 sin 曲線

なので, 第 2 種楕円積分は,

$$E(k, \varphi) = \frac{s}{a} = \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

と表される. また, 完全楕円積分については,

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz$$

と書かれる. これにより, Legendre の標準形を得る.

Proposition. 2 sin 曲線の弧長は, 第 2 種楕円積分で表される.

Proof. sin 曲線を, 図のようにとる. このとき,

$$\frac{y}{b} = \sin \frac{x}{a}$$

と表される. ここで,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cos \frac{x}{a}$$

から, 弧長の微分

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \frac{x}{a}} dx \\ &= \sqrt{1 + \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{x}{a} \right\}} dx = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{x}{a}} dx. \end{aligned}$$

ここで,

$$\varphi = \frac{x}{a}, \quad k^2 := \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

と定めると, $d\varphi = dx/a$. このとき, 原点から測った弧長を $s(\varphi)$ と書くことにすると,

$$s(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{a^2 + b^2} E(k, \varphi)$$

と表される. また, 原点から $x/a = \pi/2$ までの弧長は,

$$s_{\text{total}} = \sqrt{a^2 + b^2} E(k)$$

によって得られる.

1.3 第1種楕円積分

次に, 第1種楕円積分を導入する. これは, lemniscate 曲線などと密接に関係している.

Definition. 2 第1種楕円積分

$$F(k, \varphi) := \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (0 \leq k < 1)$$

の形の積分を, 第1種楕円積分といい, 特に $\varphi = \pi/2$ のとき,

$$K(k) := F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

と書く. これを第1種完全楕円積分という.

Corollary. 3 Legendre の標準形

第2種積分の時と同様に, $z = \sin \varphi$ とおくことで,

$$dz = \cos \varphi d\varphi$$

さらに,

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi &= (1 - k^2 \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \varphi) \\ &= 1 - k^2 \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi + k^2 \sin^4 \varphi = (1 - \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

から,

$$F(k, \varphi) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

とも表される.

Remark. 1 第2種楕円積分は楕円の弧長と直接的関係があったが, 第1種積分を弧長にもつ曲線は単純でない (どちらかと言えば, 力学的な問題に関連している).

Definition. 3 lemniscate 曲線

(r, θ) に関して,

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (1.3)$$

によって得られる曲線を, lemniscate 曲線という. また, (x, y) において,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

として,

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (1.4)$$

と書くことも出来る. さらに, $r = a \cos \varphi$ として, (a, φ) による表示

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varphi, \quad x^2 - y^2 = a^2 \cos^4 \varphi \quad (1.5)$$

を採用することもある.

Proposition. 3 (1.5) の表記に従うと, lemniscate の弧長は,

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$$

と表される. すなわち, $k = 1/\sqrt{2}$ の場合の第 1 種楕円積分によって与えられる.

Proof. 仮定から,

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varphi, \quad x^2 - y^2 = a^2 \cos^4 \varphi$$

ここで, $1 + \cos^2 \varphi = 2 - \sin^2 \varphi$ を用いて,

$$x = a \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \varphi \sin \varphi.$$

よって,

$$dx = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \left(-\frac{3}{2} + \sin^2 \varphi\right) d\varphi, \quad dy = \frac{a}{\sqrt{2}} (1 - 2 \sin^2 \varphi) d\varphi \quad (1.6)$$

を得る. ここから, 弧長の微分 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ を作る. まず, (1.6) の一部分についての性質を示しておく.

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left(-\frac{3}{2} + \sin^2 \varphi\right)^2 + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \varphi)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right) \\ &= \sin^2 \varphi \left(\frac{9}{4} - 3 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right) (1 - 4 \sin^2 \varphi + 4 \sin^4 \varphi) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

これを用いて,

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = \left\{ \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \left(-\frac{3}{2} + \sin^2 \varphi \right) d\varphi \right\}^2 + \left\{ \frac{a}{\sqrt{2}} (1 - 2 \sin^2 \varphi) d\varphi \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \right\}^2\end{aligned}$$

すなわち,

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$$

よって, lemniscate の弧長は, $\varphi = 0 (r = a)$ から測って,

$$s(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} = \frac{a}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{2}, \varphi\right)$$

と表される. さらに, 全長は,

$$s_{\text{total}} = 4 \frac{a}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

によって与えられる.

1.4 Serret による変数変換 (1845) の意味

lemniscate を,

$$x = a \frac{z + z^3}{1 + z^4}, \quad y = a \frac{z - z^3}{1 + z^4} \quad (1.7)$$

で定義する (z を消去すると, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ が得られる). このとき, 第 1 種積分で表される弧長を考える.

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 = \frac{2a^2}{(1 + z^4)^4} \{(1 + 3z^2 - 3z^4 - z^6)^2 + (1 - 3z^2 - 3z^4 + z^6)^2\} dz \\ &= \frac{2a^2}{(1 + z^4)^4} (1 + 3z^4 + 3z^8 + z^{12}) dz = \frac{2a^2}{1 + z^4} dz\end{aligned}$$

また,

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{1 + z^4} z^2, \quad x^2 - y^2 = 4a^2 \frac{z^4}{(1 + z^4)^2} \quad (1.8)$$

から, 極座標表現 $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varphi$, $x^2 - y^2 = a^2 \cos^4 \varphi$ と比較し,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + z^4}} z, \quad \sin \varphi = \frac{1 - z^2}{\sqrt{1 + z^4}} \quad (1.9)$$

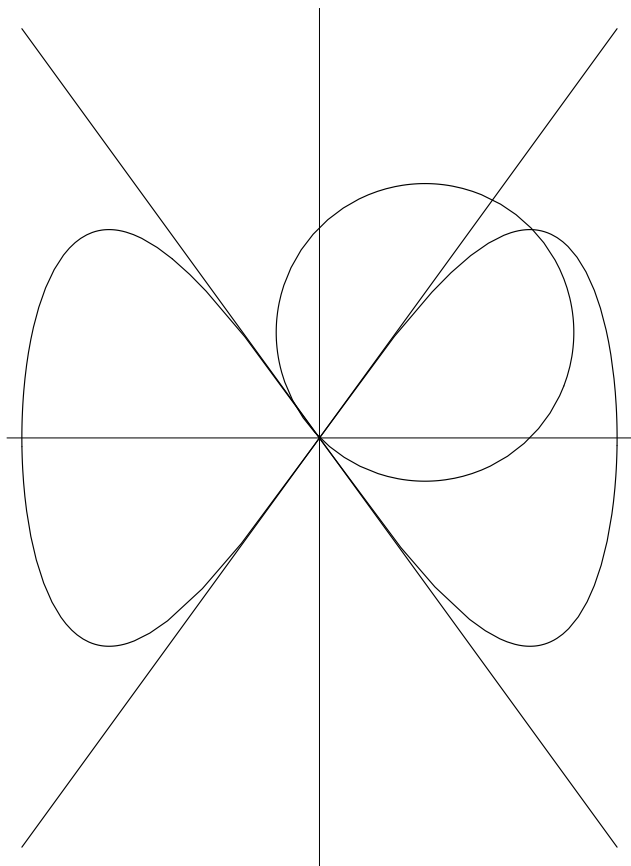


図 1.4 円と lemniscate の交点

を得る. ここから,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 \varphi)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2z^2}{1+z^4}} = \sqrt{\frac{(1+z^2)^2}{2(1+z^4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^4}} \end{aligned}$$

となる. 両辺を微分し,

$$d\varphi \frac{-\sqrt{2}(1+z^2)}{1+z^4} dz$$

ここで, $\cos \varphi = \sqrt{2}z / \sqrt{1+z^4}$ を用いて,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{-\sqrt{2}(1+z^2)dz}{1+z^4} \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+z^4}}{1+z^2} = \frac{-2}{\sqrt{1+z^4}} dz$$

よって,

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$$

従って,

$$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$$

と表される. ここで, 変数変換における z の意味を考える. (x, y) を lemniscate 上の点とすると, (1.7) から,

$$x + y = 2a \frac{z}{1 + z^4}$$

さらに (1.8) から,

$$x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{1 + z^4} z^2 = az(x + y)$$

すなわち,

$$\left(x - \frac{az}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{az}{2}\right)^2 = \left(\frac{az}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

よって (x, y) は, 中心 $(az/2, az/2)$, 半径 $az/\sqrt{2}$ で原点において lemniscate に接する円と, lemniscate との交点を表す. このことから, z を与えると, 円と lemniscate の原点以外の交点が (1.7) の (x, y) によって得られることが分かる.

1.5 Gauss の lemniscate 関数

lemniscate の弧長は, $\int dx/\sqrt{1-x^4}$ と表すことも出来る. Gauss は, この関数の逆関数を考察した. これを Gauss の lemniscate 関数という.

Proposition. 4

lemniscate の弧長は, $\int dx/\sqrt{1-x^4}$ と表される.

Proof. まず, $x^2 = 1 - y^2$ とおくと,

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-c^2}}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)}} \quad (1.10)$$

さらに, $y = \sin \varphi, c = \cos \varphi$ とおき, 置換積分を行う.

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \varphi}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) \right\} \end{aligned}$$

よって, $\int_0^c = \int_0^1 - \int_c^1$ から比較して,

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right), \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.11)$$

よって (1.11) と,

$$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$$

から, $c = \cos \varphi = \sqrt{2}z / \sqrt{1+z^4}$ として,

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{2} \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}$$

を得る.

lemniscate の弧長を, 極方程式により求めた場合, (x, y) 座標系で求めたものと一致する. 次にこのことを確かめる.

Proposition. 5

極座標で測った lemniscate の弧長は, (x, y) 座標系で測った長さと一致する.

Proof. 弧長の微分は,

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2} = \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} \quad (1.12)$$

によって与えられる. また, lemniscate の極方程式

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (0 < r < +\infty)$$

に関して全微分を考えて,

$$2r dr = -2a^2 \sin 2\theta d\theta$$

すなわち,

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{d\theta} &= -a^2 \sin 2\theta = -\sqrt{a^4 \sin^2 2\theta} = -\sqrt{a^4 (1 - \cos^2 2\theta)} \\ &= -\sqrt{a^4 - a^4 \cos^2 2\theta} = -\sqrt{a^4 - r^4} \end{aligned}$$

よって,

$$\left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2 = r^2 \frac{r^2}{a^4 - r^4} = \frac{r^4}{a^4 - r^4} \quad (1.13)$$

(1.13) を (1.12) に用いて,

$$ds = \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr = \sqrt{1 + \frac{r^4}{a^4 - r^4}} dr = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}} dr.$$

従って, lemniscate の弧長を原点から測ると,

$$s = \int_0^r \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - r^4}} dr = a \int_0^{\hat{r}} \frac{d\hat{r}}{\sqrt{1 - \hat{r}^4}} \quad \left(\hat{r} = \frac{r}{a} \right)$$

であるから, 全長は

$$s_{\text{total}} = 4a \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

によって表され, (x, y) 座標系で測った全長と一致する.

第 2 章

不定積分

2.1 楕円積分

多項式

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

を多項式で割った有理関数は, 一般に因数分解を行うことによって積分でき, 有理関数と有理関数の対数関数によって表現できる. 一方, 結果を初等関数によって表現することが出来ない積分も存在する. 以下, 幾つかの例を考察するために楕円積分を定義する.

Definition. 4 楕円積分

$p(x)$: 3 次または 4 次の多項式で, $\sqrt{p(x)}$ が無理関数であるもの

$f(x, \sqrt{p(x)})$: $x, \sqrt{p(x)}$ の有理関数

このとき,

$$I := \int f(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

を, 楕円積分という.

Corollary. 4 第 1 種楕円積分などはこれを満たす.

Proposition. 6

$p(x)$: 3 次または 4 次多項式

$I_1 := \int dx / \sqrt{p(x)}$ とすると, I_1 は第 1 種楕円積分に帰着できる.

Example. 1 1 次変換による例

$$I := \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

において, 1 次変換

$$x = 1 + \sqrt{3} \frac{y-1}{y+1}$$

を考える. $x = c$ に対する y の値を

$$y_1 := \frac{c-1+\sqrt{3}}{-c+1+\sqrt{3}}$$

とおくと,

$$I = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int_{y_1}^1 \frac{2dy}{(1-y^2)\{2-\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})y^2\}}.$$

ここで $y^2 = 1 - z^2 (z \geq 0), z_1^2 = 1 - y_1^2$ とおくと,

$$I = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int_0^{z_1} \frac{dz}{(1-z^2)\left(1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}z^2\right)} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(k, \varphi), \quad \left(\text{ただし, } k = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right)$$

と表され, 第1種楕円積分に帰着される.

Corollary. 5 $I_2 := \int \sqrt{p(x)}dx$ とすると, I_2 は第2種楕円積分に帰着できる.

($p(x)$: 3次式を, 4次に変換 (1次変換) する.)

Definition. 5 楕円積分の (第1, 2, 3種) 標準形

$p(x)$: 3次または4次多項式, $I := \int f(x, \sqrt{p(x)})dx$

I は, 初等関数と, 3種類の積分によって分類される. これを, Legendre-Jacobi の標準形という.

$$I_1 := \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \rightarrow \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(k, \varphi)$$

$$I_2 := \int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz \rightarrow \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} = E(k, \varphi)$$

$$I_3 := \int \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \rightarrow \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \Pi(k, n, \varphi)$$

このとき, 記号 $\rightarrow$ は $z = \sin \varphi$ とおき, 変数変換を行うことを意味する. また, k を母数, n をパラメータという.

特に, $\varphi = \pi/2$ までの積分を $K(k) = F(k, \pi/2), E(k)$ 等と表す.

Definition. 6 擬似楕円積分

$\int f(x, \sqrt{p(x)})dx$ において, 型は楕円積分であるが, 実際の積分結果は初等関数で表されるものを擬似楕円積分という.

Example. 2 擬似楕円積分

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}} dt &= \sin^{-1} x^2 \\ \int_0^x \frac{t+1}{(t-1)\sqrt{t^3+t}} dt &= \sqrt{2} \log \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2x}} \\ \int_0^x \frac{t}{(a^2+t^2)\sqrt{a^4-t^4}} dt &= -\frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\end{aligned}$$

などは、結果が初等関数で表現され、擬似楕円積分である。

Remark. 2 本質的に重要であるのは第 1 種楕円積分である。これは、後述の Jacobi の楕円関数が第 1 種楕円積分から導かれること、また、それらを積分することによって第 2, 3 種楕円積分が得られることに起因する。

2.2 物理的な例

次に、第 1 種楕円積分の物理的な例を見ることにする。

Example. 3 円輪の potential

円輪の potential U は、

$$U = 2k \sqrt{\frac{r}{b}} K(k)$$

によって与えられる。ただし、ここに言う円輪の potential とは、次のようなものを意味する。

- 一様線密度を持つ円輪の、万有引力による位置 energy.
- 一様静電荷をもつ円輪の、静電 potential.

Proof. 配置を yz 平面, 原点中心, 半径 r [m] とする。また, potential を求める xy 平面内の点 P を, $P = P(a, b, 0)$ とおき, 円輪上の点を $Q = Q(0, r \cos \theta, r \sin \theta)$ とする。このとき,

$$d(P, Q) = \sqrt{a^2 + (b - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 + (b + r)^2 - 4br \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

線密度 1 の時, 点 P での potential は、

$$\begin{aligned}U &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{d(P, Q)} d\theta = 2r \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + (b + r)^2 - 4br \cos^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{2r}{\sqrt{a^2 + (b + r)^2}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4br \cos^2 \frac{\theta}{2}}{a^2 + (b + r)^2}}}\end{aligned}$$

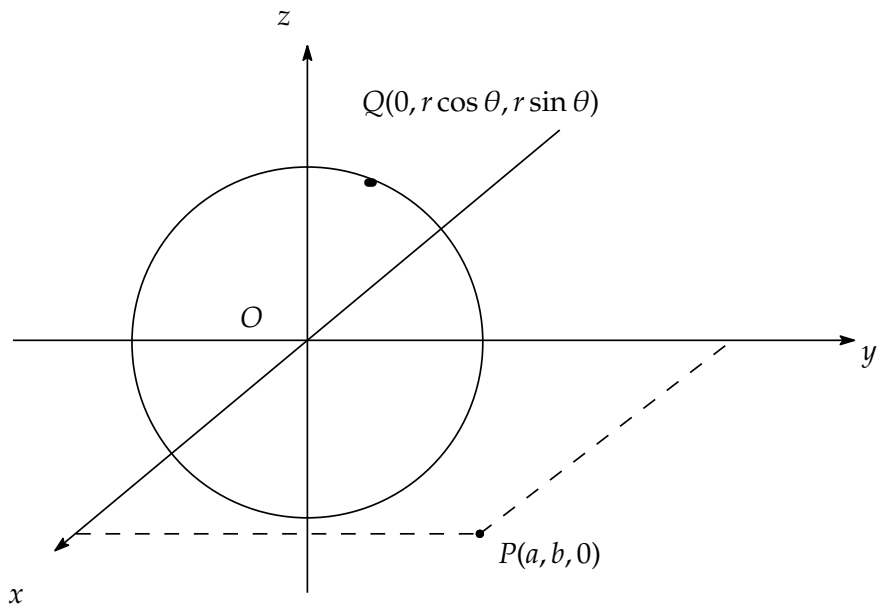


図 2.1 円輪の potential

ここで、 $\theta = \pi - 2\varphi$ とおき、置換積分を行うと、

$$U = \frac{4r}{a^2 + (b+r)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4br \cos^2 \frac{\theta}{2}}{a^2 + (b+r)^2}}}$$

となる。さらに、

$$k^2 := \frac{4br}{a^2 + (b+r)^2}$$

とおき、定数項を前に出して、

$$U = 2k \sqrt{\frac{r}{b}} K(k)$$

を得る。

Example. 4 非線形のバネ
力が

$$f = -(\alpha x + \beta x^3), \quad (\alpha > 0)$$

によって記述される場合、その振動の周期 $T[\text{s}]$ は第 1 種楕円積分を用いて、

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{a} k \cdot K(k)$$

と表される。ただし、 α はバネ定数、 β は線型性からのズレを表すパラメータである。

Proof. まず、運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(\alpha x + \beta x^3), \quad \beta \neq 0$$

を, 時間に関して規格化する.

$$\hat{t} := \sqrt{\frac{\alpha}{m}}, \quad \hat{x} := \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

とおくと,

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{dx}{dt} = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}, \quad \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2}$$

から, 運動方程式は

$$\frac{d^2\hat{x}}{d\hat{t}^2} = -(x + x^3)$$

と, 簡略化して表される. 両辺に $(dx/dt)dt$ を掛け, energy 積分を行う. すなわち,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right) = -(x + x^3)dx$$

の両辺を x で積分し,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \quad (2.1)$$

ただし, E は全 energy を表す定数. よって, $U(x)$ を potential として,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) =: \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) \quad (2.2)$$

このとき, (2.1) を書き換えて,

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2E - x^2 - \frac{1}{2}x^4}$$

から, 時間 $t[s]$ は, 楕円積分を用いて

$$t = \int^* \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2 - \frac{1}{2}x^4}}$$

と表される. ここで運動の端点を考える. 運動に関する実数という制限のもと, 平方根の中身が正の範囲で運動が行われるものとする. すなわち, 端点において運動 energy が 0 をとるとすると, $E = U(x)$ における x が, 端点を表す. この点を $x = a$ と書くことにすると, (2.2) で

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

とおき,

$$a^4 + 2a^2 - 4E = 0$$

を a^2 について解く.

$$a^2 = -1 + \sqrt{1 + 4E}$$

となり, ここから, 平方根の中身に関する因数分解表現

$$2E - x^2 - \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)(2 + a^2 + x^2)$$

を得る. よって,

$$t = \int^* \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2 - \frac{1}{2}x^4}} = \sqrt{2} \int^* \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(2 + a^2 + x^2)}}$$

ここで, $x = a \cos \varphi$ とおくと, $dx = -a \sin \varphi d\varphi$ から,

$$\begin{aligned} t &= \pm \sqrt{2} \int^{\varphi} \frac{-a \sin \theta d\theta}{\sqrt{(a^2 - a^2 \cos^2 \theta)(2 + a^2 + a^2 \cos^2 \theta)}} = \pm \sqrt{2} \int^{\varphi} \frac{-a \sin \theta d\theta}{a^4(1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + 2a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \pm \sqrt{2} \int^{\varphi} \frac{d\theta}{a^2(1 + \cos^2 \theta) + 2} = \pm \sqrt{2} \int^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 + a^2) - a^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \int^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \left(k^2 = \frac{a^2}{2(1 + a^2)} \right) \end{aligned}$$

と表される. したがって, 振動の周期は, $\varphi \in [0, \pi/2]$ の4倍であるから,

$$T = \pm \frac{4}{\sqrt{1 + a^2}} \int^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{4\sqrt{2}}{a} kK(k) \quad (2.3)$$

と表される.

元の単位に戻し, $\beta \rightarrow 0$ とした時, 線型のパネの周期になっていることを確認する.

$$t \rightarrow \sqrt{\frac{m}{\alpha}} t, \quad E \rightarrow \frac{\beta}{\alpha^2} E$$

を (2.3) に用いて,

$$t = \pm \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \beta a^2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad a^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{\beta}$$

さらに,

$$k^2 = \frac{\beta a^2}{2(\alpha + \beta a^2)}, \quad T = \frac{4\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \beta a^2}} K(k)$$

ここで, $\beta \rightarrow 0$ とすると, $T[s]$ は,

$$T = \frac{4\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha + \beta a^2}} K(k) \rightarrow 4\sqrt{\frac{m}{\alpha}} K(0) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

となり, 線型のパネの場合の周期と一致している.

Example. 5 振り子の振動, 回転

振り子の振動における周期 $T[s]$ は, 第 1 種楕円積分を用いて

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} F(k)$$

によって与えられる. 振り子の糸の部分が棒で置き換えられた回転の場合でも, 周期は第 1 種楕円積分によって表される.

Proof. 全 energy を $E[J]$, 振れの角を $\theta[\text{rad}]$, 糸の長さを $l[m]$, 振り子の質量を $m[\text{kg}]$, さらに $\alpha := \max\{\theta | 0 \leq \theta < \pi\}$ とする. energy 保存則により,

$$\frac{m}{2} \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E. \quad (2.4)$$

$$E = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (2.5)$$

ここから $d\theta/dt$ を求める.

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

から,

$$\cos \theta - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.6)$$

ここで (2.4), (2.5) から,

$$\frac{m}{2} \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \alpha)$$

を得る. これを $d\theta/dt$ について解くと,

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha)}$$

ここに (2.6) を用いて,

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} =: 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

と表される. 1 周期において, $\alpha > \theta$ から,

$$\left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \leq k = \sin \frac{\alpha}{2}$$

なので, $k \sin \varphi := \sin \frac{\theta}{2}$ とおくと,

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} k \cos \theta.$$

一方, $\theta = 2 \sin^{-1}(k \sin \varphi)$ から,

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

なので, $\theta = 0 (\varphi = 0)$ から t を測ると,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\hat{t}} dt = \sqrt{\frac{g}{l}} \hat{t}$$

すなわち, 時間 t は

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \varphi)$$

によって得られる. 特に 1 周期 T は,

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

によって与えられる.

Proposition. 7 $K(k)$ を計算する 1 つの方法

k が十分小さい時, $1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$ について展開 (1 次近似) して,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots \right)$$

が得られる.

Proof. $k \ll 1$ とする. $1/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$ を k^2 について展開して,

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \varphi + \cdots \right) d\varphi = \left[\varphi + \frac{k^2}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + \cdots \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{4} \frac{\pi}{2} + \cdots = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots \right) \end{aligned}$$

を得る.

第 3 章

Jacobi の楕円関数

3.1 実変数関数としての Jacobi の楕円関数

三角関数に関して,

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x, \quad \sin y = x$$

を考える時, 積分表示を扱うより, 逆関数として $\sin y$ を扱う方が関数としての振る舞いを把握しやすい. このことを参考にし, Jacobi の楕円関数 (sn 関数) を定める.

Definition. 7 Jacobi の楕円関数

第 1 種楕円積分の逆関数として, $\text{sn}(x)$ を定義する. すなわち,

$$u := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \text{sn}^{-1}x$$

このとき,

$$x = \text{sn}u$$

を満たし, これを Jacobi の sn 関数という. このとき, 定義域 $-1 \leq x \leq 1$ において, $x: -1 \rightarrow 1$ のとき, $\text{sn}: -K(k) \rightarrow K(k)$ (第 1 種完全楕円積分) を動く (実際は, u についての繰り返しを考えることで, $-\infty$ から ∞ まで範囲を拡張できる).

Definition. 8 cn 関数

cnu を,

$$\text{cnu} := \sqrt{1 - \text{sn}^2 u}, \quad (-K(k) \leq u \leq K(k))$$

によって定める.

Definition. 9 dn 関数

$0 \leq \forall k \leq 1 (k \in \mathbb{R})$ に対して, dnu を

$$\text{dnu} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}, \quad (-K(k) \leq u \leq K(k))$$

によって定める.

Corollary. 6 $k = 0$ のとき,

$$\operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1$$

が成立する.

Corollary. 7 $k = 1$ のとき,

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1} x$$

から,

$$\operatorname{sn} u = \tanh x = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\cosh u}$$

が成立する.

Definition. 10 amplitude (振幅関数)

$$u = F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

の逆関数

$$\varphi = \operatorname{am}(u) = \operatorname{am}(u, k)$$

を, 振幅関数という.

Proposition. 8 sn 関数, cn 関数に対して,

$$\operatorname{sn}(u) = \sin(\operatorname{am}(u)), \quad \operatorname{cn}(u) = \cos(\operatorname{am}(u))$$

が成立する.

Proof. 定義により

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \operatorname{sn}^{-1} x.$$

$x = \sin \theta$ とおくと,

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

このとき, $x = \sin \varphi = \sin(\operatorname{am} u)$ と表される. 定義から $x = \operatorname{sn}(u, k)$ なので,

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin(\operatorname{am} u).$$

同様に,

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u = 1 - \sin^2(\operatorname{am} u) = \cos^2(\operatorname{am} u)$$

であるから,

$$\operatorname{cn} u = \cos(\operatorname{am} u)$$

を得る.

Proposition. 9 amplitude と dn 関数の関係

$$\operatorname{dn} u = \frac{d}{du} \operatorname{am} u$$

が成立する.

次に, Jacobi の楕円関数の微分について考える.

Proposition. 10 以下が成立する.

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$$

Proof. 順に示す.

1. sn 関数

$$x = \operatorname{sn} u \Rightarrow u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

から,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ここで, $x = \operatorname{sn} u$ なので,

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$$

を得る.

2. cn 関数

合成関数の微分法により,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= \frac{d}{du} \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u} = -\frac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u \\ &= -\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \end{aligned}$$

を得る.

3. dn 関数

同様に, 合成関数の微分法により,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= \frac{d}{du} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u} = -\frac{k^2 \operatorname{sn} u}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u \\ &= -\frac{k^2 \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \end{aligned}$$

を得る.

sn 関数は, 第1種楕円積分の逆関数として定義された. 次に, $\text{cn}^{-1}, \text{dn}^{-1}$ の積分表示を考える.

Proposition. 11 cn 関数の逆関数は, 以下のように積分表示される.

$$\text{cn}^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 x^2)}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

Proof. cn 関数の微分

$$(\text{cn } u)' = -\text{sn } u \text{ dn } u$$

から, $t = \text{cn } u$ とおくと,

$$(\text{cn } u)' = -\sqrt{(1-t^2)\{1-k^2(1-t^2)\}} = -\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2(1-t^2)} \quad (3.1)$$

(3.1) で, $k' := \sqrt{1-k^2}$ と定めると,

$$\frac{dt}{du} = -\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}$$

と表される. よって,

$$du = -\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}$$

から,

$$u = -\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}$$

となる. ただし, 下端は $u = 0$, すなわち $x = \text{cn } 0 = 1$ で定まる. 従って, 積分表示

$$\text{cn}^{-1} u = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

を得る.

Proposition. 12 dn 関数の逆関数は, 以下のように表される.

$$\text{dn}^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - k'^2)}}, \quad k'^2 = 1 - k^2$$

Proof. まず $t = \text{dn } u$ とおくと,

$$\frac{d}{du} \text{dn } u = \frac{dt}{du} - k^2 \text{sn } u \text{ cn } u$$

一方, $\text{dn } u = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}$ から,

$$\text{sn}^2 u = \frac{1 - \text{dn}^2 u}{k^2} = \frac{1 - t^2}{k^2}$$

また,

$$\begin{aligned}\operatorname{dn}^2 u &= 1 - \operatorname{sn}^2 u = 1 - \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2} \\ &= \frac{k^2 - 1 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2} = \frac{k^2 - 1 + t^2}{k^2}\end{aligned}$$

と表されるので,

$$du = -\frac{dt}{k^2 \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{k^2}\right)\left(\frac{k^2-1+t^2}{k^2}\right)}} = -\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}$$

となる. 端点について, $u = 0$ すなわち $t = \operatorname{dn} 0 = 1$ から両辺の積分を行い, 上端, 下端を入れ替えて,

$$\operatorname{dn}^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}, \quad k'^2 = 1 - k^2$$

を得る.

3.2 Jacobi の楕円関数と, 第 2 種, 第 3 種楕円積分の関係

定義から, 第 1 種楕円積分は $\operatorname{sn}^2 u$ の積分で記述される. 次に, 第 2 種, 第 3 種楕円積分の被積分関数がどうなっているかを考える.

Proposition. 13 第 2 種楕円積分は, $\operatorname{dn}^2 u$ の積分によって表される. このとき,

$$E(k, \varphi) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 t dt =: \varepsilon(u)$$

として, $\varepsilon(u)$ を, Jacobi の ε 関数という.

Proof. 第 2 種楕円積分

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (3.2)$$

において, $\operatorname{sn} t = \sin \theta$ と定めると, $\cos \theta = \operatorname{cn} t$. また, 両辺の微分から, $\cos \theta d\theta = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t dt$. これらから,

$$d\theta = \operatorname{dn} t dt.$$

一方, (3.2) の被積分関数は,

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} = \operatorname{dn} t$$

と表され, $\sin \theta = \operatorname{sn} t$ から, 第 2 種楕円積分 $E(k, \varphi)$ は,

$$\begin{aligned}E(k, \varphi) &= \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} \operatorname{dn} t dt = \int_0^u \operatorname{dn}^2 t dt \\ &= \varepsilon(u).\end{aligned}$$

となり, 第2種楕円積分は, $\text{dn}^2 u$ の積分によって表される.

Proposition. 14 第3種楕円積分は, $1/(1+n\text{sn}^2 w)$ の積分によって表される.

Proof. $z = \text{sn } w$ とおくと, $dz = \text{cn } w \text{ dn } w \text{ dn } w$. ここで,

$$(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = (1+n\text{sn}^2 w)\sqrt{\text{cn}^2 w \text{ dn}^2 w}$$

から,

$$\int^* \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int^* \frac{dw}{1+n\text{sn}^2 w}$$

となる. よって第3種楕円積分は, $1/(1+n\text{sn}^2 w)$ の積分で表される.

Jacobi の ε 関数と, 楕円の弧長との関係を示しておく.

Proposition. 15 楕円の弧長は, 母数 k を

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

と選ぶと, $aE(k, \varphi) = a\varepsilon(u)$ で表すことが出来る.

Proof. 楕円の式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

において, $x = a \sin \theta, y = b \cos \theta$ で,

$$\theta = \text{am}(t, k) \quad (0 < \forall k \leq 1)$$

とおくと, $x = a \text{sn } t, y = b \text{cn } t$ と表される. また,

$$dx = a \text{cn } t \text{ dn } t dt, \quad dy = -b \text{sn } t \text{ dn } t dt$$

から,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 \text{cn}^2 t + b^2 \text{sn}^2 t} \text{ dn } t dt \\ &= a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{sn}^2 t} \text{ dn } t dt \end{aligned}$$

と表され, 特に $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ と選ぶと,

$$ds = a \text{dn } t \text{ dn } t dt = a \text{dn}^2 t dt$$

と書かれる. よって弧長は,

$$s = a \int_0^u \text{dn}^2 t dt = a\varepsilon(u) = aE(k, \varphi) \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

と表される.

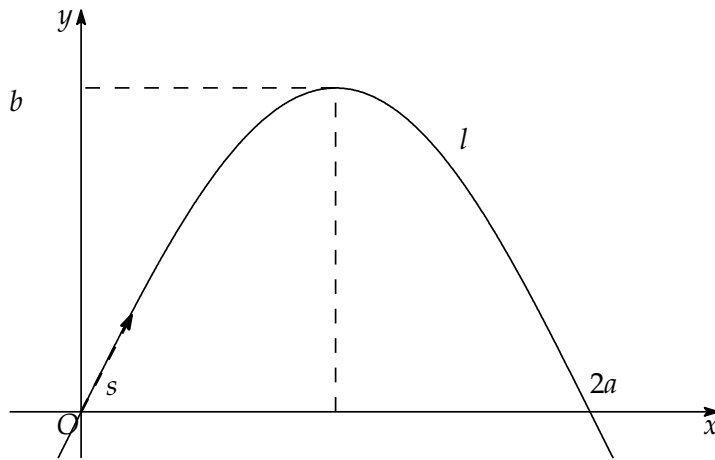


図 3.1 sn 関数の弧長

3.3 Jacobi の楕円関数の, 物理に対する応用例

Jacobi の楕円関数の, 物理的な応用例を考える.

Proposition. 16

sn 関数の弧長は, $E(k), K(k)$ を用いて表すことが出来る. すなわち, 回転軸との $x \neq 0$ である交点を $x = 2a$ とすると,

$$l = \frac{4aE}{Kk'} - 2a$$

と表される.

Proof. b, c を定数とする. 曲線

$$y = b \operatorname{sn}\left(\frac{x}{c}\right), \quad b = \frac{2k}{1-k^2}c$$

の弧長を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{c} \operatorname{cn}\left(\frac{x}{c}\right) \operatorname{dn}\left(\frac{x}{c}\right)$$

また, 弧長を s とすると, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ から,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \operatorname{cn}^2\left(\frac{x}{c}\right) \operatorname{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right) \quad (3.3)$$

さらに,

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u = 1 + \frac{1}{k^2}(\operatorname{dn}^2 u - 1) \quad (3.4)$$

この (3.4) を (3.3) に用いて,

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{k^2} \left(\operatorname{dn}^2 \frac{x}{c} - 1\right)\right\} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x}{c}\right) = 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{k^2 - 1}{k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{1}{k^2} \operatorname{dn}^4 \left(\frac{x}{c}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{1 - k^2}{k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{1}{k^2} \operatorname{dn}^4 \left(\frac{x}{c}\right)\end{aligned}$$

ここで特に, $b = 2kc/(1 - k^2)$ ととると, 以下のように簡単になる.

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{2k}{1 - k^2}\right)^2 \frac{1 - k^2}{k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x}{c}\right) + \left(\frac{2k}{1 - k^2}\right)^2 \frac{1}{k^2} \operatorname{dn}^4 \left(\frac{x}{c}\right) \\ &= \left\{1 - \frac{2}{1 - k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x}{c}\right)\right\}^2 = \left\{\frac{2}{1 - k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x}{c}\right) - 1\right\}^2\end{aligned}$$

よって,

$$ds = \left\{\frac{2}{1 - k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{x}{c}\right) - 1\right\} dx.$$

弧長 s を, x の増加方向に原点から測る $x \rightarrow t$ で表すと,

$$\begin{aligned}s &= \int_0^x \left\{\frac{2}{1 - k^2} \operatorname{dn}^2 \left(\frac{t}{c}\right) - 1\right\} dt = \frac{2}{1 - k^2} \int_0^x \operatorname{dn}^2 \left(\frac{t}{c}\right) dt - x \\ &=: \frac{2}{k'^2} \int_0^x \operatorname{dn}^2 \left(\frac{t}{c}\right) dt - x \quad (k' := \sqrt{1 - k^2})\end{aligned}$$

この積分を, 第2種楕円積分に書き直す. $\sin \theta = \operatorname{sn} t$ とおくと,

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \operatorname{dn} t \tag{3.5}$$

また, 両辺を微分して,

$$\cos \theta d\theta = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t dt \tag{3.6}$$

(3.6) で, $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 t} = \operatorname{cn} t$ を用いると,

$$\operatorname{cn} t d\theta = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t dt$$

すなわち,

$$d\theta = \operatorname{dn} t dt.$$

よって, 先程の積分は,

$$\varepsilon(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 t dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = E(k, \varphi)$$

と書き直され, 第2種楕円積分によって表される ($t = x/c, dt = dx/c$). 従って, 弧長は $\varepsilon(x/c)$ を用いて,

$$s = \frac{2}{k'^2} \int_0^{\frac{x}{c}} \operatorname{dn}^2 t dt - x = \frac{2c}{k'^2} \varepsilon \left(\frac{x}{c}\right) - x$$

と表される. 次に, 弧長全体を考える. 弧が $x = 0$ の次に x 軸と交点を持つ点を $x = 2a$ とする. すなわち,

$$y = b \operatorname{sn}\left(\frac{2a}{c}\right) = 0.$$

また, $\operatorname{sn}(x/c) = 0$ となる x/c の値においては, $K(k)$ を第 1 種楕円積分を用いて,

$$\frac{x}{c} = 2K(k)$$

を満たす. このとき $x = 2a$ であるから, 代入すると

$$\frac{2a}{c} = 2K(k).$$

よって

$$\frac{1}{c} = \frac{K(k)}{a} \quad (3.7)$$

一方,

$$\begin{aligned} E = E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 t} dt = \int_0^K \operatorname{dn}^2 u du \end{aligned}$$

これは第 2 種完全楕円積分で, (3.7) を用いると, $x = 0$ から $x = 2a$ までの曲線の全弧長 l は $x = 2a$ において,

$$l = \frac{2c}{k'^2} 2E - 2a = \frac{4cE}{k'^2} - 2a = \frac{4aE}{Kk'^2} - 2a$$

と表される.

次に, 簡単な Model として, 一定平面内におけるロープの回転を考察する (なお, このことに関して, セミナーにおいては「ロープの両端が回転軸上に無い場合の回転面は, sn 関数と cn 関数によって表示される」ことも示したが, (筆者の力不足のために) やや数学的に厳密さを欠いてしまったので, 深入りはしないことにする).

Proposition. 17 この運動において, ロープの形は sn 曲線である. (potential energy が最小である曲線の形になっている)

Proof. 角速度を ω [rad/s] とする. x 軸から y [m] 離れた点における, ロープの単位質量に働く向心力を f とすると,

$$f = \omega^2 y.$$

によって与えられる. 線密度を ρ [kg/m], 弧長を s [m], ロープの全長を l [m] とし, 曲線の形を $y = y(s)$ で表すと, 向心力による全位置 energy (potential energy) は,

$$U = -\rho\omega^2 \int_0^l y^2(s) ds$$

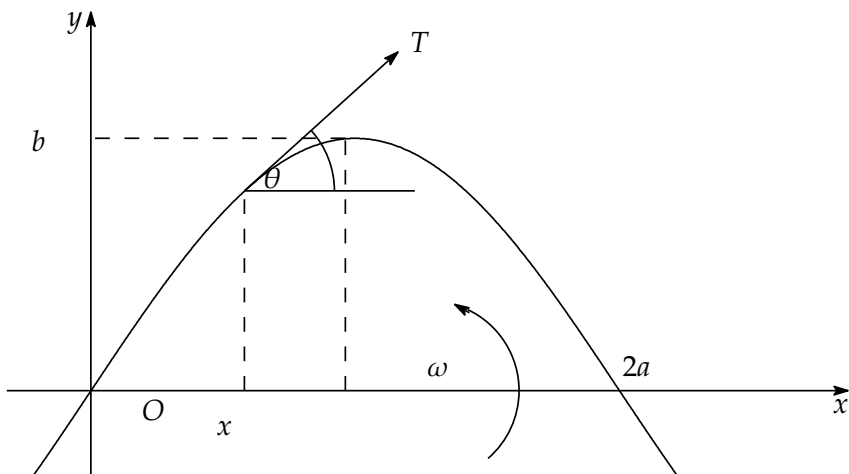


図 3.2 一定平面内におけるロープの回転

と書かれる. 曲線の形 $y = y(s)$ は変分原理により, potential を最小にするものであり, さらに, ρ, ω^2 に依存しない. すなわち形状はロープの全長と両端の固定点の距離のみで決定される (これは, catenary の形がロープの全長と端点のみで決定されることと似ている). 各点に働く向心力のため, ロープの張力 $T[\text{N}]$ は一定でない. したがって, x, y 方向に分解して考える. まず, x 方向に関しては向心力が働かないので, つりあいの式を立てる.

$$T \cos \theta = T \frac{dx}{ds}$$

ここで, 外力 0, すなわち微分した値は 0 であるから,

$$\frac{d}{ds} (T \cos \theta) = \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0.$$

よって, 定数 $T_0[\text{N}]$ を用いて,

$$T \cos \theta = T \frac{dx}{ds} = T_0 \quad (3.8)$$

と表される. 一方, y 軸方向に関しては向心力も働く. 向心力の大きさは, ロープの長さ ds に対して, $\rho \omega^2 y ds$ で, これが張力の y 成分とつりあう.

$$\rho \omega^2 y(s) ds + \frac{d}{ds} (T \sin \theta) ds = \rho \omega^2 y(s) ds + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) ds = 0.$$

よって,

$$\rho \omega^2 y(s) + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0. \quad (3.9)$$

ここで (3.9) に (3.8) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + \rho \omega^2 y(s) &= \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} \right) + \rho \omega^2 y(s) \\ &= \frac{d}{ds} \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) + \rho \omega^2 y(s) = 0. \end{aligned}$$

両辺を T_0 で割ると,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{\rho\omega^2}{T_0} y(s) = 0 \quad (3.10)$$

を得る. さらに, もう 1 本の関係式を作る.

$$p := \frac{dy}{dx}$$

とおき,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = p \frac{dx}{ds}$$

から,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} p &= \frac{dp}{dy} \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dp}{dy} \frac{dx}{ds} \\ &= p \frac{dp}{dy} \frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (3.11)$$

さらに $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ から,

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + p^2 \quad (3.12)$$

(3.10),(3.11) から,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -\frac{\rho\omega^2}{T_0} y(s)$$

また

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{ds} p = p \frac{dp}{dy} \frac{dx}{ds}$$

さらに (3.12) から,

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{\rho\omega^2}{T_0} y(s) \frac{ds}{dx} = -\frac{\rho\omega^2}{T_0} y \sqrt{1 + p^2}$$

すなわち, 非線型の方程式

$$p \frac{dp}{dy} = -\frac{\rho\omega^2}{T_0} y \sqrt{1 + p^2}$$

を得る. これを変形し,

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} dp = -\frac{\rho\omega^2}{T_0} y dy.$$

とする. まず, 左辺について考える. $1 + p^2 = t$ とおくと, $2p dp = dt$. ここで $dy/dx = p : 0 \rightarrow p_1$ の時, $y : b \rightarrow y_1, t : 1 \rightarrow 1 + p_1^2$ であることを用いて,

$$\int_0^{p_1} \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{2} \int_1^{1+p_1^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[\sqrt{t} \right]_1^{1+p_1^2} = \sqrt{1 + p_1^2} - 1.$$

一方, 右辺に関して,

$$-\frac{\rho\omega^2}{T_0} \int_b^{y_1} y dy = -\frac{\rho\omega^2}{2T_0} (y_1^2 - b^2)$$

について, $y_1 \rightarrow y, p_1 \rightarrow p$ と書くと,

$$\sqrt{1+p^2} - 1 = \frac{\rho\omega^2}{2T_0} (b^2 - y^2)$$

から,

$$1+p^2 = 1 + \frac{\rho\omega^2}{T_0} (b^2 - y^2) + \frac{\rho^2\omega^4}{4T_0} (b^2 - y^2)^2$$

両辺を整理して,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2 = \frac{\rho\omega^2}{T_0} (b^2 - y^2) \left\{ 1 + \frac{\rho\omega^2}{4T_0} (b^2 - y^2) \right\}. \quad (3.13)$$

ここで

$$k^2 := \frac{\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}}{1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}}$$

とおくと, $0 < k < 1$. また,

$$\eta = \frac{y}{b}, \quad d\eta = \frac{1}{b} dy$$

とおくと (3.13) から,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0} (b^2 - y^2) \left\{ 1 + \frac{\rho\omega^2}{4T_0} (b^2 - y^2) \right\}} \\ &= b^2 \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right\} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{\rho\omega^2}{4T_0} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b}\right) \right\} \right]} \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{dy}{b^2 \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right\} \left[\frac{1}{b^2} + \frac{\rho\omega^2}{4T_0} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b}\right) \right\} \right]}} = dx.$$

ここで $y/b = \eta$ であるから,

$$\frac{d\eta}{\sqrt{b^2 \frac{\rho\omega^2}{T_0} (1 - \eta^2) \left\{ \frac{1}{b^2} + \frac{\rho\omega^2}{4T_0} (1 - \eta^2) \right\}}} = dx.$$

両辺に $\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)}$ を掛けると,

$$\frac{d\eta \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)}}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}(1-\eta^2)\left\{\frac{4T_0 + \rho\omega^2 b^2}{4T_0} - \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\eta^2\right\}}} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)} dx$$

左辺に関して整理すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d\eta \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)}}{\sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}(1-\eta^2)\left\{\frac{4T_0 + \rho\omega^2 b^2}{4T_0} - \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\eta^2\right\}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}} d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left\{\frac{4T_0 + \rho\omega^2 b^2}{4T_0} - \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\eta^2\right\}}} \\ & = \frac{\sqrt{\frac{4T_0\rho\omega^2 b^2}{4T_0}} d\eta}{\sqrt{\frac{1}{4T_0}(1-\eta^2)\{(4T_0 + \rho\omega^2 b^2) - \rho\omega^2 b^2\eta^2\}}} = \frac{\sqrt{4T_0 + \rho\omega^2 b^2} d\eta}{(1-\eta^2)\{(4T_0 + \rho\omega^2 b^2) - \rho\omega^2 b^2\eta^2\}} \\ & = \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left\{1 - \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0 + \rho\omega^2 b^2}\eta^2\right\}}} = \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}, \quad k^2 = \frac{\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}}{1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}} \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)} dx =: \frac{dx}{c}$$

このとき,

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)} = \frac{2k}{k'^2 b}$$

と表され,

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = \frac{dx}{c}$$

の両辺を積分し,

$$\eta = \operatorname{sn}\left(\frac{x}{c}\right) \Leftrightarrow y = b \operatorname{sn}\left(\frac{x}{c}\right)$$

を得る. また,

$$b = \frac{2k}{k'^2} c$$

を満たし, ロープの形は sn 曲線である.

ここで, 得ることが出来るその他の情報について整理する. 両端が x 軸上で $x = 0, x = 2a$ とすると,

$$\frac{1}{c} = \frac{K(k)}{a}$$

を満たし,

$$y = b \operatorname{sn}\left(\frac{Kx}{a}\right)$$

となる. また全長 l は,

$$l = \frac{4a}{k'^2} \frac{E}{K} - 2a$$

となる. したがって, 逆に全長および端点に関する情報を与えることで, sn 関数の形状が定まることになる. すなわち, 以下の手順によって形が決まる.

1. 長さ $l[\text{m}]$ のロープを, $x = 0, x = 2a$ で固定する.
2. 母数 k が,

$$l = \frac{4a}{k'^2} \frac{E}{K} - 2a$$

によって定まる.

3. ロープの振れ幅 b は,

$$b = \frac{2k}{k'^2} c, \quad \frac{1}{c} = \frac{K(k)}{a}$$

によって定まる.

4. $\rho\omega^2/4T_0$ が,

$$\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0} \left(1 + \frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)} = \frac{2k}{k'^2 b}$$

によって定まる. ここで, 回転数 $\omega/2\pi$ は任意の値をとり得ることに注意する.

5. $\omega/2\pi$ を与えると, ロープの張力に関係した T_0 が定まる.

さらに, 両端における張力 $T[\text{N}]$ の求め方は, 次のようになる. φ_0 を, 両端で x 軸となす角として,

$$\tan \varphi_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{b}{c}$$

また, 張力の x 軸方向の両端における値は一定で,

$$T \cos \varphi_0 = T_0.$$

よって, 両端の張力は

$$T = \frac{T_0}{\cos \varphi_0} = T_0 \sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1} = T_0 \sqrt{\left(\frac{2k}{k'^2}\right)^2 + 1}.$$

によって得られる.

第 II 部

展開部

複素関数としての楕円関数

第 4 章

複素変数の楕円関数

実変数の場合について, Jacobi の楕円関数を中心に性質を調べたが, (Jacobi の楕円関数を含めて) 楕円関数の本質的な部分は複素変数で考えることで初めて明らかになる. 楕円関数の特徴はその 2 重周期性にあり, 実関数の複素領域への解析接続として得られる関数とは少し趣が異なる. また, Liouville の第 1, 第 2, 第 3, 第 4 定理などから, 楕円関数の間には, 調和のとれた非常に美しい関係が成立する.

4.1 一般の複素変数楕円関数

Definition. 11 周期関数

$D : f(z)$ が正則, $\forall z \in D$ に対して,

$$\exists \omega \neq 0, \quad \text{s.t.} \quad z + \omega \in D, \quad f(z + \omega) = f(z)$$

を満たす f を周期関数, ω を周期という.

Remark. 3 以下, $f(z)$ は $|z| < \infty$ で孤立特異点を除いて 1 価正則, かつ, $f(z)$ は定数関数ではないものとする.

Definition. 12 周期点

ω 全体の集合のことを, 周期点全体の集合という.

Definition. 13 単一周周期関数

原点を通る一直線上に周期点が等間隔で並び, それ以外に周期点を持たないとき, これを単一周周期関数という.

Definition. 14 2 重周期関数

ω, ω' が, 以下を満たす

$$\omega \cdot \omega' \neq 0, \quad \frac{\omega}{\omega'} \notin \mathbb{R}$$

すなわち, ω, ω' は原点を通る同一直線状に無い (1 次独立) とき, これらについて f の任

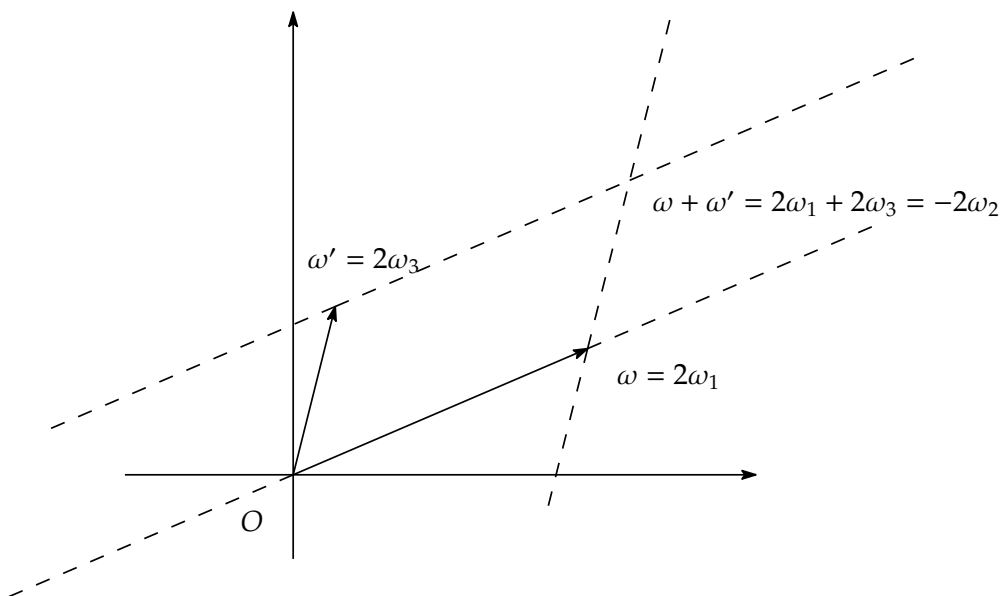


図 4.1 2 重周期関数の周期点全体の集合

意の周期が

$$\hat{\omega} := k\omega + k'\omega' \quad (\forall k, k' \in \mathbb{Z})$$

によって表されるとき, $f(z)$ を, ω, ω' を基本周期とする 2 重周期関数という.

Definition. 15 楕円関数

$|z| < \infty$ で定義された, 2 重周期性を持つ定数関数でない有理型 (真性特異点を持たない) 関数を, 楕円関数という.

Proposition. 18 周期点全体の図示

2 重周期関数の周期点は, 2 組の平行線全体の集合として表される. 便宜上, 以下のように周期を書き換える.

$$2\omega_1 := \omega, \quad 2\omega_3 := \omega'$$

ただし, $\Im(\omega'/\omega) > 0 \Leftrightarrow 0 < \arg \omega' - \arg \omega < \pi$ を満たすようにとる. また,

$$\omega_2 := -(\omega_1 + \omega_3)$$

と定める. さらに, 周期点全体の集合を

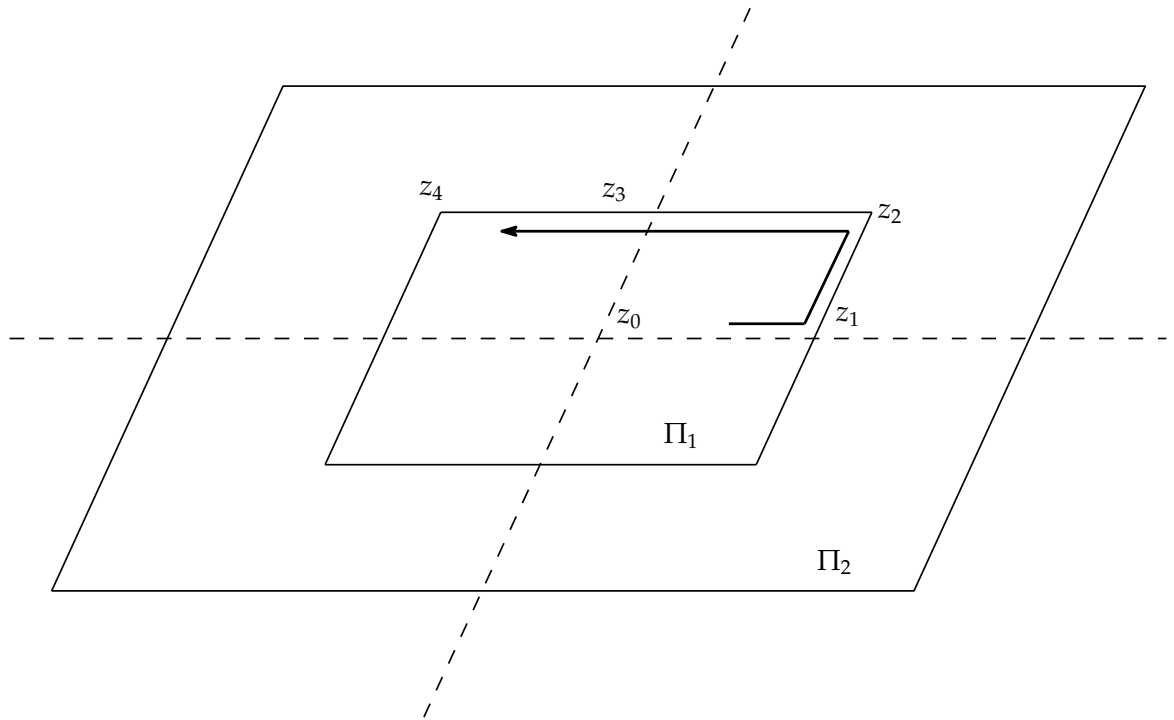
$$\Omega := \{\hat{\omega} | 2k\omega_1 + 2k'\omega_3 \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}\}$$

で表す.

Corollary. 8 各周期点 $0, 2\omega_1, -2\omega_2, 2\omega_3$ の 1 周は平行四辺形をなす. また, 関係式

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

が成立する.

図 4.2 平行四辺形 Π_n

Definition. 16 基本周期平行四辺形

4 点 $0, 2\omega_1, -2\omega_2, 2\omega_3$ を頂点とする平行四辺形を, 基本周期平行四辺形という.

Definition. 17 周期平行四辺形

$\forall \alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $\alpha, \alpha + 2\omega_1, \alpha - 2\omega_2, \alpha + 2\omega_3$ を 4 頂点とする平行四辺形を, 周期平行四辺形という.

4.2 Weierstrass の $\wp$ 関数

次に, 最も基本的で重要な意味を持つ Weierstrass の $\wp$ 関数を構成するために, 次の級数の絶対収束を示しておく.

Lemma. 1 $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z_v \in \mathbb{C}$ に対して, 級数

$$\hat{S} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_v} \right)^3$$

は, 絶対収束する.

Proof. 基本周期平行四辺形の 2 辺間の距離 d_1, d_2 の中で, 小さいほうを h とおく.

$$h := \min\{d_1, d_2\}$$

このとき、図のように名付けた平行四辺形 Π_n 上の周期点と原点の距離に関して、

$$d(z_\nu, 0) \geq nh$$

が成立する。 Π_n 上には $8n$ 個の周期点が存在し、

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_\nu} \right|^3 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8n \left(\frac{z}{nh} \right)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^3}{n^2} \frac{8}{h^3}$$

が成り立つ。ここで $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ ($n \rightarrow \infty$) を用いて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^3}{n^2} \frac{8}{h^3} < +\infty$$

従って、 $|z| < \infty$ に対し、 $\hat{S}_\nu$ は絶対収束する。

Lemma. 2 級数

$$S_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_\nu)^2} - \frac{1}{z_\nu^2} \right\}$$

は、 $\forall R > 0$ に対して、 $|z| < R$ で一様に絶対収束する (z に依存しない)。

Proof. $\forall R > 0$ に対し、 $|z| < R, |z_\nu| > 2R$ ($\forall z \in \mathbb{C}, z_\nu \in \Omega$) をとる。このとき、

$$\left| \frac{1}{(z - z_\nu)^2} - \frac{1}{z_\nu^2} \right| = \left| \frac{z(2z_\nu - z)}{z_\nu^2(z - z_\nu)^2} \right| \leq \frac{|z||2z_\nu - z|}{|z_\nu|^2|(z - z_\nu)^2|} \leq \frac{|z|(2|z_\nu| - |z|)}{|z_\nu|^2|(z - z_\nu)^2|} < \frac{R(2|z_\nu| - R)}{|z_\nu|^2|(R - z_\nu)^2|}$$

また、 $|z_\nu| > 2R$ から、

$$\frac{R(2|z_\nu| - R)}{|z_\nu|^2|(R - z_\nu)^2|} < \frac{R \frac{5}{2}|z_\nu|}{|z_\nu|^2 \left| \left(-\frac{1}{2}z_\nu \right)^2 \right|} = \frac{10R}{|z_\nu|^3}$$

ここで、 $\sum 1/|z_\nu|^3$ が絶対収束することから、級数

$$S_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_\nu)^2} - \frac{1}{z_\nu^2} \right\}$$

は、 $|z| < R$ で一様に絶対収束する。

Definition. 18 Weierstrass の $\wp$ 関数

関数

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_\nu)^2} - \frac{1}{z_\nu^2} \right\}$$

を $\wp$ 関数といい、 $|z| < R$ から $z_\nu \in \Omega$ を除いた領域で正則になる。 $\wp(z)$ は、各 z_ν に 2 位の極を持つ。 $\wp$ 関数の表示について触れておく。級数

$$S_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_\nu)^2} - \frac{1}{z_\nu^2} \right\}$$

が絶対収束する, すなわち順序交換可能であることから, $\wp(z)$ は,

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_{\nu})^2} - \frac{1}{z_{\nu}^2} \right\} = \frac{1}{z^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^2} - \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^2} \right\}$$

と表される. 周期を明示的に表す時は, 半周期を用いて

$$\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_3)$$

と書く.

$\wp$ 関数が楕円関数であることを示すために, 次を考える.

Proposition. 19 $\wp$ 関数は偶関数である.

Proof. 定義から,

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(-z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^2} - \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(z - 2(-k)\omega_1 - 2(-k')\omega_3)^2} - \frac{1}{(2(-k)\omega_1 + 2(-k')\omega_3)^2} \right\} = \wp(z), \quad (\exists(-k, -k') \in \mathbb{Z}^2) \end{aligned}$$

Proposition. 20 $\wp'(z)$ は奇関数で, 周期点に 3 位の極を持つ.

Proof. $\wp(z)$ は偶関数で,

$$\wp(-z) = \wp(z)$$

を満たす. 両辺を z で微分すると,

$$-\frac{d}{dz}\wp(-z) = \frac{d}{dz}\wp(z)$$

すなわち, $\wp'(-z) = -\wp'(z)$ (奇関数). さらに,

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{-2}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^3} \right\} = -\sum_{(k,k')} \frac{2}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^3}$$

となり, 各周期点に 3 位の極を持つ.

Proposition. 21 $\wp'(z)$ は楕円関数である.

Proof. 関係式

$$\wp'(z) = -\sum_{(k,k')} \frac{2}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^3}$$

から, ω_1 について,

$$\wp'(z + 2\omega_1) = -\sum_{(k,k')} \frac{2}{(z - 2(k-1)\omega_1 - 2k'\omega_3)^3} = \wp'(z)$$

同様に, ω_3 に対しても, $\wp'(z + 2\omega_3) = \wp'(z)$. この操作を繰り返すことで, $\forall m, m' \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\wp'(z + 2m\omega_1 + 2m'\omega_3) = \wp'(z)$$

が成立し, 有理型関数 $\wp'(z)$ は 2 重周期性を持つことが分かる. 従って, $\wp'(z)$ は楕円関数である.

Proposition. 22 $\wp$ 関数は楕円関数である.

Proof. $\wp'(z)$ は楕円関数であるから, $\wp'(z + 2\omega_1) = \wp'(z)$. この両辺を z で積分し,

$$\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z) + C, \quad C \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

ここで, $z = -\omega_1$ を代入し, 偶関数であることを用いて,

$$\wp(\omega_1) = \wp(-\omega_1) + C = \wp(\omega_1) + C$$

よって, $C = 0$ を得る. これを (4.1) に適用し,

$$\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z)$$

同様に ω_3 に対しても, $\wp(z + 2\omega_3) = \wp(z)$ を得る. この操作の繰り返しによって, $\forall m, m' \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\wp(z + 2m\omega_1 + 2m'\omega_3) = \wp(z)$$

を得る. よって, $\wp$ 関数は 2 重周期性を持つ有理型関数, すなわち楕円関数であることが分かる.

$\wp$ 関数についての性質を, もう少し見ておく.

Proposition. 23 以下が成立する.

$$\wp'(\omega_1) = \wp'(\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0.$$

Proof. 関係式 $\wp'(z + 2\omega_k) = \wp'(z)$ を考える. $k = 1$ の時, $z = -\omega_1$ を代入すると, 奇関数であることを用いて,

$$\wp'(\omega_1) = \wp'(-\omega_1) = -\wp'(\omega_1)$$

すなわち, $\wp'(\omega_1) = -\wp'(\omega_1)$. よって, $\wp'(\omega_1) = 0$ を得る. 他の $k = 2, 3$ の時も同様に成立する.

Proposition. 24 周期に関する性質 1

以下が成立する.

$$\wp(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_3) = \lambda^{-2} \wp(z | \omega_1, \omega_3)$$

Proof. 定義から,

$$\wp(z|\omega_1, \omega_3) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^2} - \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^2} \right\}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \wp(\lambda z|\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) &= \frac{1}{(\lambda z)^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(\lambda z - 2k\lambda\omega_1 - 2k'\lambda\omega_3)^2} - \frac{1}{(2k\lambda\omega_1 + 2k'\lambda\omega_3)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{z^2} + \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \left\{ \frac{1}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^2} - \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^2} \right\} \right] = \frac{1}{\lambda^2} \wp(z|\omega_1, \omega_3) \end{aligned}$$

Proposition. 25 周期に関する性質 2

以下が成立する.

$$\wp'(\lambda z|\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda^{-3} \wp'(z|\omega_1, \omega_3)$$

Proof. 定義から,

$$\wp'(z|\omega_1, \omega_3) = -2 \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^3} \right\}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \wp'(\lambda z|\lambda\omega_1, \lambda\omega_3) &= -2 \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{(\lambda z - 2k\lambda\omega_1 - 2k'\lambda\omega_3)^3} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \left[-2 \sum_{k,k' \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{(z - 2k\omega_1 - 2k'\omega_3)^3} \right\} \right] = \frac{1}{\lambda^3} \wp'(z|\omega_1, \omega_3) \end{aligned}$$

第 5 章

一般の楕円関数に関する性質

次に、一般の楕円関数を持つ性質を考察する．これらは、楕円関数の特徴付けを行う定理でもある．準備として、いくつかの記号を導入する．

5.1 楕円関数体

Definition. 19 合同

$\omega, \omega' : 1$ 次独立

$\forall u, v \in \mathbb{C}$ に対して, $\exists m, m' \in \mathbb{Z}$.s.t.

$$v - u = m\omega + m'\omega'$$

を満たすとき, v は ω, ω' を法として合同といい,

$$v \equiv u \quad (\omega, \omega')$$

と書く．また, u と合同な点全体の集合を $[u]$ で表す．

Definition. 20 楕円関数体

$\omega, \omega' : 1$ 次独立

$f: \omega, \omega'$ を周期とする有理型関数

このとき, ω, ω' を周期とする楕円関数全体のことを K で表し, K を楕円関数体という．

Example. 6 楕円関数体の性質

1. 定数関数 $\in K$.
2. $\forall f_1, f_2 \in K \Rightarrow f_1 + f_2 \in K, f_1 - f_2 \in K, f_1 \cdot f_2 \in K$, さらに, $f_2 \neq 0$ の時, $f_1/f_2 \in K$.
これらから, K は体をなしている事が分かる.
3. $f_1, f_2, \dots, f_n \in K$, $F: f_1, f_2, \dots, f_n$ の定数係数有理関数 とすると, $F \in K$.
4. $f' \in K$. ($f' : 1$ 次独立, $f'(z + \omega) = f'(z)$ から)
5. $\forall a, a' \in \mathbb{C}$ に対して,

$$a \equiv a' \quad (\omega, \omega')$$

を満たし、 a が f の極で

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z-a}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

ならば、 a' も f の極となり、 $z = a'$ における主部は $g(1/(z-a'))$ で表される。

6. $f \in K$ は、周期平行四辺形内に有限個の極を持つ。

Definition. 21 f の位数

$a_1, \dots, a_r : f$ の (重複を数えた) 極.

$r \geq 1$ (極の個数) を、 f の位数という. すなわち、周期平行四辺形内における極の位数の和のことを楕円関数の位数という (実際は、任意の楕円関数に対して $r \geq 2$ である).

Definition. 22 極の完全代表系

$\forall a_i (1 \leq i \leq r)$ に対して、 $a'_i \in [a_i]$ を取り、

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n$$

と並べたものを、 f の極の完全代表系という。

Remark. 4 ここで、 f の位数、極の完全代表系は ω, ω' の選び方に依存していることに注意する. 本質的に楕円関数体 K の性質は ω, ω' に依存せず、微分方程式と関連のある不変量によって決定されるが、便宜上 ω, ω' に依存する形で議論を行う。

一般の楕円関数の性質をみる事にする。

5.2 Liouville の第 1, 第 2, 第 3, 第 4 定理

Theorem. 1 Liouville の第 1 定理

整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則な関数) が 2 重周期を持つならば、それは定数関数である。

Proof. $f(z) : \text{整関数} \Rightarrow f(z)$ は、周期平行四辺形内で正則. よって、最大値の原理から、

$$\exists K > 0 : \text{定数 s.t. } |f(z)| < K (\text{有界}).$$

このとき、(2 重) 周期性から、

$$|z| < \infty \Rightarrow |f(z)| < K.$$

で、全平面で有界. ここで、Liouville の定理–有界な整関数は定数関数–を用いて、 $f(z)$ は定数関数であることが示された。

Liouville の第 1 定理から、楕円関数は必ず極を持つことが分かる。

Example. 7 $\forall f, g \in K$ に対して、同一周期平行四辺形内の極と、そこでの Laurent 展開の主部が一致するとき、 $f - g$ は整関数であるから、Liouville の第 1 定理によって $f - g$ は定数関数であることが分かる。

Example. 8

$\wp$ 関数は, 各周期点に 2 位の極を持ち, 2 位の楕円関数である. また, $\wp'$ は, 各周期点に 3 位の極を持ち, 3 位の楕円関数である. 同様に,

$$\wp^{(n)}(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_{\nu})^{n+2}} \right\} (n+1)!(-1)^n$$

から, $\wp^{(n)}$ は各周期点に $n+2$ 位の極を持ち, $n+2$ 位の楕円関数である.

Example. 9

f, g : 極と零点が, 位数を含めて同じとき, $\exists C$:定数 s.t.

$$\frac{f(z)}{g(z)} = C.$$

Theorem. 2 Liouville の第 2 定理

楕円関数の, 1 つの周期平行四辺形内にある, 極の留数の和は零.

Proof. 頂点

$$\alpha, \quad \alpha + 2\omega_1, \quad \alpha - 2\omega_2, \quad \alpha + 2\omega_3$$

の周期平行四辺形 Π (ただし, 周上に極が来ない様に α を選んでおく) をとる. $\forall f(z) \in K$ に對して, S : Π 内の極の留数の和とすると,

$$\begin{aligned} 2\pi i S &= \int_{\Pi} f(z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} f(z) dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} f(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(z) dz \end{aligned} \quad (5.1)$$

一方, $-(\omega_1 + \omega_3) = \omega_2$ から, 右辺において置換積分と周期性によって,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} f(z) dz &= \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha+2\omega_1+2\omega_3} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_3} f(\zeta + 2\omega_1) d\zeta \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_3} f(\zeta) d\zeta = - \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

同様に,

$$\int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} f(z) dz = - \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(\zeta) d\zeta$$

であるから, これらを (5.1) に用いて, 留数の原理から,

$$\begin{aligned} 2\pi i S &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} f(z) dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} f(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z) dz - \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(z) dz - \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

を得る.

Remark. 5 この定理により, 1 位の楕円関数は存在しないことが分かる. 楕円関数の位数は全て 2 以上である. 2 位の楕円関数は, 周期平行四辺形内の極で 2 パターンに分けることが出来る. すなわち,

1. ただ 1 つの 2 位の極を持つ (Weierstrass の $\wp$ 関数).
2. 1 位の極を 2 個持つ (Jacobi の楕円関数)

である (詳しくは後に述べる).

Theorem. 3 Liouville の第 3 定理

楕円関数の 1 つの周期平行四辺形内において, 零点の位数の和と極の位数の和は等しい.

Proof. $\forall f(z) \in K, \Pi$: 周期平行四辺形, n_0 : Π 内の零点の位数の和, n_∞ : Π 内の極の位数の和とする.

$$f(z) \in K \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} \in K$$

であり, Π 内の留数の和に対して, 偏角の原理および Liouville の第 2 定理から,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_0 - n_\infty$$

よって,

$$n_0 = n_\infty$$

を得る.

Example. 10

$\wp'$: 3 位の楕円関数 $\Leftrightarrow$ 極の位数の和は 3 $\Rightarrow$ 零点の位数の和は 3 (Liouville の第 3 定理).
ここで,

$$\wp'(\omega_1) = \wp'(-\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0$$

から, $\omega_1, -\omega_2, \omega_3$ に 1 位の零点を持ち, これ以外の零点は周期平行四辺形内に存在しない.

Proposition. 26

n 位楕円関数は, 周期平行四辺形内で任意の値を n 回とる.

Proof. $f(z)$: n 位楕円関数, $\forall a \in \mathbb{C}, |a| < \infty$: 定数

このとき, $f(z) - a$: n 位楕円関数であり, 定義によって極の位数の和は n . Liouville の第 3 定理により, 零点の位数の和も n . すなわち,

$$f(z) - a = 0$$

を満たす回数は n 回.

Theorem. 4 Liouville の第 4 定理

$f \in K, r: f$ の位数 ($r \geq 2$)

$a_1, a_2, \dots, a_r$: 極 (位数に応じて重複)

$b_1, b_2, \dots, b_s$: 零点 (位数に応じて重複)

このとき, 合同式

$$b_1 + b_2 + \dots + b_s \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_r \quad (\omega, \omega')$$

が成立する. すなわち, 楕円関数の, 1 つの周期平行四辺形内にある零点の和と, 極の和との差は, 1 つの周期に等しい. ただし, 零点の和, 極の和ともに位数分だけ重複して数え, 周期は必ずしも基本周期とは限らない.

Proof. 周期平行四辺形 Π 上に, $f'(z)/f(z)$ の極が来ないように α をとっておく.

$$\int_{\Pi} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

ここで, $f(z)$ が周期関数であることから,

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_1+2\omega_3}^{\alpha+2\omega_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha} (\zeta + 2\omega_3) \frac{f'(\zeta + 2\omega_3)}{f(\zeta + 2\omega_3)} d\zeta = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha} (z + 2\omega_3) \frac{f'(z + 2\omega_3)}{f(z + 2\omega_3)} dz \\ &= -2\omega_3 \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

一方, $f(\alpha) = f(\alpha + 2\omega_1)$ から, $z: \alpha \rightarrow \alpha + 2\omega_1$ と変化する時, $f(z)$ は 1 つの閉曲線 C を描く.

ここで, $\int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} f'(z)/f(z) dz$ は原点まわりの C の回転数の $2\pi i$ 倍であるから, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (2n\pi i) \times (-2\omega_3)$$

まったく同様に, 残りの部分について, $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (2m\pi i) \times (2\omega_1)$$

よって,

$$\begin{aligned} & \Omega \ni 2m\omega_1 - 2n\omega_3 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (a_1 + \dots + a_r) - (b_1 + \dots + b_r) \end{aligned}$$

従って,

$$b_1 + \dots + b_r \equiv a_1 + \dots + a_r \quad (\omega_1, \omega_3)$$

を得る.

Liouville の第 4 定理を少し一般化する．そのために，極の和を定義する．

Definition. 23 極の和

$f \in K, a_1, \dots, a_r$: 周期平行四辺形内の極

このとき, s が極の和であるとは,

$$s \equiv a_1 + \dots + a_r \quad (\omega, \omega')$$

が成立することをいう．

$\forall c \in \mathbb{C}$ に対して, $z_1, z_2, \dots, z_r$ を Π 内の $f(z) - c$ の零点とすると,

$$[z_1] \cup [z_2] \cup \dots \cup [z_r]$$

は, 等式

$$f(z) = c \tag{5.2}$$

を満たす z 全体.(5.2) の解について, 完全代表系となるように $\forall z_i \in [z_i]$ をとり,

$$\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_r$$

とする．このとき, Liouville の第 4 定理を $f(z) - c$ に用いて, 次のように一般化する．

Theorem. 5 Liouville の第 4 定理 (一般化)

f : r 位楕円関数

$\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r$: $f(z) - c$ の解の完全代表系

s : $f(z)$ の極の和

このとき, 合同式

$$\hat{z}_1 + \dots + \hat{z}_r \equiv s \quad (\omega, \omega')$$

が成立する．この合同式を満たすように任意の零点の完全代表系を取ると, 周期平行四辺形内の零点の完全代表系と同一視できる．

第 6 章

℘ 関数の性質

Weierstrass の $\wp$ 関数は, 楕円関数体において最も重要な意味を持つ. すなわち, 楕円関数体の構造の記述に関しては必要不可欠である. このことに関連した, 幾つかの性質を扱う.

6.1 Laurent 展開と不変量

Proposition. 27 原点近傍における Laurent 展開

$\wp(z)$ の, 原点近傍での Laurent 展開は,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \left(3 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{z_v^4} \right) z^2 + \left(5 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{z_v^6} \right) z^4 + \cdots$$

と表される.

Proof. まず, $r := \min\{2|\omega_1|, 2|\omega_3|\}$ とおく. $z = 0$ での主部は $1/z^2$ である. $\wp(z)$ は $z = z_v$ に極を持ち, $|z| < r$ において,

$$f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2}$$

は正則. ここで, $\wp(z)$ は偶関数なので, $f(z)$ も偶関数. よって $f(z)$ の Laurent 展開は, $|z| < r$ で

$$f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + c_6 z^6 + \cdots$$

と表されるので, この係数を求める.

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z - z_v)^2} - \frac{1}{z_v^2} \right\}, \quad f^{(2n)}(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(z - z_v)^{2(n+1)}}$$

において, $z = 0$ とおくと,

$$c_0 = f(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{(2n)!} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(-z_{\nu})^{2(n+1)}} \\ &= (2n+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z_{\nu}^{2(n+1)}} \end{aligned}$$

ここから,

$$c_2 = 3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z_{\nu}^4}, \quad c_4 = 5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z_{\nu}^6}$$

よって, 原点近傍で,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \left(3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z_{\nu}^4} \right) z^2 + \left(5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z_{\nu}^6} \right) z^4 + \dots$$

と表される.

一般に, c_2, c_4 の代わりに, 以下の 2 数を用いる.

Definition. 24 $\wp$ 関数の不変量

Laurent 係数から得られる量

$$g_2 := 20c_2 = 60 \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^4} \quad g_3 := 28c_4 = 140 \sum_{(k,k') \neq \mathbf{0}} \frac{1}{(2k\omega_1 + 2k'\omega_3)^6}$$

を, $\wp$ 関数の不変量という.

Corollary. 9

$\wp$ 関数の不変量を用いた $\wp(z), \wp'(z)$ の Laurent 展開は,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots, \quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \dots$$

と表される.

6.2 $\wp$ 関数の満たす微分方程式

Theorem. 6

$w = \wp(z)$ は, 微分方程式

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$$

を満たす.

Proof. $\wp(z), \wp'(z)$ の Laurent 展開から,

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{20} g_2 \frac{1}{z^2} + \frac{3g_3}{28} + \dots$$

$$\{\wp'(z)\}^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{2g_2}{5} \frac{1}{z^2} - \frac{4g_3}{7} + \dots$$

となり,

$$\wp(z) = \{\wp'(z)\}^2 - \{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3\}$$

は, z^2 以上の項のみを持つ整関数. ここで Liouville の定理から, この関数は定数. 一方, z^2 以上の項のみが存在するので, (右辺) = 0. となり,

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3$$

が成立する. $|z| < r$ で正則であるので, 一致の定理によってこの微分方程式は $\forall z \in \mathbb{C}$ で成立する.

6.3 不変量と Laurent 係数の関係

Theorem. 7

$\wp(z)$ の Laurent 係数は, g_2, g_3 の多項式として表される.

Lemma. 3

関係式

$$\wp''' = 12\wp\wp'$$

が成立する.

Proof. 微分方程式から,

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

この両辺を z で微分し, $2\wp'$ で割って,

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}$$

この両辺をさらに z で微分し,

$$\wp''' = 12\wp\wp'$$

を得る.

Lemma. 4

原点近傍の $\wp(z)$ の Laurent 展開を

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2z^2 + c_4z^4 + c_6z^6 + \dots$$

とすると, $n \geq 3$ に対して,

$$(n-2)(2n+3)c_{2n} = 3(c_2c_{2n-4} + c_4c_{2n-6} + \dots + c_{2n-6}c_4 + c_{2n-4}c_2)$$

が成立する.

Proof. Laurent 展開から,

$$\left\{ \begin{array}{l} \wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + c_6 z^6 + \cdots \\ \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \cdots + 2nc_{2n} z^{2n-1} + \cdots \\ \wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 2c_2 + 12c_4 z^2 + \cdots + 2n(2n-1)c_{2n} z^{2n-2} + \cdots \\ \wp'''(z) = -\frac{24}{z^5} + 24c_4 z + \cdots + 2n(2n-1)(2n-2)c_{2n} z^{2n-3} + \cdots \end{array} \right.$$

ここで, $\wp''' = 12\wp\wp'$ を用いる.

$$\begin{aligned} \left[-\frac{24}{z^5} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n(2n-1)(2n-2)c_{2n} z^{2n-3} \right] &= 12 \left[\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n} \right] \cdot \left[-\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n z^{2n-1} \right] \\ &= -\frac{24}{z^5} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n-3} + 24 \sum_{n=1}^{\infty} nc_{2n} z^{2n-3} + 24 \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{2n-1} \right] \end{aligned}$$

移項して整理する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2)(2n+3)c_{2n} z^{2n-3} = 6 \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{2n-1} \right]$$

このとき, 右辺を展開して,

$$6[c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots + c_{2n-2} z^{2n-2} + c_{2n} z^{2n}] \cdot [c_2 z + 2c_4 z^3 + 3c_6 z^5 + \cdots + (n-1)c_{2n-2} z^{2n-3} + nc_{2n} z^{2n-1} + \cdots]$$

を得る. 展開式の, z^{2n-3} の項の係数を S とおくと,

$$S = 6[(n-2)c_{2n-4} \cdot c_2 + (n-3)c_{2n-6}c_4 + \cdots + c_2 \cdot c_{2n-4}]$$

さらにこれを逆向きに書くと,

$$S = 6[c_2 c_{2n-4} + \cdots + (n-3)c_{2n-6}c_4 + (n-2)c_{2n-4}c_2]$$

これらの辺々を加えて 2 で割って,

$$S = 3(n-1)[c_2 c_{2n-4} + c_4 c_{2n-6} + \cdots + c_{2n-4} c_2]$$

すなわち, $n \geq 3$ に対して, べき級数の各成分に (両辺 $n-1$ で割って) 用いて,

$$(n-2)(2n+3)c_{2n} = 3(c_2 c_{2n-4} + \cdots + c_{2n-4} c_2)$$

を得る.

Proof. (Theorem.7)

$c_6, c_8, \cdots$ は, g_2, g_3 の多項式として表される. Lemma から,

$$9c_6 = 3c_2^2, \quad 22c_8 c_2 c_4$$

ここで, $c_2 = \frac{1}{20}g_2, c_4 = \frac{1}{28}g_3$ であるから, c_6, c_8 は g_2, g_3 で書かれている. すなわち,

$$c_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{g_2^2}{400}, \quad c_8 = \frac{3}{11} \cdot \frac{g_2 g_3}{560}$$

このとき, $c_2, c_4, \dots, c_{2k-4}$ までは g_2, g_3 の多項式で書かれていれば, 先程の Lemma によって, c_{2k} が g_2, g_3 の多項式として表される.

$\wp$ 関数の理論において頻繁に用いられる以下の数を定義する.

Definition. 25 e_1, e_2, e_3 点

$z = \omega_i$ ($1 \leq i \leq 3$) における $\wp(z)$ の値

$$e_1 := \wp(\omega_1), \quad e_2 := \wp(\omega_2), \quad e_3 := \wp(\omega_3)$$

を, e_1, e_2, e_3 点という.

Remark. 6 $\wp'(\omega_1) = \wp'(\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0$ かつ, $\wp'(z)$ は 3 位楕円関数なので, $\wp'(z)$ の零点は, $\omega_1, \pm\omega_2, \omega_3$ 以外に存在しない. また, $\wp(z)$ は 2 位楕円関数なので, $\omega_1, \pm\omega_2, \omega_3$ は 2 位の e_1, e_2, e_3 点. さらに, 2 位楕円関数であることから, $e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1$.

Theorem. 8 e_1, e_2, e_3 点と不変量に関して, 次の関係がある.

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 &= -\frac{1}{4}g_2 \\ e_1 e_2 e_3 &= \frac{1}{4}g_3 \end{aligned}$$

Proof. $\{\wp'(z)\}^2$ は, $\omega_1, -\omega_2, \omega_3$ に 2 位の零点を持ち, 周期点に 6 位の極を持つ楕円関数である. 同様に, $(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$ も $\omega_1, -\omega_2, \omega_3$ に 2 位の零点, 周期点に 6 位の極を持つ. このとき, 極および Laurent 展開の主部が一致しており, 比は定数 (これを C とする). ここで, 微分方程式

$$\{\wp'(z)\}^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \quad (6.1)$$

によって (3 次の係数を比較することで),

$$C = 4.$$

が分かる. よって,

$$\{\wp'(z)\}^4 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \quad (6.2)$$

と表される.(6.1),(6.2) において, 解と係数の関係から次を得る.

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 &= -\frac{1}{4}g_2 \\ e_1 e_2 e_3 &= \frac{1}{4}g_3 \end{aligned}$$

この操作から、一般の楕円関数体の構造を見出すことが出来る。すなわち、楕円関数体の構造は微分方程式と密接な関係がある。

6.4 $\wp$ 関数による楕円関数の表示（楕円関数体の構造）

楕円関数体 K の元の、具体的な型について考察する。以下では、 $f(z)(\omega_1, \omega_3)$ を周期として持つ楕円関数) に対し、 $c \in \mathbb{C}$ (定数) を、 $f(z) - c$ の零点がすべて 1 位となるようにしておく。

Lemma. 5

$f \in K$ が偶関数ならば、 f は $\wp$ の有理関数として表される。

Proof. $z_1, \dots, z_r : f(z) - c$ の零点の完全代表系とする。仮に、 $z_1 \equiv -z_1(\omega_1, \omega_3)$ とすると、 $\forall h \in \mathbb{C}$ に対し、

$$z_1 + h \equiv -z_1 + h$$

から、

$$\begin{cases} f(z_1 + h) = f(-z_1 + h) = f(z_1 - h) & (\text{偶関数}) \\ f'(z_1 + h) = -f'(z_1 - h) & (\text{奇関数}) \end{cases}$$

ここで、 $f'(z_1) = 0$ ならば、 z_1 が 2 位以上の零点となってしまう、仮定に矛盾する。よって、

$$z_1 \not\equiv -z_1, z_1 \neq 0$$

を満たす。すなわち、 $f(z) - c$ の零点の完全代表系を、

$$z_1, -z_1, z_2, -z_2, \dots, z_k, -z_k \quad (r = 2k)$$

ととることが出来る。さらに $d \neq c$ を、 $f(z) - d$ の零点がすべて 1 位であるように取り、 $f(z) - d$ の零点の完全代表系を

$$w_1, -w_1, \dots, w_k, -w_k$$

ととると、関数

$$F(z) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

は、関数

$$Q(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(z_1))(\wp(z) - \wp(z_2)) \cdots (\wp(z) - \wp(z_k))}{(\wp(z) - \wp(w_1))(\wp(z) - \wp(w_2)) \cdots (\wp(z) - \wp(w_k))}$$

と同じ極、同じ (2 位の) 零点を持つ。よって、 $\exists C \in \mathbb{C}$.s.t.

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = CQ(z).$$

従って、 $f(z)$ が偶関数ならば、 $f(z)$ は $\wp(z)$ の有理関数で表される。

Lemma. 6

$f \in K$ が奇関数ならば, f は $\wp$ の有理関数と, $\wp'$ の積で表される.

Proof. $f(-z) = -f(z)$ の時, $\wp'(z)$ は奇関数であることを用いると, $f(z)/\wp'(z)$ は偶関数. よって, 先程の補題から, $f(z)$ は $\wp(z)$ の有理関数と $\wp'(z)$ の積で表される.

この2つの補題から, 次の楕円関数体に関する定理を得る.

Theorem. 9

$\forall f \in K$ に対して, $\exists R_1, R_2$: 有理関数 s.t.

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z)).$$

Proof. $\forall f(z) \in K$ に対して,

$$\begin{array}{ll} f(z) + f(-z) & \text{偶関数} \\ f(z) - f(-z) & \text{奇関数} \end{array}$$

ここで, $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{1}{2}\{f(z) + f(-z)\} + \frac{1}{2}\{f(z) - f(-z)\}$$

と表される. よって, $\exists R_1, R_2$: 有理関数 s.t.

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z)).$$

このことは, 以下の命題でも確認できる.

Proposition. 28

$\wp(z)$ の高階導関数は, $\wp(z), \wp'(z)$ の多項式として表される.

Proof. $\wp(z)$ の満たす微分方程式

$$\{\wp'(z)\}^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

において, 両辺を微分し, $2\wp'(z)$ で割って,

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{1}{2}g_2$$

以下, 帰納法. $n = 1, 2$ の時は成立している. $n = k$ の時の成立を仮定すると,

$$\wp^{(k)}(z) = \sum a_v(\wp(z))^l (\wp'(z))^m$$

と表される. よって, $(\wp(z))^l (\wp'(z))^m$ の導関数が, $\wp(z), \wp'(z)$ の多項式として表されていれば良い.

$$\begin{aligned} ((\wp)^l (\wp')^m)' &= l(\wp)^{l-1} (\wp')^{m+1} + m(\wp)^l (\wp')^{m-1} \wp'' \\ &= l(\wp)^{l-1} (\wp')^{m+1} + m(\wp)^l (\wp')^{m-1} \left(6\wp^2 - \frac{g_2}{2}\right) \\ &= (\wp, \wp' \text{ の多項式}) \end{aligned}$$

となり, 成立する.

Definition. 26 $\wp(z)$ の判別式

$\wp(z)$ の満たす微分方程式から, 恒等式

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

を得る. このとき, Δ を次で定め, これを判別式という.

$$\Delta := 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$$

判別式と, e_1, e_2, e_3 点の関係を調べる.

Lemma. 7 以下が成立する.

$$\begin{aligned} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 &= \frac{g_2}{2} \\ (e_1e_2)^2 + (e_2e_3)^2 + (e_3e_1)^2 &= \frac{g_2^2}{16} \end{aligned}$$

Proof.

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 0 - 2\left(-\frac{g_2}{4}\right) = \frac{g_2}{2}.$$

また,

$$\begin{aligned} (e_1e_2)^2 + (e_2e_3)^2 + (e_3e_1)^2 &= (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^2 - 2e_1e_2e_3(e_1 + e_2 + e_3) \\ &= \left(-\frac{g_2}{4}\right)^2 - 0 = \frac{g_2^2}{16}. \end{aligned}$$

となり, 成立する.

Proposition. 29 以下が成立する.

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

Proof. 微分方程式の両辺を z で微分して,

$$4(z - e_2)(z - e_3) + 4(z - e_1)(z - e_3) + 4(z - e_1)(z - e_2) = 12z^2 - g_2$$

ここで $z = e_1$ とすると,

$$4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 12e_1^2 - g_2$$

よって,

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 3e_1^2 - \frac{g_2}{4}.$$

他についても同様に,

$$(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = 3e_2^2 - \frac{g_2}{4}, \quad (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = 3e_3^2 - \frac{g_2}{4}$$

これらを掛け合わせて,

$$16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = 16\left(\frac{g_2^2}{4} - 3e_1^2\right)\left(\frac{g_2^2}{4} - 3e_2^2\right)\left(\frac{g_2^2}{4} - 3e_3^2\right)$$

右辺について計算すると,

$$\begin{aligned} & 16\left[\frac{g_2^3}{64} - \frac{3}{16}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)g_2^2 + \frac{9g_2^2}{4}\{(e_1e_2)^2 + (e_2e_3)^2 + (e_3e_1)^2\} - 27(e_1e_2e_3)^2\right] \\ &= 16\left[\frac{g_2^3}{64} - \frac{3}{16}\frac{g_2^3}{2} + \frac{9}{4}\frac{g_2^3}{16} - 27\left(\frac{g_3}{4}\right)^2\right] = g_2^3 - 27g_3^2 \end{aligned}$$

を得る.

第 7 章

ζ 関数

$\wp(z)$ および $\wp'(z)$ は微分方程式や楕円関数体の元を記述する上で重要であった. 次に, $\wp$ 関数の積分によって得られる ζ 関数を考える. これは, 次章で扱う σ 関数と合わせて, 様々な公式を求める上で意味を持っている.

7.1 ζ 関数

原点近傍における $\wp$ 関数の Laurent 展開から,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$$

なので, $\wp - 1/z^2$ は, 原点で正則. これを, 周期点を通らない積分路で, $0 \rightarrow z$ まで積分する (1 価関数).

$$\begin{aligned} I(z) &:= \int_0^z \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right\} du = \int_0^z \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} du \\ &= \sum'_{O \notin \Omega} \int_0^z \left\{ \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} du = \sum'_{O \notin \Omega} \left[-\frac{1}{u-\omega} - \frac{u}{\omega^2} \right]_0^z \\ &= - \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{z-\omega} + \frac{z}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right\} \end{aligned}$$

ここで, $\wp(z)$ は 2 位の楕円関数なので, 各極での留数は 0. すなわち, I は z のみの関数として書ける. この積分を行うと, I は周期点に 1 位の極を持つことが分かる. ここに, 原点を 1 位の極として付け足した関数を ζ 関数という.

Definition. 27 ζ 関数

$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\}$$

によって, ζ 関数を定める.

7.2 ζ関数の性質

ζ関数は楕円関数ではないが, ϕ関数の周期との間にきれいな関係式が成立する.

Corollary. 10 ζ関数の性質

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z)$$

が成立する.

Proposition. 30 以下が成立する.

$$\zeta(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_3) = \frac{1}{\lambda} \zeta(z | \omega_1, \omega_2)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_3) &= \frac{1}{\lambda z} + \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{\lambda z - \lambda \omega} + \frac{1}{\lambda \omega} + \frac{\lambda z}{(\lambda \omega)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{z} + \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\} \right] = \frac{1}{\lambda} \zeta(z) \end{aligned}$$

Proposition. 31

ζ関数は奇関数である.

Proof.

$$\begin{aligned} \zeta(-z) &= -\frac{1}{z} + \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{-z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{-z}{\omega^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{z} - \sum'_{O \notin \Omega} \left\{ \frac{1}{z - \hat{\omega}} + \frac{1}{\hat{\omega}} + \frac{z}{\hat{\omega}^2} \right\} = -\zeta(z), \quad \hat{\omega} := -\omega \end{aligned}$$

Proposition. 32

$\eta_k := \zeta(\omega_k)$ とおくと,

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + 2\eta_k$$

が成立する.

Proof. 関係式

$$2f_k(z) := \zeta(z + 2\omega_k) - \zeta(z), \quad (1 \leq k \leq 3) \quad (7.1)$$

を考える. 両辺を微分し, 移項すると,

$$-\wp(z + 2\omega_k) = -\wp(z) + 2f'_k(z)$$

よって,

$$-\wp(z) = -\wp(z) + 2f'_k(z)$$

から, $f'_k(z) = 0$, すなわち, $f_k(z)$ は定数 (これを c_k とする). (7.1) から, $z = -\omega_k$ の時, ζ 関数は奇関数なので,

$$\zeta(\omega_k) = \zeta(-\omega_k) + 2c_k = -\zeta(\omega_k) + 2c_k$$

ゆえに $\zeta(\omega_k) = \eta_k$. これを (7.1) に用いて,

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + 2\eta_k$$

を得る.

Corollary. 11 より一般に,

$$\zeta(z + 2k\omega_1 + 2k'\omega_3) = \zeta(z) + 2k\eta_1 + 2k'\eta_3 \quad (7.2)$$

が成立する.

Proposition. 33 $\zeta(\omega_k) = \eta_k$ に関して,

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

が成立する.

Proof. 関係式 (7.2) において, $k = k' = -1$ とおく.

$$\zeta(z - 2\omega_1 - 2\omega_3) = \zeta(z) - 2\eta_1 - 2\eta_3$$

一方,

$$\zeta(z - 2\omega_1 - 2\omega_3) = \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2$$

であるから, これらを合わせて

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

を得る.

Theorem. 10 Legendre の関係式

$$\begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} = \frac{\pi i}{2}$$

Proof.

$$\int_{\Pi} \zeta(z) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \zeta(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} \zeta(z) dz + \int_{\alpha-2\omega_2}^{\alpha+2\omega_3} \zeta(z) dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} \zeta(z) dz \quad (7.3)$$

ここで,1 項目と 3 項目に関して,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \zeta(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_1+2\omega_3}^{\alpha+2\omega_3} \zeta(z)dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \zeta(z)dz - \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \zeta(z+2\omega_3)dz \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} \{\zeta(z) - \zeta(z) - 2\eta_3\}dz = -2\eta_3 \int_{\alpha}^{\alpha+2\omega_1} dz = -4\omega_1\eta_3 \end{aligned}$$

同様にして,

$$\int_{\alpha+2\omega_1}^{\alpha-2\omega_2} \zeta(z)dz + \int_{\alpha+2\omega_3}^{\alpha} \zeta(z)dz = 4\omega_3\eta_1$$

一方,(7.3) の左辺において, $\zeta(z)$ は周期平行四辺形 Π 内に留数 1 の極を 1 つ持ち,

$$\int_{\Pi} \zeta(z)dz = 2\pi i$$

よって,

$$\int_{\Pi} \zeta(z)dz = 4(\omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3)$$

を用いて,

$$\begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} = \frac{\pi i}{2}$$

を得る.

Corollary. 12 以下が成立する.

$$\begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_2 & \omega_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \frac{\pi i}{2}$$

Proof. Legendre の関係式に対して,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

を用いる.

第 8 章

σ 関数

8.1 σ 関数

$\wp$ 関数から ζ 関数を作った操作を, ζ 関数に対して行う.

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \sum'_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\}$$

この関数は, 原点で正則で, 各周期点に 1 位の極を持つ. このとき, 原点における留数は 1 になる. 積分路を, 周期点を通らないように取り, $0 \rightarrow z$ まで積分する (積分路に関して多価関数になる).

$$\begin{aligned} s &:= \int_0^z \zeta(u) - \frac{1}{u} du = \int_0^z \sum'_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{u - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right\} du \\ &= \sum'_{\omega \neq 0} \int_0^z \left\{ \frac{1}{u - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right\} du = \sum'_{\omega \neq 0} \left[\log(u - \omega) + \frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2} \right]_0^z \\ &= \sum'_{\omega \neq 0} \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right\} \end{aligned}$$

右辺の結果の $\log$ を取り除く (1 価にする) ため, $\exp$ をとる.

$$\exp(s) = \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}} \right\}$$

これは, 原点以外の周期点に 1 位の零点を持つ. さらに, 原点を 1 位の零点として付け加える.

Definition. 28 σ 関数

$$\sigma(z) := z \exp(s) = z \prod_{0 \neq \omega \in \Omega} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}} \right\}$$

を σ 関数という.

Remark. 7

$\omega \in \Omega$ は極でなく, 1 位の零点. さらに, それ以外の点で正則. すなわち, σ 関数は整関数であって, 楕円関数ではない.

8.2 σ 関数の性質

Proposition. 34

σ 関数は奇関数.

Proof. 定義から,

$$\sigma(-z) = (-z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{-z}{z_{\nu}} \right) e^{\frac{-z}{z_{\nu}} + \frac{(-z)^2}{2(z_{\nu})^2}} \right\}$$

$\forall z_{\nu} \in \Omega, z_{\nu} = 2k\omega_1 + 2k'\omega_3 \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$ に対して, $-z_{\nu} \in \Omega$ なので,

$$(-z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{-z}{z_{\nu}} \right) e^{\frac{-z}{z_{\nu}} + \frac{(-z)^2}{2(z_{\nu})^2}} \right\} = (-z) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{z_{\nu}} \right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{z^2}{2(z_{\nu})^2}} \right\} = -\sigma(z)$$

を得る.

Proposition. 35 以下が成立する.

$$\sigma(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_3) = \lambda \sigma(z | \omega_1, \omega_3)$$

Proof.

$$\sigma(\lambda z | \lambda \omega_1, \lambda \omega_3) = (\lambda z) \prod \left\{ \left(1 - \frac{\lambda z}{\lambda \omega} \right) e^{\frac{\lambda z}{\lambda \omega} + \frac{(\lambda z)^2}{2(\lambda \omega)^2}} \right\} = \lambda \sigma(z | \omega_1, \omega_3)$$

Proposition. 36 ζ 関数と σ 関数の関係

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

Proposition. 37 $\wp$ 関数と σ 関数の関係

$$\wp(z) = -\frac{d}{dz} \zeta(z) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \right) = \frac{\sigma'^2(z) - \sigma''(z)\sigma(z)}{\sigma^2(z)}$$

Proposition. 38 周期と $\sigma(z)$ の関係

$$\sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z + \omega_k)} \sigma(z)$$

Proof. まず,

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z + 2\omega_k)$$

また,

$$\zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + 2\eta_k = \frac{d}{dz} \log \sigma(z) + 2\eta_k$$

から,

$$\frac{d}{dz} \log \sigma(z + 2\omega_k) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z) + 2\eta_k$$

この両辺を z で積分し ($\hat{C}_k$:定数),

$$\log \sigma(z + 2\omega_k) = \log \sigma(z) + 2\eta_k z + \hat{C}_k$$

C を定数とし, $\log$ を外す.

$$\sigma(z + 2\omega_k) = C e^{2\eta_k(z + \omega_k)} \sigma(z)$$

ここで, $z = -\omega_k$ とおくと, σ 関数は奇関数なので,

$$\sigma(\omega_k) = C e^0 \sigma(-\omega_k) = -C \sigma(\omega_k)$$

また, $\sigma'(\omega_k) \neq 0$ かつ, $\sigma'(z)$ は偶関数なので,

$$C = \frac{\sigma'(\omega_k)}{\sigma'(\omega_k)} = 1.$$

から,

$$\sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z + \omega_k)} \sigma(z)$$

を得る.

Theorem. 11 σ 関数による楕円関数の表示

$f: r$ 位楕円関数, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$: 極の完全代表系, $\beta_1, \dots, \beta_r$: 零点の完全代表系
ただし,

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_r = \beta_1 + \dots + \beta_r$$

と選んでおく. このとき, $\exists C$: 定数 s.t.

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - \beta_1) \sigma(z - \beta_2) \cdots \sigma(z - \beta_r)}{\sigma(z - \alpha_1) \sigma(z - \alpha_2) \cdots \sigma(z - \alpha_r)}$$

Proof. 関数 $\varphi(z)$ を,

$$\varphi(z) := \frac{\sigma(z - \beta_1) \cdots \sigma(z - \beta_r)}{\sigma(z - \alpha_1) \cdots \sigma(z - \alpha_r)}$$

とおく.

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1 + \omega_1} \sigma(z)$$

なので, 定数 α, β に対して,

$$G(z) = \frac{\sigma(z - \beta)}{\sigma(z - \alpha)}$$

を考えると,

$$G(z + 2\omega_1) = e^{2\eta_1(\alpha - \beta)} G(z)$$

を満たす. よって,

$$\varphi(z + 2\omega_1) = e^{2\eta_1\{(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + (\alpha_r - \beta_r)\}} G(z) = e^0 \varphi(z) = \varphi(z).$$

同様に, $\varphi(z + 2\omega_3) = \varphi(z)$ から, φ は $2\omega_1, 2\omega_3$ を周期とする 2 重周期関数. 零点と極は, 位数を含めて f の零点, 極と一致する. よって, Liouville の第 1 定理から, $\exists C$: 定数 s.t.

$$f(z) = C\varphi(z) = C \frac{\sigma(z - \beta_1) \cdots \sigma(z - \beta_r)}{\sigma(z - \alpha_1) \cdots \sigma(z - \alpha_r)}$$

第 9 章

$\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)$ 間の公式

$\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)$ の間には, 様々な公式 (特に加法公式) が成立する. 次に, これらの関係式を導くことを考える.

9.1 ζ 関数の原点近傍における Laurent 展開

Proposition. 39 ζ 関数の原点近傍における Laurent 展開

$\zeta(z)$ の, 原点近傍での Laurent 展開は,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60}z^3 - \frac{g_3}{140}z^5 - \dots$$

によって得られる.

Proof. $\wp(z)$ の, $z = 0$ での Laurent 展開

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \dots$$

を, $\zeta(z)$ の原点近傍における (形式上の) 積分表示に代入し,

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left\{ \wp(u) - \frac{1}{u^2} \right\} du = \frac{1}{z} - \int_0^z \left\{ \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \dots \right\} du \\ &= \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60}z^3 - \frac{g_3}{140}z^5 - \dots\end{aligned}$$

を得る.

9.2 σ 関数の原点近傍における Laurent 展開

Proposition. 40 σ 関数の原点近傍における Laurent 展開

$\sigma(z)$ の, 原点近傍における Laurent 展開は,

$$\sigma(z) = z - \frac{g_2}{240}z^5 - \dots$$

によって得られる.

Proof. $\sigma(z)$ は整関数, かつ奇関数であるから,

$$\sigma(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \cdots, \quad \sigma'(z) = c_1 + 3c_3 z^2 + 5c_5 z^4 + \cdots$$

さらに, $\zeta(z)$ との関係式

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

に代入し, $\zeta(z)$ の Laurent 展開

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60} z^3 - \frac{g_3}{140} z^5 - \cdots$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \zeta(z)\sigma(z) &= \left(\frac{1}{z} - \frac{g_2}{60} z^3 - \frac{g_3}{140} z^5 - \cdots \right) (c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \cdots) \\ &= c_1 + c_3 z^2 + \left(c_5 - \frac{c_1 g_2}{60} \right) z^4 + \cdots = c_1 + 3c_3 z^2 + 5c_5 z^4 + \cdots = \sigma'(z) \end{aligned}$$

よって,

$$c_1 = c_1, \quad 3c_3 = c_3, \quad 5c_5 = c_5 - \frac{c_1 g_2}{60}$$

ここから,

$$4c_5 = -\frac{c_1 g_2}{60}$$

また,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z\zeta(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sigma(z)} \sigma'(z) = \frac{z}{c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \cdots} \times (c_1 + 3c_3 z^2 + 5c_5 z^4 + \cdots) \\ &= \frac{c_1 + 3c_3 z^2 + 5c_5 z^4 + \cdots}{c_1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \cdots} \rightarrow 1 \quad (z \rightarrow 0) \end{aligned}$$

から,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = \sigma'(0) = 1$$

を得る. ここで, 左辺について,

$$z\zeta(z) = 1 - \frac{g_2}{60} z^4 - \frac{g_3}{140} z^6 + \cdots$$

なので, これらをまとめて,

$$c_1 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_5 = -\frac{g_2}{240}, \cdots$$

と表されることが分かる.

9.3 $\wp(z)$ と $\sigma(z)$ の関係

$\wp(z)$ と $\sigma(z)$ の間には, 次のような関係が成立する. これは, $\wp$ 関数の加法公式を導く上で重要である.

Proposition. 41 σ 関数による $\wp$ 関数の表示

$\forall u, v \notin \Omega$ に対して, 次が成立する.

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

Proof. $\forall a \in \mathbb{C}$ (ただし $a \notin \Omega$) に対して, 関数

$$\varphi(z) := -\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)}$$

を考える. $\sigma(z)$ は整関数なので, $\varphi(z)$ は $z=0$ に 2 位の極を持つ. さらに, $\varphi(z)$ は 2 重周期関数 (これは, 次のように確認できる).

$$\begin{aligned}\varphi(z+2\omega_k) &= -\frac{\sigma(z-a+2\omega_k)\sigma(z+a+2\omega_k)}{\sigma^2(z+2\omega_k)\sigma^2(a)} \\ &= -\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)} e^{2\eta_k(z-a+\omega_k)+2\eta_k(z+a+\omega_k)-4\eta_k(z+\omega_k)} = -\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)} = \varphi(z)\end{aligned}$$

すなわち, $\varphi(z)$ は, 2 位の楕円関数. $\varphi(z)$ の, 原点近傍での Laurent 展開を求める. $\sigma(z \pm a)$ の展開

$$\sigma(z \pm a) = \pm\sigma(a) + \sigma'(a)z \pm \frac{1}{2}\sigma''(a)z^2 + \dots$$

と, $\sigma(z)$ の Laurent 展開

$$\sigma(z) = z - \frac{g_2}{240}z^5 - \dots$$

を用い, 原点近傍での 1 次近似を考えて,

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{1}{\sigma^2(a)} \left\{ \sigma(a) + \sigma'(a)z + \frac{1}{2}\sigma''(a)z^2 + \dots \right\} \left\{ -\sigma(a) + \sigma'(a)z - \frac{1}{2}\sigma''(a)z^2 + \dots \right\} \div \left\{ z^2 \left(1 - \frac{g_2}{120}z^4 - \dots \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2(a)} \left\{ \sigma(a) + \sigma'(a)z + \frac{1}{2}\sigma''(a)z^2 + \dots \right\} \left\{ -\sigma(a) + \sigma'(a)z - \frac{1}{2}\sigma''(a)z^2 + \dots \right\} \times \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{g_2}{120}z^4 \dots \right) \\ &= \left\{ 1 + \frac{\sigma(a)\sigma''(a) - (\sigma'(a))^2}{\sigma^2(a)} z^2 \right\} \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{g_2}{120}z^4 \dots \right) = \left\{ \frac{1}{z^2} + \frac{\sigma(a)\sigma''(a) - (\sigma'(a))^2}{\sigma^2(a)} \right\} \left(1 + \frac{g_2}{120}z^4 \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\sigma(a)\sigma''(a) - (\sigma'(a))^2}{\sigma^2(a)} + (z^2 \text{以上の項}) = \frac{1}{z^2} - \wp(a) + (z^2 \text{以上の項})\end{aligned}$$

このとき, 原点近傍で,

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} - \wp(a) + (z^2 \text{以上の項}) \quad (9.1)$$

$$-\wp(z) + \wp(a) = -\wp(z) + \wp(a) \quad (9.2)$$

であるから,(9.1),(9.2)を辺々足し合わせて,

$$\wp(z) - \wp(z) + \wp(a) = -\left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right) + (z^2 \text{以上の項}) \quad (9.3)$$

であるが,この左辺が定数であることから,右辺も定数であることが分かる.さらに $z = 0$ において,右辺の値は0なので,

$$\wp(z) - \wp(z) + \wp(a) = 0, \quad \wp(z) = -\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)}$$

を得る.ここで, $z \rightarrow u, a \rightarrow v$ と改めて書き直すことで $(u, v \notin \Omega)$,

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}$$

を得る.

9.4 ζ 関数の加法公式

先程得られた関係式から, ζ 関数に関する加法公式が導かれる.

Theorem. 12 ζ 関数の加法公式

ζ 関数に関して,

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}$$

が成立する.

Proof. 関係式

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)} = \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\{-\sigma^2(v)\}}$$

を, u, v で対数微分する. $\zeta = \frac{d}{dz} \log \sigma$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} &= \zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta(u) \\ -\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \wp(v)} &= -\zeta(u-v) + \zeta(u+v) - 2\zeta(v) \end{aligned}$$

をそれぞれ足し合わせ移項し,1/2 倍して,

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}$$

を得る.

9.5 $\wp$ 関数の加法公式

ζ 関数の加法公式から, $\wp$ 関数の加法公式が導かれる.

Theorem. 13 $\wp$ 関数の加法公式

$\wp$ 関数に関して, 次が成立する. これを, $\wp$ 関数の加法公式という.

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}$$

Proof. ζ 関数の加法公式の両辺を, u で偏微分する.

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$$

ここで,

$$\frac{d}{dz} \zeta(z) = -\wp(z)$$

であることを用いて,

$$\wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}$$

を得る.

9.6 $\wp$ 関数の代数的加法公式

さらに $\wp$ 関数に関しては, 以下の関係も成立する. ただしここで言う代数的とは, $\wp(u+v)$ が, $\wp(u), \wp(v)$ および $\wp'(u), \wp'(v)$ の有理関数として表されていることを意味する.

Theorem. 14 $\wp$ 関数の代数的加法公式

$\wp$ 関数に関して, 次が成立する. これを, $\wp$ 関数の代数的加法公式という.

$$\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2$$

Proof. $\wp$ 関数の加法公式を, u, v それぞれで偏微分する.

$$\begin{aligned} \wp(u+v) &= \wp(u) - \frac{1}{2} \left[\frac{\wp''(u)}{\wp(u) - \wp(v)} - \frac{\wp'(u)(\wp'(u) - \wp'(v))}{(\wp(u) - \wp(v))^2} \right] \\ \wp(u+v) &= \wp(v) - \frac{1}{2} \left[\frac{-\wp''(v)}{\wp(u) - \wp(v)} - \frac{\wp'(v)(\wp'(u) - \wp'(v))}{(\wp(u) - \wp(v))^2} \right] \end{aligned}$$

であるから, それぞれを足し合わせて,

$$2\wp(u+v) = \wp(u) + \wp(v) - \frac{1}{2} \frac{\wp''(u) - \wp''(v)}{\wp(u) - \wp(v)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2$$

を得る. ここで右辺第 3 項に対して, $\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2$ を用いて,

$$-\frac{1}{2} \frac{\wp''(u) - \wp''(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = -\frac{1}{2} \frac{\left(6\wp^2(u) - \frac{g_2}{2}\right) - \left(6\wp^2(v) - \frac{g_2}{2}\right)}{\wp(u) - \wp(v)} = -\frac{6}{2}(\wp(u) + \wp(v)) = -3(\wp(u) + \wp(v))$$

と書きなおし, 両辺を 2 で割って,

$$\wp(u + v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2$$

を得る.

より一般的に, 次の定理が成立する.

Corollary. 13

$\forall f(z) \in K(\text{楕円関数体})$ は, 代数的加法公式を持つ. すなわち, $\exists G \neq 0$ ($G : 3$ 変数多項式).s.t.

$$G(f(z + w), f(z), f(w)) = 0$$

第 10 章

σ_k 関数, $\wp_k$ 関数

$e_k = \wp(\omega_k)$ と, $\wp(z)$ の関係を, 簡潔に記述するための関数を導入する (これは, 後述の $\wp$ 関数とも密接なつながりを持っている).

10.1 σ_k 関数

Definition. 29 σ_k 関数

$$\sigma_k(z) := e^{-\eta_k z} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)}$$

を, σ_k 関数という.

Remark. 8 σ_k 関数は, その定義から整関数であって, 楕円関数ではない.

10.2 σ_k 関数の性質

Proposition. 42

σ_k 関数は偶関数.

Proof. $\sigma(z)$ と $\wp(z)$ の周期の関係

$$\sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z + \omega_k)} \sigma(z)$$

において, $z \rightarrow z - \omega_k$ を代入すると, $\sigma(z + \omega_k) = -e^{2\eta_k z} \sigma(z - \omega_k)$. すなわち,

$$\sigma(z - \omega_k) = -e^{-2\eta_k z} \sigma(z + \omega_k)$$

このとき, σ 関数が奇関数であることから,

$$\begin{aligned} \sigma_k(-z) &= e^{\eta_k z} \frac{\sigma(-z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = e^{\eta_k z} \frac{\sigma(-(z - \omega_k))}{\sigma(\omega_k)} \\ &= -e^{\eta_k z} \frac{\sigma(z - \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = e^{-\eta_k z} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \end{aligned}$$

を得る.

Proposition. 43

$$\sigma_k(0) = 1, \quad \sigma_k(\omega_k) = 0.$$

Proof. 定義により, 計算を行う.

$$\sigma_k(0) = e^0 \frac{\sigma(\omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = 1.$$

また,

$$\sigma_k(z) = e^{-\eta_k z} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)}$$

において, σ 関数の性質から,

$$\sigma(z + \omega_k) = -e^{2\eta_k z} \sigma(z - \omega_k)$$

で, $z = \omega_k$ の時, 右辺の値は $-e^{2\eta_k \omega_k} \sigma(0)$ をとるか³, $z = 0$ は $\sigma(z)$ の1位の零点なので, 結局右辺の値は0. よって,

$$\sigma_k(\omega_k) = -e^{\eta_k \omega_k} \frac{\sigma(0)}{\sigma(\omega_k)} = 0.$$

を得る.

Proposition. 44 σ_k 関数の零点

$\sigma_k(z)$ は, $z = \omega_k + 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$ ($m, m' \in \mathbb{Z}$) に1位の零点を持つ.

Proof. 定義から, σ 関数は $z = 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$ に1位の零点を持つ. よって, $\sigma(z - \omega_k)$ は, $z = \omega_k + 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$ に1位の零点を持つ. さらに, $e^{\eta_k z}$ は零点を持たないので,

$$\sigma_k(z) = e^{-\eta_k z} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)}$$

は, $z = \omega_k + 2m\omega_1 + 2m'\omega_3$ に1位の零点を持つ.

10.3 $\wp_k$ 関数

次に $\wp$ 関数と, σ 関数, σ_k 関数との関連を考察する.

Definition. 30 $\wp_k$ 関数

$$\wp_k(z) := \sqrt{\wp(z) - e_k}$$

を, $\wp_k$ 関数という. ただし, $z = 0$ における留数が +1 である方を採用したものとする.

10.4 $\wp_k$ 関数の性質

Proposition. 45 $\wp_k(z) := \sqrt{\wp(z) - e_k}$ は, σ_k と $\sigma(z)$ の比で表される. すなわち,

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}$$

Proof. 関係式

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)}$$

において $(a \notin \Omega), a = \omega_k$ とおくと,

$$\wp(z) - e_k = -\frac{\sigma(z - \omega_k)\sigma(z + \omega_k)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_k)}.$$

さらに, $\sigma(z - \omega_k) = -e^{-2\eta_k z}\sigma(z + \omega_k)$ から,

$$\wp(z) - e_k = \frac{e^{-2\eta_k z}\sigma(z + \omega_k)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_k)} = \frac{\sigma_k^2(z)}{\sigma^2(z)}$$

であるから,

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \pm \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}$$

右辺から, 2 価関数ではなく, 2 つの 1 価関数であることが分かる. ここで, Laurent 展開を考える.

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \sqrt{-e_k + \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \cdots} = \begin{cases} \frac{1}{z} + \cdots \\ -\frac{1}{z} + \cdots \end{cases}$$

であるが, $\sigma_k(0) = 1, \lim_{z \rightarrow 0} \sigma(z)/z = 1$ から (定義に合うように), 留数が +1 である方を採用して,

$$\sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}$$

を得る.

Remark. 9

実際は, $\wp_k(z) = \sqrt{\wp(z) - e_k}$ は, 2 位の Jacobi の楕円関数である.

Proposition. 46 $\sigma(z), \sigma_k(z)$ による, $\wp'(z)$ の表示

$\wp'(z)$ は, $\sigma(z), \sigma_k(z)$ を用いて,

$$\wp'(z) = -2 \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}$$

と表される.

Proof. 関係式

$$\wp_k(z) = \sqrt{\wp(z) - e_k} = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \quad (1 \leq k \leq 3)$$

および, 微分方程式

$$\{\wp'(z)\}^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) = 4 \frac{\sigma_1^2(z)\sigma_2^2(z)\sigma_3^2(z)}{\sigma^6(z)}$$

において, $\sigma_k(0) = 1$ と $\wp'(z)$ の Laurent 展開を考えると,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \cdots \Rightarrow \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \cdots$$

であるから,

$$\wp'(z) = -2 \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}$$

を得る (奇関数であることも満たしている).

Proposition. 47

$\sigma_k(z)$ は, 原点近傍で

$$\sigma_k(z) = 1 - \frac{1}{2}e_k z^2 + \frac{1}{48}(g_2 - 6e_k^2)z^4 + \cdots$$

と展開できる.

Proof. $\sigma_k(0) = 1$ から, 原点近傍における Taylor 展開を

$$\sigma_k(z) = 1 + c_2 z^2 + c_4 + \cdots$$

とおく. $\sqrt{\wp(z) - e_k} = \sigma_k(z)/\sigma(z)$ なので,

$$(\wp(z) - e_k)\sigma^2(z) = \sigma_k^2(z)$$

ここに, 原点近傍の展開式

$$\begin{cases} \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \cdots \\ \sigma(z) = z - \frac{g_2}{240}z^5 - \cdots \end{cases}$$

を用いる.

$$\left(\frac{1}{z^2} - e_k + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \cdots\right)\left(z - \frac{g_2}{240}z^5 - \cdots\right)^2 = (1 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots)^2$$

順に展開する. まず, 左辺に関して,

$$\begin{aligned} \left(1 - e_k z^2 + \frac{g_2}{20}z^4 + \frac{g_3}{28}z^6 + \cdots\right)\left(1 - \frac{g_2}{240}z^4 - \cdots\right)^2 &= \left(1 - e_k z^2 + \frac{g_2}{20}z^4 + \frac{g_3}{28}z^6 + \cdots\right)\left(1 - \frac{g_2}{120}z^4 - \cdots\right) \\ &= 1 - e_k z^2 + \frac{g_2}{24}z^4 + \cdots \end{aligned}$$

右辺に関して,

$$1 + 2c_2z^2 + (c_2^2 + 2c_4)z^4 + \cdots$$

両辺を比較して,

$$2c_2 = -e_k, \quad c_2^2 + 2c_4 = \frac{g_2}{24}$$

すなわち,

$$c_2 = -\frac{1}{2}e_k, \quad c_4 = \frac{g_2}{48} - \frac{1}{8}e_k^2 = \frac{1}{48}(g_2 - 6e_k^2)$$

であるから,

$$\sigma_k(z) = 1 - \frac{1}{2}e_kz^2 + \frac{1}{48}(g_2 - 6e_k^2)z^4 + \cdots$$

を得る.

Proposition. 48 $\sigma_k(z)$ と $\wp(z)$ の周期の関係 (1)

次が成立する.

$$\sigma_k(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z+\omega_k)}\sigma_k(z)$$

Proof. σ 関数の満たす関係式から,

$$\begin{aligned} \sigma_k(z + 2\omega_k) &= e^{-\eta_k(z+2\omega_k)} \frac{\sigma(z + 2\omega_k + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = e^{-\eta_k(z+2\omega_k)} \frac{-e^{2\eta_k(z+2\omega_k)}\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \\ &= -e^{\eta_k(z+2\omega_k)} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = -e^{2\eta_k(z+\omega_k)} e^{-\eta_k z} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = -e^{2\eta_k(z+\omega_k)} \sigma_k(z) \end{aligned}$$

を得る.

Proposition. 49 $\sigma_k(z)$ と $\wp(z)$ の周期の関係 (2)

次が成立する.

$$\sigma_k(z + 2\omega_l) = e^{2\eta_l(z+\omega_l)}\sigma_k(z), \quad (k \neq l)$$

Proof. σ 関数の満たす関係式から,

$$\begin{aligned} \sigma_k(z + 2\omega_l) &= e^{-\eta_k(z+2\omega_l)} \frac{\sigma(z + 2\omega_l + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = e^{-\eta_k(z+2\omega_l)} \frac{-e^{2\eta_l(z+\omega_l+\omega_k)}\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \\ &= -e^{-\eta_k z - 2\eta_k \omega_l + 2\eta_l z + 2\eta_l \omega_l + 2\eta_l \omega_k} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} = -e^{-\eta_k z} e^{2\eta_l(z+\omega_l)} e^{2\eta_l \omega_k - 2\eta_k \omega_l} \frac{\sigma(z + \omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \end{aligned}$$

と表される. ここで, Legendre の関係式

$$2\eta_l \omega_k - 2\eta_k \omega_l = \pm \pi i$$

から,

$$e^{2\eta_l \omega_k - 2\eta_k \omega_l} = e^{\pm \pi i} = -1$$

であるから,

$$\sigma_k(z + 2\omega_l) = e^{2\eta_l(z+\omega_l)}\sigma_k(z)$$

を得る.

	基本周期	極	零点
$\wp_1(z)$	$2\omega_1, 4\omega_3$	$\text{Res}_{z=0} \wp_1(z) = 1, \text{Res}_{z=2\omega_3} \wp_1(z) = -1$	$\omega_1, \omega_1 + 2\omega_3$
$\wp_2(z)$	$-2\omega_2, 4\omega_3$	$\text{Res}_{z=0} \wp_2(z) = 1, \text{Res}_{z=2\omega_3} \wp_2(z) = -1$	$\omega_2, \omega_2 + 2\omega_3$
$\wp_3(z)$	$4\omega_1, 2\omega_3$	$\text{Res}_{z=0} \wp_3(z) = 1, \text{Res}_{z=2\omega_3} \wp_3(z) = -1$	$\omega_3, \omega_3 + 2\omega_1$

表 10.1 $\wp_k(z)$ の基本周期, 極, 零点

次に, $\wp_1(z), \wp_2(z), \wp_3(z)$ の振る舞いを調べる.

Proposition. 50

$\wp_1(z), \wp_2(z), \wp_3(z)$ は奇関数, かつ 2 位の楕円関数. 基本周期, 極と留数, 零点は次のようになる.

Proof. $\wp_k$ 関数の表示式

$$\wp_k(z) = \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}$$

で, $\sigma(z)$ は奇関数, $\sigma_k(z)$ は偶関数であることから, $\wp_k(z)$ は奇関数. さらに, $\sigma(z), \sigma_k(z)$ の定義から, $\wp_k(z)$ は有理型関数. よって, これらが 2 重周期性を持つことを示す. まず, $\wp_1(z)$ に関して,

$$\wp_1(z + 2\omega_1) = \frac{\sigma_1(z + 2\omega_1)}{\sigma(z + 2\omega_1)} = \frac{-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma_1(z)}{-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)} = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} = \wp_1(z)$$

となり, $\wp_1(z)$ は, $2\omega_1$ を, 1 つの最小周期として持つ. さらに,

$$\wp_1(z + 2\omega_3) = \frac{\sigma_1(z + 2\omega_3)}{\sigma(z + 2\omega_3)} = \frac{e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma_1(z)}{-e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma(z)} = -\frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} = -\wp_1(z)$$

から,

$$\wp_1(z + 4\omega_3) = -\wp_1(z + 2\omega_3) = \wp_1(z)$$

となり, $4\omega_3$ をもう 1 つの最小周期として持つことが分かる. よって, $\wp_1(z)$ は $2\omega_1, 4\omega_3$ を基本周期とする 2 重周期関数. 次に, 極に関して考える. $\sigma(z)$ は周期点 $2k\omega_1 + 2k'\omega_3$ に 1 位の零点を持つ. よって, $\wp_1(z)$ は周期点に 1 位の極を持つ. すなわち, 基本周期 $2\omega_1, 4\omega_3$ の平行四辺形内において, $0, 2\omega_3$ に 1 位の極を持つ. 留数に関して,

$$\text{Res}_{z=0} \wp_1(z) = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma'(z)} \Big|_{z=0} = \frac{1 - \frac{e_1}{2}z^2 + \cdots}{\left(z - \frac{g_2}{240}z^5 - \cdots\right)'} \Big|_{z=0} = \frac{1 - \frac{e_1}{2}z^2 + \cdots}{1 - \frac{g_2}{48}z^4 - \cdots} \Big|_{z=0} = \frac{1}{1} = 1.$$

さらに $z = 2\omega_3$ における留数に関して, Liouville の第 2 定理から,

$$\text{Res}_{z=2\omega_3} \wp_1(z) = -1$$

を得る. 次に, 零点に関して, $\sigma(z)$ の零点は $\sigma(z - \omega_1)$ の零点と等しく, $\sigma(z)$ は周期点に 1 位の零点を持つことから, $\wp_1(z)$ は $\omega_1 + 2k\omega_1 + 2k'\omega_3$ に 1 位の零点を持つことが分かる. よって, 周期平行四辺形内において, $\omega_1, \omega_1 + 2\omega_3$ を零点に持つ.

同様の議論を, $\wp_2(z)$ に関して行う. 周期について,

$$\wp(z + 2\omega_2) = \frac{\sigma_2(z + 2\omega_2)}{\sigma(z + 2\omega_2)} = \frac{-e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma_2(z)}{-e^{2\eta_2(z+\omega_3)}\sigma(z)} = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} = \wp_2(z)$$

また,

$$\wp_2(z + 2\omega_3) = \frac{\sigma_2(z + 2\omega_3)}{\sigma(z + 2\omega_3)} = \frac{e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma_2(z)}{-e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma(z)} = -\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} = -\wp_2(z)$$

から,

$$\wp_2(z + 4\omega_3) = -\wp_2(z + 2\omega_3) = \wp_2(z)$$

すなわち, $\wp_2(z)$ は, $-2\omega_2, 4\omega_3$ を基本周期とする 2 位の楕円関数. 留数に関して, $\sigma_2(0)/\sigma(0) = 1$ から $\text{Res}_{z=0} \wp_2(z) = 1$, Liouville の定理から, $\text{Res}_{z=2\omega_3} \wp_2(z) = -1$. 零点に関しては, $z = -\omega_2, -\omega_2 + 2\omega_3$ であることが分かる. $\wp_3(z)$ に関しては, $\wp_1(z)$ とまったく同様にして, 表の結論を得る.

第 11 章

複素変数の Jacobi の楕円関数

11.1 準備

実数値の Jacobi の楕円関数を, $\wp$ 関数を用いることで, 複素変数に拡張することを考える.

以下では, 固定された $a > 0, b > 0$ に対して,

$$\wp(z) = \wp(z|a, bi)$$

を考える (注: a, bi は半周期).

簡単のため, 次の記号を導入する.

$$(n, n')_1 := \frac{1}{(z - 2na - 2n'bi)^2}, \quad (n, n')_2 := \frac{1}{(2na + 2n'bi)^2}, \quad \{n, n'\} := \{(n, n')_1 - (n, n')_2\}$$

これを用いると, $\wp$ は次のように表せる.

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(z - 2na - 2n'bi)^2} - \frac{1}{(2na + 2n'bi)^2} \right\} = \frac{1}{z^2} + \sum' \{(n, n')_1 - (n, n')_2\} = \frac{1}{z^2} + \sum' \{n, n'\}$$

このとき, 複素共役に関して,

$$\overline{(n, n')_2} = (n, n')_2 \quad (\forall n, n' \in \mathbb{Z})$$

から, 以下のことが成立していることに注意しておく.

$$(n, n')_2 + (n, -n')_2 \in \mathbb{R} \quad (\forall n, n' \in \mathbb{Z})$$

Lemma. 8

$\wp(z)$ は, $\Re(z) = ma, \Im(z) = m'b \quad (m, m' \in \mathbb{Z})$ 上で実数値をとる.

Proof. 以下の 4 つの場合を考える.

1. $z = x \in \mathbb{R}$ の場合

各々, 共役な組を探すと,

$$(n, n')_1, \quad (n, -n')_1$$

が共役な組であることから,

$$\{n, n'\}, \quad \{n, -n'\}$$

も共役な組になっている. さらに, $n' = 0$ の時, $\{n, n'\} \in \mathbb{R}$ であるから,

$$\sum \{n, n'\} \in \mathbb{R}$$

となり, $\wp(z) = \wp(x) \in \mathbb{R}$ を得る.

2. $z = iy$ の場合

$$\begin{aligned} (n, n')_1 &= \frac{1}{(iy - 2na - 2n'bi)^2} = \frac{1}{\{-iy - 2(-n)a + 2n'bi\}^2} \\ &= \frac{1}{\{-2(-n)a - i(y - 2n'b)\}^2} = \frac{1}{\{-2(-n)a + i(y - 2n'b)\}^2} \\ &= \overline{(-n, n')_1} \end{aligned}$$

すなわち, $\overline{(n, n')_1} = (-n, n')$ であるから,

$$(n, n')_1 + (-n, n')_1 \in \mathbb{R}$$

さらに, 共役な組を考えて,

$$\begin{aligned} &\{n, n'\} + \{-n, n'\} + \{n, -n'\} + \{-n, n'\} \\ &= (n, n')_1 - (n, n')_2 + (-n, n')_1 - (-n, n')_2 \\ &\quad + (n, -n')_1 - (n, -n')_2 + (-n, -n')_1 - (-n, -n')_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

であるから, $\wp(iy) \in \mathbb{R}$.

3. $z = a + iy$ の場合

$$\begin{aligned} (n, n')_1 &= \frac{1}{(a + iy - 2na - 2n'bi)^2} = \frac{1}{(-a - iy + 2na + 2n'bi)^2} \\ &= \frac{1}{\{a - iy - 2(-n + 1)a + 2n'bi\}^2} = \frac{1}{\{a - iy - 2(-n + 1) - 2n'bi\}^2} \\ &= \overline{(-n + 1, n')} \end{aligned}$$

よって, $\overline{(n, n')_1} = (-n + 1, n')$ であるから,

$$\{n, n'\} + \{-n + 1, n'\} + \{n, -n'\} + \{-n + 1, -n'\} \in \mathbb{R}$$

従って, $\wp(a + iy) \in \mathbb{R}$.

4. $z = x + ib$ の場合

各組に関して,

$$\{n, n'\} + \{n, -n' + 1\} + \{n, -n'\} + \{n, n' - 1\} \in \mathbb{R}$$

であるから, $\wp(x + ib) \in \mathbb{R}$.

以上 1.~4. から, $\wp(z)$ は $ma, m'ib$ 上で実数値をとる.

Lemma. 9 以下が成立する.

$$e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

Proof. 先程の補題から, $\wp(z) = \wp(z|a, bi)$ は $z = a, z = a + ib, z = ib$ で実数値をとるので,

$$e_1 = \wp(a) \in \mathbb{R}, \quad e_2 = \wp(a + ib) \in \mathbb{R}, \quad e_3 = \wp(ib) \in \mathbb{R}$$

さらに g_2, g_3 に関する関係式から,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}g_2 &= e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}g_3 &= e_1e_2e_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

となり, $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ を得る.

Lemma. 10 以下が成立する.

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \wp'(z) \in \mathbb{R}, \quad z : \text{純虚数} \Rightarrow \wp'(z) : \text{純虚数}.$$

Proof. 次の 2 つの場合を考える.

1. $z = x \in \mathbb{R}$ の場合

$$\wp'(x) = -2 \sum \frac{1}{(x - 2na - 2n'bi)^3} =: -2[n, n']$$

と表すことにすると,

$$n' \neq 0 \Rightarrow \overline{[n, n']} = [n, -n']$$

なので, $\wp'(x) \in \mathbb{R}$.

2. $z = iy$ (純虚数) の場合

先程の表記を用いて,

$$\overline{[n, n']} = -[-n, n']$$

と表されるので, $\wp'(iy) : \text{純虚数}$.

Lemma. 11 以下が成立する.

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Proof. 実軸上, $\wp(x) (x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ の概形を考える. $x = 0$ の近傍での展開

$$\wp'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{g_2}{10}x + \cdots$$

x	$0 \rightarrow a$
$\{\wp'(x)\}^2$	$\infty \rightarrow 0$
$\wp(x)$	$\infty \rightarrow e_1$

表 11.1 値の対応関係

から, $x \rightarrow 0$ の時, $\wp'(x) \rightarrow -\infty$. さらに, $\wp'(a) = 0$ かつ, $\wp'(x)$ の他の零点が $0 < x < a$ に存在しないことから,

$$0 < x < a \Rightarrow \wp'(x) < 0$$

すなわち, $0 < x < a$ において, $\wp(x) : \infty \rightarrow e_1$ (単調減少). また, $\wp(x)$ は偶関数かつ周期 $2a$ なので,

$$\wp(z) = \wp(-x) = \wp(2a - x)$$

から, 図 11.1 のような概形になる.

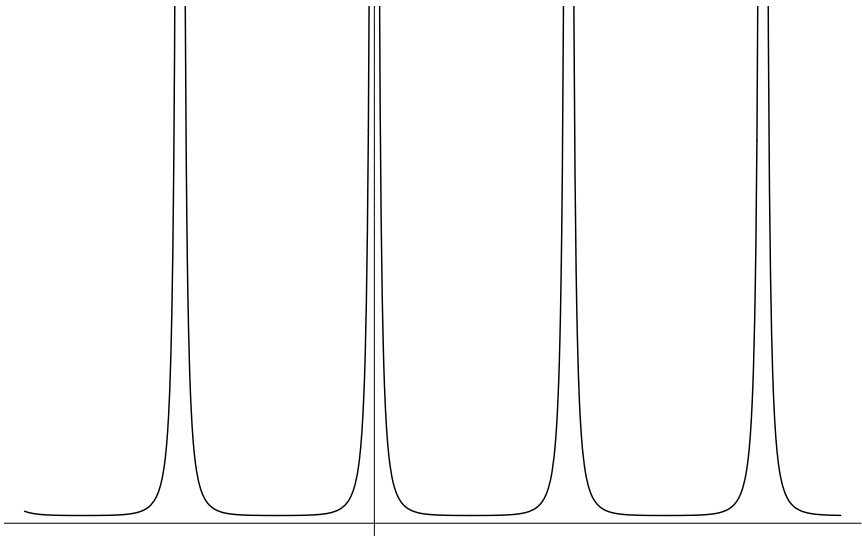


図 11.1 $\wp$ 関数の概形

一方,

$$\{\wp'(x)\}^2 = 4(\wp(x) - e_1)(\wp(x) - e_2)(\wp(x) - e_3)$$

から, $0 < x < a$ において, 表 11.1 のように対応する.

すなわち, $0 < x < a \Rightarrow e_1 < \wp(x) < \infty$. ここで, $\{\wp'(x)\}^2 \geq 0$ なので,

$$e_1 > e_2, \quad e_1 > e_3. \tag{11.1}$$

これは, 方程式

$$4t^3 - g_2t - g_3 = 0 \tag{11.2}$$

の最大解が $t = e_1$ であるとも捉えられる. 同様のことを, 虚軸上で考察する. すなわち, 虚軸上において e_1, e_2, e_3 の満たすべき条件を考える. まず,

$$\wp(iy|a, bi) = (-i)^{-2} \wp\left(y \middle| \frac{a}{i}, b\right) = -\wp(y| -ai, b)$$

すなわち $\wp(y| -ai, b) = -\wp(iy|a, bi)$. ここで,

$$\varphi(z) := \wp(z| -ai, b)$$

とおくと, $\varphi(z)$ は, $-2ai, 2b$ を基本周期とする楕円関数である. この $\varphi(z)$ の不変量を $\hat{g}_2, \hat{g}_3$ とすると,

$$\begin{aligned} \hat{g}_2 &= \sum \frac{1}{(-2nai + 2n'b)^4} = \sum \frac{(i)^4}{(2na + 2n'bi)^4} = g_2 \\ \hat{g}_3 &= \sum \frac{1}{(-2nai + 2n'b)^6} = \sum \frac{(i)^6}{(2na + 2n'bi)^6} = -g_3 \end{aligned}$$

と表されるので, $\varphi(z)$ の満たす微分方程式は,

$$\{\varphi(z)\}^2 = 4\varphi^3(z) - g_2\varphi(z) + g_3$$

である. ここで $\hat{e}_1 = \varphi(b)$ とおくと, 実軸上の場合と同様に, $\hat{e}_1$ は方程式

$$4\hat{t}^3 - g_2\hat{t} + g_3 = 0 \quad (11.3)$$

の最大の解. ところが,

$$\hat{e}_1 = \varphi(b) = -\wp(ib|a, bi) = -e_3$$

であり, (11.2), (11.3) の解の符号は互いに反対. さらに,

$$-e_3 > -e_2, \quad -e_3 > -e_1$$

すなわち,

$$e_3 < e_2, \quad e_3 < e_1. \quad (11.4)$$

よって, (11.1), (11.4) から,

$$e_1 > e_2 > e_3$$

を得る.

これらの補題から, Jacobi の楕円関数を複素変数に拡張する. そのために, 実数の場合をまとめておく.

11.2 実変数の Jacobi の楕円関数の、複素変数への拡張

母数 $0 < k < 1$ に対して,

$$u = F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

を Legendre の第 1 種楕円積分と呼び, $u = F(\varphi)$ の逆関数

$$\varphi = \operatorname{am}(u)$$

を, u の振幅 (amplitude) といった. さらに, sn 関数は,

$$\operatorname{sn} u := \sin(\operatorname{am} u)$$

によって与えられた.

Proposition. 51 先程の補題によって, $x \in \mathbb{R}$ の時,

$$u := \wp(x)$$

とおくと, 次が成立する.

$$u > e_1 \Rightarrow x = \frac{1}{g} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

ただし, $g > 0, k > 0$ は, 以下を満たす実数である.

$$g^2 := e_1 - e_3, \quad k^2 := \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

Proof. まず, $u = \wp(x)$ とおくと, $du = \wp'(x)dx$ であるから,

$$dx = \frac{du}{\wp'(x)} = \frac{du}{\sqrt{4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3}}$$

この両辺を積分し,

$$x = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} = \frac{1}{2} \int_u^\infty \frac{dt}{(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)} \quad (11.5)$$

特に, $u \rightarrow e_1, x \rightarrow a$ であるから,

$$a = \int_{e_1}^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} = \frac{1}{2} \int_{e_1}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)}} \quad (11.6)$$

が成立する. ここで,

$$t := e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta}, \quad g^2 := e_1 - e_3, \quad k^2 := \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

t	$u \rightarrow \infty$
$\sin^2 \theta$	$\frac{e_1 - e_3}{u - e_3} \rightarrow 0$
θ	$\varphi \rightarrow 0$

表 11.2 値の対応関係

とおく. また, 端点について,

$$u := e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \varphi} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める.

また, $t = e_3 + g^2 / \sin^2 \theta$ から,

$$2 \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{g^2}{(t - e_3)^2} dt$$

すなわち,

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{1}{g^2} (t - e_3)^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{1}{g^2} \left\{ \frac{g^2}{\sin^2 \theta} \right\}^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= -2g^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta \end{aligned}$$

を得る. これらを (11.5) に用いて置換積分を行う.

$$\begin{aligned} \sqrt{(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)} &= \sqrt{\left(e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta} - e_1\right)\left(e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta} - e_2\right)\left(e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta} - e_3\right)} \\ &= \sqrt{\left(e_3 - e_1 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta}\right)\left(e_3 - e_2 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta}\right) \frac{g^2}{\sin^2 \theta}} = \sqrt{\left(-g^2 + \frac{g^2}{\sin^2 \theta}\right)\left(k^2 g^2 - \frac{g^2}{\sin^2 \theta}\right) \frac{g^2}{\sin^2 \theta}} \\ &= \sqrt{g^6 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - k^2\right) \frac{1}{\sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

から, (11.5) は,

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi}^0 \frac{-2g^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta}{\sqrt{g^6 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - k^2\right) \frac{1}{\sin^2 \theta}}} = \frac{1}{g} \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

と表される. よって,

$$x = \frac{1}{g} \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

が成立する.

Proposition. 52

$u = \wp(x)$ に対して,

$$\wp(x) = e_3 + \frac{g^2}{\operatorname{sn}^2(gx)}$$

が成立する.

Proof. 先程得られた関係式

$$gx = \int_0^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

から, 両辺の逆関数を考えると,

$$\varphi = \operatorname{am}(gx).$$

これを

$$u = e_3 + \frac{g^2}{\sin^2 \varphi} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

に用いて,

$$\wp(x) = u = e_3 + \frac{g^2}{\operatorname{sn}^2(gx)}$$

を得る.

Corollary. 14 以下が成立する.

$$a = \frac{1}{g} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{K}{g}$$

Proposition. 53

$x \in \mathbb{R}$ に対して, Jacobi の楕円関数 $\operatorname{sn}(x), \operatorname{cn}(x), \operatorname{dn}(x)$ は, $\wp(x)$ を用いて,

$$\operatorname{sn}(gx) = \frac{g}{\sqrt{\wp(x) - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(gx) = \frac{\sqrt{\wp(x) - e_1}}{\sqrt{\wp(x) - e_3}}, \quad \operatorname{dn}(gx) = \frac{\sqrt{\wp(x) - e_2}}{\sqrt{\wp(x) - e_3}}$$

と表される.

Proof. sn 関数に関して, 関係式

$$\wp(x) = e_3 + \frac{g^2}{\operatorname{sn}^2(gx)}$$

から,

$$\operatorname{sn}^2(gx) = \frac{g^2}{\wp(x) - e_3} \Rightarrow \operatorname{sn}(gx) = \frac{g}{\sqrt{\wp(x) - e_3}}$$

また, cn 関数に関して,

$$\operatorname{cn}^2(gx) = 1 - \operatorname{sn}^2(gx) = 1 - \frac{g^2}{\wp(x) - e_3} = \frac{\wp(x) - e_3 - (e_1 - e_3)}{\wp(x) - e_3} = \frac{\wp(x) - e_1}{\wp(x) - e_3}$$

から,

$$\operatorname{cn}(gx) = \sqrt{\frac{\wp(x) - e_1}{\wp(x) - e_3}}$$

dn 関数に関しても,

$$\operatorname{dn}^2(gx) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(gx) = 1 - \left(\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \right) \frac{g^2}{\wp(x) - e_3} = 1 - \frac{e_2 - e_3}{\wp(x) - e_3} = \frac{\wp(x) - e_2}{\wp(x) - e_3}$$

から,

$$\operatorname{dn}(gx) = \sqrt{\frac{\wp(x) - e_2}{\wp(x) - e_3}}$$

を得る.

この命題において, sn 関数, cn 関数, dn 関数 の右辺は複素変数において意味を持っていることに注目し, 一致の定理を用いて sn , cn , dn 関数を複素変数に拡張する.

Definition. 31 複素変数の Jacobi の楕円関数

次によって, $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ を定義する.

$$\operatorname{sn}(z) = \frac{g}{\sqrt{\wp(z/g) - e_3}} = \frac{g\sigma(z/g)}{\sigma_3(z/g)} = \frac{g}{\wp_3(z/g)}$$

$$\operatorname{cn}(z) = \frac{\sqrt{\wp(z/g) - e_1}}{\sqrt{\wp(z/g) - e_3}} = \frac{\sigma_1(z/g)}{\sigma_3(z/g)} = \frac{\wp_1(z/g)}{\wp_3(z/g)}$$

$$\operatorname{dn}(z) = \frac{\sqrt{\wp(z/g) - e_2}}{\sqrt{\wp(z/g) - e_3}} = \frac{\sigma_2(z/g)}{\sigma_3(z/g)} = \frac{\wp_2(z/g)}{\wp_3(z/g)}$$

ただし, $g = \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{\wp(\omega_1) - e_3} = \sigma_3(\omega_1)/\sigma(\omega_1)$.

第 12 章

Jacobi の楕円関数の性質

複素変数に拡張された, Jacobi の楕円関数の性質を調べる.

12.1 周期, 極, 零点など

Proposition. 54

$\operatorname{sn} z$ は奇関数, $\operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ は偶関数.

Proof. 順に示す.

1. sn 関数

$$\operatorname{sn} z = \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}$$

において, $\sigma(z)$ は奇関数, $\sigma_3(z)$ は偶関数. よって, $\operatorname{sn} z$ は奇関数.

2. cn 関数

$$\operatorname{cn} z = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}$$

において, $\sigma_1(z), \sigma_3(z)$ はいずれも偶関数. よって, $\operatorname{cn} z$ は偶関数.

3. dn 関数

$$\operatorname{dn} z = \frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}$$

において, $\sigma_2(z), \sigma_3(z)$ はいずれも偶関数. よって, $\operatorname{dn} z$ は偶関数.

Proposition. 55

$K := g\omega_1, \quad iK' := g\omega_3$ とおくと, 次が成立する.

$$\operatorname{sn}(z + 2K) = -\operatorname{sn}(z), \quad \operatorname{cn}(z + 2K) = -\operatorname{cn}(z), \quad \operatorname{dn}(z + 2K) = \operatorname{dn}(z)$$

$$\operatorname{sn}(z + 2iK') = \operatorname{sn}(z), \quad \operatorname{cn}(z + 2iK') = -\operatorname{cn}(z), \quad \operatorname{dn}(z + 2iK') = -\operatorname{dn}(z)$$

Proof. σ 関数, σ_k 関数の性質

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z), \quad \sigma(z + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(z+\omega_3)}\sigma(z)$$

および

$$\sigma_k(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z+\omega_k)}\sigma_k(z), \quad \sigma_k(z + 2\omega_l) = e^{2\eta_l(z+\omega_l)}\sigma_k(z) \quad (k \neq l)$$

を用いる.

$$\operatorname{sn}(z + 2K) = \frac{g\sigma\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)} = -\frac{g\sigma\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = -\operatorname{sn}(z)$$

同様に,

$$\operatorname{cn}(z + 2K) = \frac{g\sigma_1\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)} = -\frac{g\sigma_1\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = -\operatorname{cn}(z)$$

$$\operatorname{dn}(z + 2K) = \frac{g\sigma_2\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_1\right)} = \frac{g\sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = \operatorname{dn}(z)$$

さらに, iK' に関して,

$$\operatorname{sn}(z + 2iK') = \frac{g\sigma\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)} = \frac{g\sigma\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = \operatorname{sn}(z)$$

同様に,

$$\operatorname{cn}(z + 2iK') = \frac{g\sigma_1\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)} = -\frac{g\sigma_1\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = -\operatorname{cn}(z)$$

$$\operatorname{dn}(z + 2iK') = \frac{g\sigma_2\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g} + 2\omega_3\right)} = -\frac{g\sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = -\operatorname{dn}(z)$$

から, 結論を得る.

Definition. 32 母数, 補母数

$$k := \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = -\frac{1}{g} \frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}, \quad k' := \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{1}{g} \frac{\sigma_2(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)}$$

	基本周期	極, 留数	零点
$\operatorname{sn} z$	$4K, 2iK'$	$\operatorname{Res}_{z=iK'} \operatorname{sn} z = \frac{1}{k}, \operatorname{Res}_{z=2K+iK'} \operatorname{sn} z = -\frac{1}{k}$	$2nK + 2n'iK'$
$\operatorname{cn} z$	$4K, 2K + 2iK'$	$\operatorname{Res}_{z=iK'} \operatorname{cn} z = -\frac{i}{k}, \operatorname{Res}_{z=2K+iK'} \operatorname{cn} z = \frac{i}{k}$	$(2n+1)K + 2n'iK'$
$\operatorname{dn} z$	$2K, 4iK'$	$\operatorname{Res}_{z=iK'} \operatorname{dn} z = -i, \operatorname{Res}_{z=3iK'} \operatorname{dn} z = i$	$(2n+1)K + (2n'+1)iK'$

表 12.1 $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の極と留数, および零点の表

とおく. この k を母数, k' を補母数という.

Proposition. 56

母数, 補母数に関して, 以下が成立する.

$$k^2 + k'^2 = 1$$

Proof. 定義から,

$$k^2 + k'^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} + \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_3} = 1.$$

を得る.

Proposition. 57

$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の極, 留数, 零点は表 12.1 のようになる. ただし, $k = -\frac{1}{g} \frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}$ を満たすものとする.

Remark. 10 cn 関数に関しては, 周期平行四辺形の取り方を, 2 位の楕円関数であることを満たすようにとるものとする.

Proof. $\sigma(z/g), \sigma_k(z/g) (k = 1, 2, 3)$ の零点

$$z = 2nK + 2n'iK', \quad z = (2n+1)K + 2n'iK', \quad z = (2n+1)K + (2n'+1)iK', \quad z = 2nK + (2n'+1)iK'$$

から, それぞれの点における値を得る.

Remark. 11

iK' は, いずれの関数に対しても 1 位の極である.

次に $(\wp(z))$ における半周期に相当する K, iK' 等の特別な点における k, k' と $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の関係をまとめる.

Example. 11 以下が成立する.

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{cn}(K + iK') = \frac{ik'}{k}.$$

z	0	$\frac{K}{2}$	K	$\frac{iK'}{2}$	$K + \frac{iK'}{2}$	iK'	$K + iK'$
$\operatorname{sn} z$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	∞	$\frac{1}{k}$
$\operatorname{cn} z$	1	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	0	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$	∞	$\frac{-ik'}{k}$
$\operatorname{dn} z$	1	$\sqrt{k'}$	k'	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{1-k}$	∞	0

表 12.2 特別な点における値

Proof. $\sigma(z)$ は奇関数, $\sigma_k(z)$ は偶関数であるから,

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \frac{g\sigma(\omega_1 + \omega_3)}{\sigma_3(\omega_1 + \omega_3)} = \frac{g\sigma(-\omega_2)}{\sigma_3(-\omega_2)} = -\frac{g\sigma(\omega_2)}{\sigma_3(\omega_2)} = \frac{1}{k}$$

また,

$$\operatorname{cn}(K + iK') = \frac{\sigma_1(\omega_1 + \omega_3)}{\sigma_3(\omega_1 + \omega_3)} = \frac{\sigma_1(-\omega_2)}{\sigma_3(-\omega_2)} = \frac{\sigma_1(\omega_2)}{\sigma_3(\omega_2)} = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{e_2 - e_3}} = i \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3} = i \frac{k'}{k}$$

このように順次値を求め, 表 12.2 を得る. この表を用いて, 原点近傍での $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の展開を求めることが出来る. その準備を兼ねて, $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ に関する種々の公式を導くことにする.

12.2 種々の公式と, 原点近傍における展開

$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ を $\sigma(z), \sigma_k(z)$ を用いて表示することにより, 実関数において成立していた公式がそのまま成立する. このことを以下に示す.

Lemma. 12 以下が成立する.

$$\left(\frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_3(z)\sigma_1(z)}{\sigma(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)}{\sigma(z)^2}$$

Proof. $1 \leq \forall k \leq 3$ に対して,

$$\wp_k^2(z) = \wp(z) - e_k = \frac{\sigma_k^2(z)}{\sigma^2(z)}$$

この両辺を z で微分し,

$$\wp'(z) = 2 \frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right)'$$

すなわち,

$$\left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right)' = \frac{1}{2} \frac{\sigma(z)}{\sigma_k(z)} \wp'(z) = \frac{1}{2} \frac{\sigma(z)}{\sigma_k(z)} \cdot \frac{-2\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}$$

ここに $k = 1, 2, 3$ を代入し,

$$\left(\frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_3(z)\sigma_1(z)}{\sigma(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)}{\sigma(z)^2}$$

を得る.

Lemma. 13 以下が成立する.

$$\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)} \right)' = -\frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma_1(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)} \right)' = -\frac{\sigma_3(z)\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)^2}, \quad \left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)} \right)' = -\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)^2}$$

Proof. 商の微分法により,

$$\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_k(z)} \right)' = \left\{ \frac{1}{\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}} \right\}' = -\frac{\left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right)'}{\left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right)^2} = -\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_k(z)} \right)^2 \left(\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)} \right)'$$

$k = 1$ の時,

$$\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)} \right)' = -\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)} \right)^2 \left(\frac{\sigma_1(z)}{\sigma(z)} \right)' = -\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)} \right)^2 \left\{ -\frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^2(z)} \right\} = \frac{\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma_1^2(z)}$$

同様に, $k = 2, 3$ について,

$$\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)} \right)' = -\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)} \right)^2 \left(\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} \right)' = \frac{\sigma_1(z)\sigma_3(z)}{\sigma_2^2(z)}, \quad \left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)} \right)' = -\left(\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)} \right)^2 \left(\frac{\sigma_3(z)}{\sigma(z)} \right)' = \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)}{\sigma_3^2(z)}$$

を得る.

複素変数においても, 以下の公式が成立する.

Proposition. 58

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1$$

Proof.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z &= \frac{g^2 \sigma^2 \left(\frac{z}{g} \right)}{\sigma \left(\frac{z}{g} \right)} + \left\{ \frac{\sigma_1 \left(\frac{z}{g} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{z}{g} \right)} \right\}^2 = \left\{ \frac{\sigma \left(\frac{z}{g} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{z}{g} \right)} \right\}^2 \left\{ g^2 + \left(\frac{\sigma_1 \left(\frac{z}{g} \right)}{\sigma \left(\frac{z}{g} \right)} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\wp \left(\frac{z}{g} \right) - e_3} \left\{ e_1 - e_3 + \wp \left(\frac{z}{g} \right) - e_1 \right\} = 1. \end{aligned}$$

Proposition. 59

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z &= \left\{ \frac{\sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} \right\}^2 + k^2 \left\{ \frac{g\sigma\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} \right\}^2 = k^2 \left\{ \frac{g\sigma\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} \right\}^2 \left[\left\{ \frac{\sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma\left(\frac{z}{g}\right)} \right\}^2 + k^2 g^2 \right] \\ &= \frac{1}{\wp\left(\frac{z}{g}\right) - e_3} \left[\wp\left(\frac{z}{g}\right) - e_2 + \left\{ \frac{\sigma_3(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)} \right\}^2 \right] = \frac{1}{\wp\left(\frac{z}{g}\right) - e_3} \left\{ \wp\left(\frac{z}{g}\right) - e_2 + e_2 - e_3 \right\} = 1. \end{aligned}$$

Proposition. 60

$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

Proof. 補題 13 を用いる.

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sn} z = \frac{d}{dz} \left(\frac{\sigma\left(\frac{z}{g}\right)}{g \frac{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)}} \right) = g \cdot \frac{\sigma_1\left(\frac{z}{g}\right) \sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3^2\left(\frac{z}{g}\right)} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\sigma_1\left(\frac{z}{g}\right) \sigma_2\left(\frac{z}{g}\right)}{\sigma_3\left(\frac{z}{g}\right) \sigma_3\left(\frac{z}{g}\right)} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

Proposition. 61

$$\operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z.$$

Proof. Proposition 58 から,

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1.$$

この両辺を z で微分し,

$$2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn}' z + 2 \operatorname{cn} z \operatorname{cn}' z = 0.$$

すなわち $\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + \operatorname{cn} z \operatorname{cn}' z = 0$. 両辺を整理して,

$$\operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z$$

を得る.

Proposition. 62

$$\operatorname{dn}' z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z.$$

Proof. Proposition 59 から,

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1.$$

この両辺を z で微分し,

$$2 \operatorname{dn} z \operatorname{dn}' z + 2k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn}' z = 0.$$

すなわち $\operatorname{dn} z \operatorname{dn}' z + k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z = 0$. 両辺を整理して,

$$\operatorname{dn}' z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$$

を得る.

これらを用いて, 原点近傍での $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の展開を求める.

Proposition. 63

原点近傍で, $\operatorname{sn} z$ は,

$$\operatorname{sn} z = z - (1 + k^2) \frac{z^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{z^5}{5!} - \dots$$

と展開される.

Proof. 原点近傍における Taylor 展開

$$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn} 0 + \frac{\operatorname{sn}' 0}{1!} z + \frac{\operatorname{sn}'' 0}{2!} z^2 + \frac{\operatorname{sn}''' 0}{3!} z^3 + \frac{\operatorname{sn}^{(4)} 0}{4!} z^4 + \dots$$

を考える. 高階導関数を求める.

1. 1 階導関数.

$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

2. 2 階導関数.

$$\operatorname{sn}'' z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn}^2 z - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn}^2 z = -\operatorname{sn} z (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z) - k^2 \operatorname{sn} z (1 - \operatorname{sn}^2 z).$$

3. 3 階導関数.

$$\operatorname{sn}''' z = 6k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z - (1 + k^2) \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$$

4. 4 階導関数.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^{(4)} z = & 12k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn}^2 z \operatorname{dn}^2 z - 6k^2 \operatorname{sn}^3 z \operatorname{dn}^2 z - 6k^4 \operatorname{sn}^3 z \operatorname{cn}^2 z \\ & + (1 + k^2) \operatorname{sn} z \operatorname{dn}^2 z + k^2 (1 + k^2) \operatorname{sn} z \operatorname{cn}^2 z \end{aligned}$$

5. 5 階導関数.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^{(5)} z = & \underbrace{12k^2 \operatorname{cn}^3 z \operatorname{dn}^3 z}_{-24k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn}^3 z - 24k^4 \operatorname{sn}^2 \operatorname{cn}^3 z \operatorname{dn} z} \\ & - 18k^2 \operatorname{sn}^2 \operatorname{cn} z \operatorname{dn}^3 z - 12k^2 \operatorname{sn}^4 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z - 18k^4 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^3 z \operatorname{dn} z \\ & + 12k^4 \operatorname{sn}^4 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + \underbrace{(1 + k^2) \operatorname{cn} z \operatorname{dn}^3 z}_{-2(1 + k^2)k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z} \\ & + \underbrace{(1 + k^2)k^2 \operatorname{cn}^3 z \operatorname{dn} z}_{-2(1 + k^2)k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}. \end{aligned}$$

ここで $z = 0$ として, $\text{sn } 0 = 0, \text{cn } 0 = \text{dn } 0 = 1$ を導関数に用いる.

$$\begin{aligned} \text{sn}' 0 &= 1, & \text{sn}'' 0 &= 0, & \text{sn}''' 0 &= -(1+k^2) \\ \text{sn}^{(4)} 0 &= 0, & \text{sn}^{(5)} 0 &= 12k^2 + (1+k^2) + (1+k^2)k^2 = 1 + 14k^2 + k^4 \end{aligned}$$

よって, これらを Taylor 展開に用いて,

$$\text{sn } z = z - (1+k^2)\frac{z^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{z^5}{5!} - \dots$$

を得る.

Proposition. 64

原点近傍で, $\text{cn } z$ は,

$$\text{cn } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{z^4}{4!} - \dots$$

と展開される.

Proof. Taylor 展開

$$\text{cn } z = \text{cn } 0 + \frac{\text{cn}' 0}{1!}z + \frac{\text{cn}'' 0}{2!}z^2 + \frac{\text{cn}''' 0}{3!}z^3 + \frac{\text{cn}^{(4)} 0}{4!}z^4 + \dots$$

を考える. 高階導関数を求める.

1. 1 階導関数

$$\text{cn}' z = -\text{sn } z \text{ dn } z$$

2. 2 階導関数

$$\text{cn}'' z = -\text{cn } z \text{ dn}^2 z + k^2 \text{sn}^2 z \text{ cn } z$$

3. 3 階導関数

$$\text{cn}''' z = \text{sn } z \text{ dn}^3 z + 4k^2 \text{sn } z \text{ cn}^2 z \text{ dn}^2 z - k^2 \text{sn}^3 z \text{ dn } z$$

4. 4 階導関数

$$\begin{aligned} \text{cn}^{(4)} z &= \underbrace{\text{cn } z \text{ dn}^4 z}_{-8k^2 \text{sn}^2 z \text{ cn } z \text{ dn}^2 z} - 3k^2 \text{sn}^2 z \text{ cn } z \text{ dn}^2 z + \underbrace{4k^2 \text{cn}^3 z \text{ dn}^2 z}_{-4k^4 \text{sn}^2 z \text{ cn}^3 z} \\ &\quad - 3k^2 \text{sn}^2 z \text{ cn } z \text{ dn}^2 z + k^4 \text{sn}^4 z \text{ cn } z \end{aligned}$$

ここで $z = 0$ として, $\text{sn } 0 = 0, \text{cn } 0 = \text{dn } 0 = 1$ を導関数に用いる.

$$\text{cn}' 0 = 0, \quad \text{cn}'' 0 = -1, \quad \text{cn}''' 0 = 0, \quad \text{cn}^{(4)} 0 = 1 + 4k^2.$$

これらを展開に対して用いて,

$$\text{cn } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{z^4}{4!} - \dots$$

を得る.

Proposition. 65

原点近傍で, $\operatorname{dn} z$ は,

$$\operatorname{dn} z = 1 - k^2 \frac{z^2}{2!} + (4k^2 + k^4) \frac{z^4}{4!} - \dots$$

と展開される.

Proof. $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z$ と同様の考え方をを行う. Taylor 展開

$$\operatorname{dn} z = \operatorname{dn} 0 + \frac{\operatorname{dn}' 0}{1!} z + \frac{\operatorname{dn}'' 0}{2!} z^2 + \frac{\operatorname{dn}''' 0}{3!} z^3 + \dots$$

を考える.

1. 1 階導関数

$$\operatorname{dn}' z = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z$$

2. 2 階導関数

$$\operatorname{dn}'' z = -k^2 \operatorname{cn}^2 z \operatorname{dn} z + k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{dn} z$$

3. 3 階導関数

$$\operatorname{dn}''' z = 4k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn}^2 z + k^4 \operatorname{sn} z \operatorname{dn}^3 z - k^4 \operatorname{sn}^3 z \operatorname{cn} z$$

4. 4 階導関数

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^{(4)} z = & \underbrace{4k^2 \operatorname{cn} z \operatorname{dn}^3 z}_{-4k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{dn}^3 z} - 14k^4 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^2 z \operatorname{dn} z \\ & + \underbrace{k^4 \operatorname{cn}^4 z \operatorname{dn} z}_{+k^4 \operatorname{sn}^4 z \operatorname{dn} z} \end{aligned}$$

ここで $z = 0$ として, $\operatorname{sn} 0 = 0, \operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1$ を導関数に用いる.

$$\operatorname{dn}' 0 = 0, \quad \operatorname{dn}'' 0 = -k^2, \quad \operatorname{dn}''' 0 = 0, \quad \operatorname{dn}^{(4)} 0 = 4k^2 + k^4$$

これを展開に用いて,

$$\operatorname{dn} z = 1 - k^2 \frac{z^2}{2!} + (4k^2 + k^4) \frac{z^4}{4!} - \dots$$

を得る.

12.3 $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の極限としての三角関数, 及び双曲関数 に対する展望

sn 関数の展開

$$\operatorname{sn} z = z - (1 + k^2) \frac{z^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{z^5}{5!} - \dots$$

において, $k \rightarrow 0$ とすると,

$$\operatorname{sn} z \rightarrow z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sin z$$

さらに, cn 関数に関して,

$$\text{cn } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{z^4}{4!} - \dots$$

で $k \rightarrow 0$ とすると,

$$\text{cn } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos z$$

同様に, dn 関数に関して $k \rightarrow 0$ とすると,

$$\text{dn } z = 1$$

となり, 実数の時とまったく同様に, $k \rightarrow 0$ の極限は三角関数であるという性質を持っていることが分かる. $k \rightarrow 1$ の時を考える. 実数の場合を振り返ると,

$$\text{sn } z \rightarrow \tanh z, \quad \text{cn } z, \text{dn } z \rightarrow \frac{1}{\cosh z}$$

という関係を持っていることが望ましい. 少し様子を探ってみることにする. 原点近傍における展開で, $k \rightarrow 1$ の時,

$$\text{sn } z \rightarrow z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 - \dots$$

この右辺は, 有限個については $\tanh z$ と一致していることが確認できたが, $\tanh z$ の展開が

$$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} - \frac{2}{15}z^5 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n z^{2n-1}}{(2n)!} + \dots, \quad B_n : \text{Bernoulli 数}$$

という, 見慣れない形をしているため (予想は出来るが), 完全に一致しているとは言い切れない.

仮に, $k \rightarrow 1 \Rightarrow \text{sn } z \rightarrow \tanh z$ であるとする, 複素変数の Jacobi の楕円関数に関する公式

$$\text{sn}^2 z + \text{cn}^2 z = 1$$

から, $k = 1$ において,

$$\text{cn}^2 z = 1 - (\tanh z)^2 = 1 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)^2 = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}$$

となり,

$$\text{cn } z = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{\cosh z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{5z^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^n E_n z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad E_n : \text{Euler 数}$$

が成立していることが望まれる. 一方, 求めた原点近傍における cn 関数の展開で $k \rightarrow 1$ とすると,

$$\text{cn } z = 1 - \frac{z^2}{2!} + (1 + 4 \cdot 1^2) \frac{z^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{5z^4}{24} - \dots$$

となり, 有限個の項については一致することが確認できる. dn 関数に関しても,

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1$$

から, $k \rightarrow 1$ において,

$$\operatorname{dn}^2 z = 1 - \operatorname{sn}^2 z = 1 - (\tanh z)^2 = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}$$

から,

$$\operatorname{dn} z = \operatorname{cn} z = \frac{2}{e^z + e^{-z}} = \frac{1}{\cosh z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{5z^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n E_n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad E_n : \text{Euler 数}$$

となっていることが予想される. 原点における展開は,

$$\operatorname{dn} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + (4i^2 + 1^4) \frac{z^4}{4!} - \cdots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{5z^4}{24} - \cdots$$

となり, やはり有限個に関しては一致していることが確認できる. 現在, 一般の項に関しての成立を示す方法を ($\wp$ 関数も含めて) 模索している.

12.4 $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の満たす微分方程式

Weierstrass の $\wp$ 関数は, 非線型微分方程式

$$\{\wp'(z)\}^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

を満たす. ところで $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ も同様に, 非線型の微分方程式を満たす.

Proposition. 66 $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ の満たす微分方程式

$\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$ は, 次の微分方程式を満たす.

$$\begin{cases} \{\operatorname{sn}' z\}^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z) \\ \{\operatorname{cn}' z\}^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 z)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 z) \\ \{\operatorname{dn}' z\}^2 = -(1 - \operatorname{dn}^2 z)(k'^2 - \operatorname{dn}^2 z) \end{cases}$$

Proof. 順に示す.

1. sn 関数

公式から,

$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z$$

この両辺を 2 乗して,

$$\{\operatorname{sn}' z\}^2 = \operatorname{cn}^2 z \operatorname{dn}^2 z = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z)$$

を得る.

2. cn 関数

公式から,

$$\text{cn}' z = -\text{sn} z \text{dn} z$$

両辺を 2 乗し,

$$\begin{aligned} \{\text{cn}' z\}^2 &= \text{sn}^2 z \text{dn}^2 z = (1 - \text{cn}^2 z)(1 - k^2 \text{sn}^2 z) = (1 - \text{cn}^2 z)\{1 - k^2(1 - \text{cn}^2 z)\} \\ &= (1 - \text{cn}^2 z)\{(1 - k^2) + k^2 \text{cn}^2 z\} = (1 - \text{cn}^2 z)(k'^2 + k^2 \text{cn}^2 z) \end{aligned}$$

を得る.

3. dn 関数

同様に, 公式から,

$$\text{dn}' z = -k^2 \text{sn} z \text{cn} z$$

両辺を 2 乗し, また, $\text{sn} z, \text{cn} z$ を $\text{dn} z$ で書き直し,

$$\begin{aligned} \{\text{dn}' z\}^2 &= k^4 \text{sn}^2 z \text{cn}^2 z = k^4 \left(\frac{1 - \text{dn}^2 z}{k^2} \right) \left(\frac{k^2 - 1 + \text{dn}^2 z}{k^2} \right) \\ &= (1 - \text{dn}^2 z)(-k'^2 + \text{dn}^2 z) = -(1 - \text{dn}^2 z)(k'^2 - \text{dn}^2 z) \end{aligned}$$

を得る.

第 III 部

再現部

9 関数と楕円関数

第 13 章

§ 関数

$\sigma(z), \sigma_k(z)$ などを, より統一的に表現するために $\wp$ 関数を導入し, その性質を調べることにする. 以下では, 変数は u, v を用いて表すことにする.

13.1 与えられた周期を持つ, 整関数の展開

Theorem. 15

周期 $\omega \neq 0$ を持つ u の任意の整関数は, $e^{2\pi i u/\omega}$ の整数指数のべき級数に展開され, この級数は任意の u に対して収束する.

Proof. $\varphi(u)$ を, u についての整関数で, ω を周期に持つものとする. まず,

$$e^{\frac{2\pi i u}{\omega}} := \zeta \quad (13.1)$$

とおく. $\varphi(u)$ を, ζ についての関数と考え, $\varphi(u)$ は u 平面上の関数, かつ ζ 平面上の関数. ここで $a (\neq 0)$ を ζ 平面上の有限の点として, a に対応する u 平面上の点を求める.

$$u = \frac{\omega}{2\pi i} (\log a + 2m\pi i) = \frac{\omega}{2\pi i} \log a + m\omega \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$\varphi(u)$ は周期 ω を持つので, $\zeta = a$ を定めると

$$\varphi(u + \omega) = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{\omega}{2\pi i} \log a\right)$$

から, φ の値は一意に定まる. 次に, $\varphi(u)$ (ζ についての関数) が $\zeta \neq 0, \zeta \neq \infty$ で正則であることを示す. $a: \zeta$ 平面上の点, $b: u$ 平面上の点として, a, b が次を満たすとする.

$$e^{\frac{2\pi i b}{\omega}} = a. \quad (13.2)$$

ここで (13.1), (13.2) から, a, b の近傍 ζ, u に対して,

$$e^{\frac{2\pi i(u-b)}{\omega}} = \frac{e^{\frac{2\pi i u}{\omega}}}{e^{\frac{2\pi i b}{\omega}}} = \frac{\zeta}{a} = 1 + \frac{\zeta - a}{a}.$$

よって,

$$u - b = \frac{\omega}{2\pi i} \log \left(1 + \frac{\zeta - a}{a} \right) = \frac{\omega}{2\pi i} \left\{ \frac{\zeta - a}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - a}{a} \right)^2 + \cdots \right\} =: \mathcal{B}(\zeta - a)$$

ただし, $\mathcal{B}$ はベキ級数を表す. 一方, $u = b$ 近傍で $\varphi(u)$ は正則なので,

$$\varphi(u) = c_0 + c_1 \mathcal{B}(\zeta - a) + c_2 (\mathcal{B}(\zeta - a))^2 + \cdots$$

と展開される. よって, $\varphi(u)$ は $\zeta = a$ の近傍でベキ級数に展開される. したがって, Laurent の定理から, $\{ \zeta | 0 < \forall \varepsilon < |\zeta| < r \}$ において, $\varphi(u)$ は

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{\omega} n}$$

の形に展開される.

13.2 記号

次に, いくつかの記号を定義する.

Definition. 33 記号

次のように記号を定める.

$$\tau := \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad h := e^{i\pi\tau}, \quad v := \frac{u}{2\omega_1}, \quad z := e^{i\pi v} = e^{\frac{i\pi u}{2\omega_1}}$$

また, Σ の記号の下に n があるとき, n はすべての整数をわたり, v があるときは, v は正の奇数, そして g があるときは, g は正の偶数をわたることを意味する. 無限積においても, 同様の記号を用いる.

Proposition. 67

次が成立する.

$$|h| < 1.$$

Proof. 定義の τ に対して,

$$\tau := r + is \quad r, s \in \mathbb{R}, s > 0$$

とおくと,

$$|h| = |e^{\pi i(r+is)}| = e^{-\pi s} < 1.$$

が成立する.

ここで, σ 関数と $\wp$ 関数の周期に関する性質

$$\begin{cases} \sigma(u + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma(u) \\ \sigma(u + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3(u+\omega_3)} \sigma(u) \end{cases}$$

から, 周期 $2\omega_1$ を持つ, 次の整関数 $\varphi(u)$ を考える.

$$\varphi(u) := e^{au^2+bu} \sigma(u)$$

このとき, 以下が成立する (定数 a, b が定まる).

Proposition. 68

$\varphi(u)$ が周期 $2\omega_1$ を持つとき,

$$a = -\frac{\eta_1}{2\omega_1}, \quad b = \frac{\pi i}{2\omega_1}$$

である.

Proof. 周期 $2\omega_1$ について, 関数の比を考える.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\varphi(u+2\omega_1)}{\varphi(u)} = \frac{e^{a(u+2\omega_1)^2+b(u+2\omega_1)} \sigma(u+2\omega_1)}{e^{au^2+bu} \sigma(u)} = \frac{e^{a(u^2+4\omega_1 u+4\omega_1^2)+b(u+2\omega_1)} \cdot -e^{2\eta_1(u+\omega_1)} \sigma(u)}{e^{au^2+bu} \sigma(u)} \\ &= -e^{2\{(2a\omega_1 u+2a\omega_1^2)+\eta_1 u+\eta_1 \omega_1\}+2b\omega_1} = -e^{2(2a\omega_1+\eta_1)(u+\omega_1)+2b\omega_1} \end{aligned}$$

であるから, $\forall u \in \mathbb{C}$ に対して,

$$2a\omega_1 = -\eta_1, \quad 2b\omega_1 = \pi i$$

これらを a, b について解くと,

$$a = -\frac{\eta_1}{2\omega_1}, \quad b = \frac{\pi i}{2\omega_1}$$

を得る.

以下, この a, b を代入した $\varphi(u)$ を考える. $\varphi(u)$ と周期の関係を調べることにする.

Proposition. 69 $\varphi(u)$ の性質

以下が成立する.

$$\varphi(u+\omega_3) = -z^2 \varphi(u), \quad z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}$$

Proof. 定義に代入する.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u+2\omega_3)}{\varphi(u)} &= \frac{e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(u+2\omega_3)^2+\frac{\pi i}{2\omega_1}(u+2\omega_3)} \sigma(u+2\omega_3)}{e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2+\frac{\pi i}{2\omega_1}u} \sigma(u)} = e^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1}(4\omega_3 u+4\omega_3^2)+\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} \left(-e^{2\eta_3(u+\omega_3)} \right) \\ &= -e^{-2\frac{\eta_1}{\omega_1}(\omega_3 u+\omega_3^2)+2\eta_3(u+\omega_3)} e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} = -e^{-2\frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1}(u+\omega_3)+2\eta_3(u+\omega_3)} e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} \\ &= -e^{-2(u+\omega_3)\left(\frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1}-\eta_3\right)} e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} = -e^{-2\left(\frac{u+\omega_3}{\omega_1}\right)(\eta_1 \omega_3-\omega_1 \eta_3)} e^{\frac{\pi i \omega_3}{\omega_1}} \\ &= -e^{\left\{-\left(\frac{u+\omega_3}{\omega_1}\right)\pi i + \frac{\omega_3}{\omega_1} \pi i\right\}} \quad (\text{Legendre の関係式}) \\ &= -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}u} = -\left\{e^{-\frac{\pi i}{2\omega_1}u}\right\}^2 = -z^{-2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\varphi(u + \omega_3) = -z^2 \varphi(u), \quad z = e^{\frac{\pi i u}{2\omega_1}}$$

を得る.

13.3 $\varphi(u)$ の展開

次に, $\varphi(u)$ の展開について考える.

Proposition. 70 $\varphi(u)$ の展開

$\varphi(u)$ は, 定数 Ci を用いて, 以下の形に展開される.

$$\varphi(u) = Ci \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n}$$

Proof. 定め方から, $\varphi(u)$ は整関数, かつ $2\omega_1$ を周期に持つ. よって Theorem.15 から, $\varphi(u)$ は

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega_1} n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n}$$

の形に展開される. また,

$$\varphi(u + 2\omega_1) = \varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega_3)$$

から, $h^{2n} = e^{2n\pi i \tau}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n} h^{2n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi i u}{2\omega_1} + 2n\pi i \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi i}{\omega_1} (u + 2\omega_3)} = \varphi(u + 2\omega_3) \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n-2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2(n-1)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+1} z^{2n} \end{aligned}$$

このとき, 係数を比較すると,

$$A_{n+1} = -h^{2n} A_n = -h^{(n+\frac{1}{2})^2 - (n-\frac{1}{2})^2} A_n$$

この両辺に $(-1)^{n+1} h^{(n+\frac{1}{2})^2}$ をかけて,

$$(-1)^{n+1} h^{-(n+\frac{1}{2})^2} A_{n+1} = (-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2} A_n$$

となるが, この等式の右辺において $n \rightarrow n+1$ を代入すると左辺であるから, $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2} A_n$ は n に依存しない一定の値をとる. よって,

$$Ci := (-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2} A_n$$

とおくと, $\varphi(u)$ は,

$$\varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{2n} = (-1)^n h^{-(n-\frac{1}{2})^2} A_n \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n} = Ci \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n}$$

と表される.

13.4 ϑ_1 関数

$\varphi(u)$ の展開で使われた級数を用いて, ϑ_1 関数を定義する.

Definition. 34 第 1 種 ϑ 関数

次を, 第 1 種 ϑ 関数という.

$$\vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1}$$

Remark. 12

$\vartheta_1(v)$ は, 整関数, かつ奇関数であることが, 展開から確認できる.

Proposition. 71 $\sigma(u)$ の, $\vartheta_1(v)$ による表示

$\sigma(u)$ は,

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v), \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$$

と表される (具体的に定数 C が定まる).

Proof. σ 関数の定義から,

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \varphi(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} C \vartheta_1(v)$$

と表される. 両辺を $u = 2\omega_1 v$ で割り, $u \rightarrow 0 (v \rightarrow 0)$ とすると,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma(u)}{u} = \lim_{v \rightarrow 0} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{C}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1(v)}{v}$$

から,

$$1 = \frac{C}{2\omega_1} \vartheta_1'(0)$$

C について解くと,

$$C = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)}$$

よって,

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1(v), \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$$

を得る.

ここで, $\vartheta_1(v)$ の別の表記を考える.

Proposition. 72

正の奇数 ν を用いて, $\vartheta_1(v)$ は,

$$\vartheta_1(v) = 2 \sum_{\nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} h^{\frac{\nu^2}{4}} \sin(\nu\pi v) = 2 \{ h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots \}$$

と表される.

Proof. 定義から,

$$\vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} = i \left\{ \sum_v (-1)^{\frac{v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^v + \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^{-v} \right\}$$

と表される. ここで,

$$(-1)^{\frac{v+1}{2}} = (-1)^v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} = -(-1)^{\frac{-v+1}{2}}$$

であることを用いて,

$$i \left\{ \sum_v (-1)^{\frac{v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^v + \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^{-v} \right\} = i \left\{ - \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^v + \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^{-v} \right\}$$

また, $z^v = e^{v\pi i v}$ に対し, $-z^v + z^{-v} = -e^{v\pi i v} + e^{-v\pi i v} = -2i \sin(v\pi v)$ であることを用いて,

$$\begin{aligned} i \left\{ - \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^v + \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} z^{-v} \right\} &= i \left\{ \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} (-z^v + z^{-v}) \right\} \\ &= 2 \left\{ \sum_v (-1)^{\frac{-v+1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} \sin(v\pi v) \right\} \end{aligned}$$

と表される. よって,

$$\vartheta_1(v) = 2 \left\{ \sum_v (-1)^{\frac{v-1}{2}} h^{\frac{v^2}{4}} \sin(v\pi v) \right\} = 2 \{ h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + \cdots \}$$

を得る.

Remark. 13

$\vartheta_1(v)$ は, v, τ に依存しているので,

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v; \tau)$$

と書くこともある.

13.5 ϑ_2 関数, ϑ_3 関数, ϑ_4 関数

$\sigma(u)$ は, 定数 C を用いて,

$$\sigma(u) = C e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

と表された. 同様のことが,

$$\sigma_k(u) = e^{\eta_k u} \frac{\sigma(\omega_k - u)}{\sigma(\omega_k)}, \quad 1 \leq k \leq 3$$

についても成立する.

Proposition. 73 σ_k 関数の, ϑ_1 関数を用いた表示

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は, 定数 C_2, C_2, C_3 を用いて,

$$\begin{cases} \sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) \\ \sigma_2(u) = C_2 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) \\ \sigma_3(u) = C_3 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) \end{cases}$$

と表される.

Proof. 整数 $\forall m, m' \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\hat{\omega} = m\omega_1 + m'\omega_3, \quad \hat{\eta} = m\eta_1 + m'\eta_3$$

とおくと, $\sigma(u)$ の $\vartheta_1(v)$ による表示から,

$$e^{\hat{\eta}u} \frac{\sigma(\hat{\omega} - u)}{\sigma(\hat{\omega})} = \frac{C}{\sigma(\hat{\omega})} e^{\hat{\eta}u + \eta_1 \frac{(\hat{\omega} - u)^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{\hat{\omega} - u}{2\omega_1}\right) \quad (13.3)$$

さらに, Legendre の関係式から,

$$\hat{\eta}\omega_1 - \hat{\omega}\eta_1 = (m\eta_1 + m'\eta_3)\omega_1 - (m\omega_1 + m'\omega_3)\eta_1 = -m' \frac{\pi i}{2} \quad (13.4)$$

(13.4) を (13.3) に用いて,

$$\begin{aligned} \frac{C}{\sigma(\hat{\omega})} e^{\hat{\eta}u} e^{\eta_1 \frac{\hat{\omega}^2 - 2\hat{\omega}u + u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{\hat{\omega} - u}{2\omega_1}\right) &= C e^{\eta_1 \frac{\hat{\omega}^2}{2\omega_1}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} e^{(\omega_1 \hat{\eta} - \hat{\omega} \eta_1) \frac{u}{\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{\hat{\omega} - u}{2\omega_1}\right) \\ &= C_k e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-m'} \vartheta_1\left(\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} \tau - v\right) \end{aligned} \quad (13.5)$$

ただし, $C_k = C \cdot e^{\eta_1 \hat{\omega}^2 / 2\omega_1}$ とし, これは $\hat{\omega}$ の定め方から, m, m' に依存する. ここで, (13.5) に対して,

$$(m, m') = \begin{cases} (1, 0) \\ (1, 1) \\ (0, 1) \end{cases}$$

を代入することで,

$$\begin{cases} \sigma_1(u) = C_1 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) \\ \sigma_2(u) = C_2 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) \\ \sigma_3(u) = C_3 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) \end{cases}$$

を得る.

ここで, $\vartheta_1(1/2 - v), \vartheta_1(1/2 + \tau/2 - v), \vartheta_1(\tau/2 - v)$ は次のように展開されることを用いて, $\vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ を定義する;

$$\begin{aligned}\vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) &= -\vartheta_1\left(v - \frac{1}{2}\right) = -i \sum_n (-1)^n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} (-iz)^{2n-1} = \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} \\ &= 2 \sum_v h^{\frac{v^2}{4}} \cos(v\pi v)\end{aligned}\quad (13.6)$$

また, (13.6) で, v に $v - \tau/2$ を代入すると,

$$z = e^{i\pi v}, \quad \hat{z} = e^{i\pi(v - \frac{\tau}{2})} = e^{i\pi\tau} e^{-\frac{i\pi\tau}{2}} = zh^{-\frac{1}{2}}$$

であるから,

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} h^{-\frac{2n-1}{2}} z^{2n-1} = h^{-\frac{1}{4}} z \sum_n h^{(n-1)^2} z^{2n-2} = h^{-\frac{1}{4}} z \sum_n h^{n^2} z^{2n} \quad (13.7)$$

さらに, (13.7) で, v に $v + 1/2$ を代入すると,

$$z = e^{i\pi v}, \quad \hat{z} = e^{i\pi(v + \frac{1}{2})} = e^{i\pi v} e^{\frac{i\pi}{2}} = iz$$

から,

$$\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = h^{-\frac{1}{4}} iz \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n}$$

と表される. これらを用いて, $\vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ を次のように定義する.

Definition. 35 ϑ_2 関数, ϑ_3 関数, ϑ_0 関数

$$\begin{cases} \vartheta_2(v) = \vartheta_2(v; \tau) := \sum_n h^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} z^{2n-1} = 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \cdots \\ \vartheta_3(v) = \vartheta_3(v; \tau) := \sum_n h^{n^2} z^{2n} = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \cdots \\ \vartheta_0(v) = \vartheta_0(v; \tau) := \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n} = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \cdots \end{cases}$$

Proposition. 74 $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ の, $\vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ による表示

$\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ は, $\vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ を用いて,

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}, \quad \sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}$$

と表される.

Proof. 以下, 順に示す.

1. σ_1 関数

$$\sigma_1(u) = C_1 c^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - v\right) = C_1 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_2(v)$$

と表される. ここで, $\sigma_1(0) = 1 = C_1 \vartheta_2(0)$ から,

$$C_1 = \frac{1}{\vartheta_2(0)}$$

を得る. よって,

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}$$

が成立する.

2. σ_2 関数

$$\begin{aligned} \sigma_2(u) &= C_2 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - v\right) = C_2 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} h^{-\frac{1}{4}} z \vartheta_3(v) \\ &= C_2 h^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_3(v) =: \hat{C}_2 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_3(v) \end{aligned}$$

ここで, $\sigma_2(0) = 1 = \hat{C}_2 \vartheta_3(0)$ から,

$$\hat{C}_2 = \frac{1}{\vartheta_3(0)}$$

を得る. よって,

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}$$

が成立する.

3. σ_3 関数

$$\begin{aligned} \sigma_3(u) &= C_3 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} \vartheta_1\left(\frac{\tau}{2} - v\right) = C_3 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} z^{-1} h^{-\frac{1}{4}} i z \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n} \\ &= C_3 h^{-\frac{1}{4}} i e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_0(v) =: \hat{C}_3 e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_0(v) \end{aligned}$$

ここで, $\sigma_3(0) = 1 = \hat{C}_3 \vartheta_0(0)$ から,

$$\hat{C}_3 = \frac{1}{\vartheta_0(0)}$$

を得る. よって,

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}$$

が成立する.

Proposition. 75 $v = 0$ における展開

$\vartheta_1'(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ は, $v = 0$ において, 次のように展開される.

$$\begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi(h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + \cdots) \\ \vartheta_2 = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + 2h^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ \vartheta_3 = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots \\ \vartheta_0 = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots \end{cases}$$

Proof. 定義において, $v = 0$ を代入することによって得られる.

第 14 章

Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数

14.1 Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数

Definition. 36 Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数

$\forall v, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \quad \forall \tau := r + is \quad (s > 0)$ に対して,

$$\Theta_{\mu,\nu}(v) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i v(n + \frac{\mu}{2}) + i\pi \tau (n + \frac{\mu}{2})^2 + i\pi n \nu}$$

を, Hermite の $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 関数という.

14.2 $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ による, $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ の表示

$\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ は, $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ の特殊な場合である.

Proposition. 76

$\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ は, $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ を用いて,

$$\vartheta_1(v) = -i\Theta_{1,1}(v), \quad \vartheta_2(v) = \Theta_{1,0}(v), \quad \vartheta_3(v) = \Theta_{0,0}(v), \quad \vartheta_0(v) = \Theta_{0,1}(v)$$

と表される.

Proof. 順に示す. $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v)$ に関しては, $n \rightarrow n+1$ を代入して考える.

1. ϑ_1 関数

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v) &= \vartheta_1(v)_{n \rightarrow n+1} = i \sum_n (-1)^{n+1} h^{\left\{\frac{2(n+1)-1}{2}\right\}^2} z^{2(n+1)-1} = i \sum_n (-1)^{n+1} h^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} z^{2n+1} \\ &= -i\Theta_{1,1}(v) \end{aligned}$$

2. ϑ_2 関数

$$\begin{aligned}\vartheta_2(v) &= \vartheta_2(v)_{n \rightarrow n+1} = \sum_n h^{\left\{\frac{2(n+1)-1}{2}\right\}} z^{2(n+1)-1} = \sum_n h^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)} z^{2n+1} \\ &= \Theta_{1,0}(v)\end{aligned}$$

3. ϑ_3 関数

$$\vartheta_3(v) = \sum_n h^{n^2} z^{2n} = \sum_n e^{\pi i n v} h^{\left(\frac{2n+\mu}{2}\right)^2} z^{2n+\mu} = \Theta_{0,0}(v)$$

4. ϑ_0 関数

$$\vartheta_0(v) = \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n} = \sum_n e^{\pi i n v} h^{\left(\frac{2n+\mu}{2}\right)^2} z^{2n+\mu} = \Theta_{0,1}(v)$$

さらに $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ 自身の性質を探る.

Proposition. 77

$\Theta_{\mu,\nu}(v)$ は, μ, ν, v のそれぞれについて整関数, また τ について, 上半平面で正則.

Proof.

$\forall v, \mu, \nu \in \mathbb{C}$: 任意有界閉領域内の複素数

$\forall \tau$: 上半平面の任意有界閉領域内の複素数

に対して, 級数

$$f_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i \left(n+\frac{\mu}{2}\right) + \pi i \tau \left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2 + \pi i n v} \quad g_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \left(-n+\frac{\mu}{2}\right) + \pi i \tau \left(-n+\frac{\mu}{2}\right)^2 - \pi i n v}$$

を調べる. すなわち, $f_{\mu,\nu}(v), g_{\mu,\nu}(v)$ は, v, μ, ν, τ について一様に絶対収束することを示す. さらに,

$$f_{-\mu,-\nu}(-v) = g_{\mu,\nu}(v)$$

であるから, $g_{\mu,\nu}(v)$ の収束を示すには, $f_{\mu,\nu}$ について調べれば十分であることが分かる.

$f_{\mu,\nu}(v)$ を, n に無関係な項 $e^{2\pi i v \left(\frac{\mu}{2}\right) + \pi i \tau \frac{\mu^2}{4}}$ で割り,

$$\frac{f_{\mu,\nu}(v)}{e^{2\pi i v \left(\frac{\mu}{2}\right) + \pi i \tau \frac{\mu^2}{4}}} = \sum_n e^{2\pi i v n + \pi i \tau (n^2 + n\mu) + \pi i n v} = \sum_n e^{\pi i \tau n^2 + \pi i (2v + \tau\mu + v)n} =: \sum_n e^{\pi i \tau n^2 + \pi i A n}$$

を得る. この級数の収束を調べる. $\tau, A \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\tau_1 + i\tau_2 := \tau, \quad A_1 + iA_2 := A \quad (\tau_1, \tau_2, A_1, A_2 \in \mathbb{R}, \tau_2 > 0)$$

とおく. このとき, 仮定から v, μ, ν, τ は有界閉領域内であるから,

$$\exists \tau'_2 := \inf\{\tau_2\}, \quad \exists A'_2 := \inf\{A_2\}$$

よって,

$$\left| e^{\pi i \tau n^2 + \pi i A n} \right| = e^{-\pi \tau_2 n^2 - \pi A_2 n} \leq e^{-\pi \tau'_2 n - \pi A'_2 n}.$$

ここで, $\tau'_2 > 0$ に対して,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \pi\tau'_2 n^2 + \pi A'_2 n > n$$

なので,

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2 + \pi i A n} \leq \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n}.$$

を得る. よって, $\frac{f_{\mu,\nu}(v)}{e^{2\pi i v(\frac{\mu}{2}) + \pi i \tau \frac{\mu^2}{4}}}$ は μ, ν, v, τ に関して, 一様に絶対収束する. 従って, $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ は, μ, ν, v について整関数, かつ τ について上半平面で正則である.

このことと Weierstrass の定理から, $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ は項別微分可能であることが分かる. それに関連した, 次の命題を考える.

Proposition. 78 $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ の満たす偏微分方程式

$\Theta_{\mu,\nu}(v)$ は, 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}}{\partial \tau}$$

を満たす.

Proof. $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ の定義から,

$$\Theta_{\mu,\nu}(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i v(n + \frac{\mu}{2}) + \pi i \tau(n + \frac{\mu}{2})^2 + \pi i n v} \quad (14.1)$$

これを v で微分し,

$$\frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}(v)}{\partial v} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi i \left(n + \frac{\mu}{2}\right) e^{2\pi i v(n + \frac{\mu}{2}) + \pi i \tau(n + \frac{\mu}{2})^2 + \pi i n v}$$

さらにもう一度 v で微分すると,

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}(v)}{\partial v^2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 e^{2\pi i v(n + \frac{\mu}{2}) + \pi i \tau(n + \frac{\mu}{2})^2 + \pi i n v} \quad (14.2)$$

一方, (14.1) を τ で微分すると,

$$\frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}(v)}{\partial \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi i \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 e^{2\pi i v(n + \frac{\mu}{2}) + \pi i \tau(n + \frac{\mu}{2})^2 + \pi i n v} \quad (14.3)$$

よって, (14.2) と (14.3) を比較し, 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 \Theta_{\mu,\nu}}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \Theta_{\mu,\nu}}{\partial \tau}$$

を得る.

Remark. 14

特に $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ も, この偏微分方程式を満たす.

14.3 $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ の満たす関数等式

Proposition. 79

次の関数等式が成立する.

$$\Theta_{\mu,\nu+2}(v) = \Theta_{\mu,\nu}(v), \quad \Theta_{\mu+2,\nu}(v) = e^{-\pi i \nu} \Theta_{\mu,\nu}(v)$$

Proof. 級数

$$\Theta_{\mu,\nu}(v) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu \left(n + \frac{\mu}{2}\right) + \pi i \tau \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 + \pi i n \nu}$$

において, $\nu \rightarrow \nu + 2$ の時, $(e^{\pi i})^2 = 1$ なので, $\Theta_{\mu,\nu}(v)$ は不変. 一方, $\mu \rightarrow \mu + 2$ の時, $n + 1$ を n と見なすと, 全体は $e^{-\pi i \nu}$ 倍される. よって,

$$\Theta_{\mu,\nu+2}(v) = \Theta_{\mu,\nu}(v), \quad \Theta_{\mu+2,\nu}(v) = e^{-\pi i \nu} \Theta_{\mu,\nu}(v)$$

が成立する.

この性質を, より一般的に表示することを考える.

Proposition. 80

次の関数等式が成立する.

$$\Theta_{\mu+\mu',\nu+\nu'}(v) = e^{i\pi\mu'v + i\pi\frac{\mu'^2}{4}\tau - i\pi\frac{\mu\nu'}{2}} \Theta_{\mu,\nu}\left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right)$$

Proof. 指数部分に注目する.

$$\begin{aligned} & 2\pi i \nu \left(n + \frac{\mu + \mu'}{2}\right) + \pi i \tau \left(n + \frac{\mu + \mu'}{2}\right)^2 + \pi i n (\nu + \nu') \\ &= 2\pi i \nu n + \pi i \nu \mu + \pi i \nu \mu' + \pi i \tau n^2 + \pi i \tau n \mu + \pi i \tau n \mu' + \frac{\pi i \tau}{4} \mu^2 \\ & \quad + \frac{\pi i \tau \mu \mu'}{2} + \frac{\pi i \tau \mu'^2}{4} + \pi i n \nu + \pi i n \nu' \\ &= 2\pi i \nu n + \pi i \nu \mu + \pi i n \nu' + \pi i \mu' \tau n + \frac{\pi i \mu \mu' \tau}{2} + \frac{\pi i \nu' \mu}{2} + \pi i \tau n^2 \\ & \quad + \pi i \tau n \mu + \frac{\pi i \tau \mu^2}{4} + \pi i n \nu + \pi i \mu' v + \pi i \frac{\mu'^2}{4} \tau - \pi i \frac{\mu \nu'}{2} \\ &= 2\pi i \left\{ \nu n + \frac{\nu \mu}{2} + \frac{n \nu' + \mu' \tau n}{2} + \frac{(\nu' + \mu' \tau) \mu}{4} \right\} + \pi i \tau \left(n^2 + \mu n + \frac{\mu^2}{4} \right) \\ & \quad + \pi i n \nu + \pi i \mu' v + \pi i \frac{\mu'^2}{4} \tau - \frac{\pi i \mu \nu'}{2} \\ &= 2\pi i \left(v + \frac{\nu' + \mu' \tau}{2} \right) \left(n + \frac{\mu}{2} \right) + \pi i \tau \left(n + \frac{\mu}{2} \right)^2 + \pi i \mu' v + \pi i \frac{\mu'^2}{4} \tau - \pi i \frac{\mu \nu'}{2} \end{aligned}$$

から,

$$\Theta_{\mu+\mu', \nu+\nu'}(v) = e^{i\pi\mu'v + i\pi\frac{\mu'^2}{4}\tau - i\pi\frac{\mu\nu'}{2}} \Theta_{\mu, \nu}\left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right)$$

を得る.

ここで, 得られた関係式について整理しておく.

$$\Theta_{\mu, \nu}\left(v + \frac{\nu' + \mu'\tau}{2}\right) = e^{i\pi\frac{\mu\nu'}{2}} h^{-\frac{\mu'^2}{4}} z^{-\mu'} \Theta_{\mu+\mu', \nu+\nu'}(v) \quad (14.4)$$

$$\vartheta_1(v) = -i\Theta_{1,1}(v), \quad \vartheta_2(v) = \Theta_{1,0}(v), \quad \vartheta_3(v) = \Theta_{0,0}(v), \quad \vartheta_0(v) = \Theta_{0,1}(v) \quad (14.5)$$

$$\Theta_{\mu, \nu+2}(v) = \Theta_{\mu, \nu}(v), \quad \Theta_{\mu+2, \nu}(v) = e^{i\pi\nu} \Theta_{\mu, \nu}(v) \quad (14.6)$$

14.4 ϑ 関数の関数等式と零点

先程得られた Θ 関数の関数等式 (14.4) に $0, 1, 2$ を代入し, (14.5), (14.6) を用いて, 表 14.1 を得る. ただし,

$$m := h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} = e^{-(\frac{i\pi\tau}{4} + i\pi v)}, \quad k := h^{-1} z^{-2} = e^{-(i\pi\tau + 2i\pi v)}$$

とする. 具体的な計算を幾つか, 以下に示しておく.

1. 表の (1, 1) 成分

$(\mu, \nu, \mu', \nu') = (1, 1, 0, 1)$ を代入し,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}} \Theta_{1,2}(v) = e^{\frac{i\pi}{2}} \Theta_{1,0}(v) = i \vartheta_2(v)$$

また, 左辺に関して,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{i} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right)$$

これらの両辺を $-i$ 倍して,

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v)$$

を得る.

2. 表の (1, 2) 成分

$(\mu, \nu, \mu', \nu') = (1, 1, 1, 0)$ を代入し,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \Theta_{2,1}(v) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} e^{\pi i \nu} \Theta_{0,1}(v)|_{\nu=1} = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} e^{\pi i} \vartheta_0(v)$$

また, 左辺に関して,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{1}{i} \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right)$$

	$v + 1/2$	$v + \tau/2$	$v + 1/2 + \tau/2$	$v + 1$	$v + \tau$	$v + 1 + \tau$
ϑ_1	ϑ_2	$im \vartheta_0$	$m \vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-k \vartheta_1$	$k \vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$m \vartheta_3$	$-im \vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$k \vartheta_2$	$-k \vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$m \vartheta_2$	$im \vartheta_1$	ϑ_3	$k \vartheta_3$	$k \vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$im \vartheta_1$	$m \vartheta_2$	ϑ_0	$-k \vartheta_0$	$-k \vartheta_0$

表 14.1 ϑ 関数の関数等式の表

これらの両辺を $-i$ 倍して,

$$\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = -ih^{-\frac{1}{4}}z^{-1} \vartheta_0(v) = ih^{-\frac{1}{4}}z^{-1} \vartheta_0(v)$$

を得る.

3. 表の (1, 3) 成分

$(\mu, \nu, \mu', \nu') = (1, 1, 1, 1)$ を代入し,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \Theta_{2,2}(v) = ih^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \Theta_{2,0}(v) = ih^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \Theta_{0,0}(v)$$

また, 左辺に関して,

$$\Theta_{1,1}\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{1}{i} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)$$

これらの両辺を比較し, $-i$ 倍して,

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \Theta_{0,0}(v) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_3(v)$$

を得る.

同様の計算を 24 回繰り返して, 表 14.1 を得る.

14.5 ϑ 関数の零点と, その零点における z^2 の値

次に, ϑ 関数の零点と, その零点における z^2 の値の表を考える.

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1(v)$$

から, $\vartheta_1(v)$ の零点は, $\sigma(u) = \sigma(2\omega_1 v)$ の零点に等しい. すなわち,

$$v = n + n' \tau, \quad n, n' \in \mathbb{Z}$$

の時, 値は零をとる. また, このとき,

$$z^2 = e^{2\pi i v} = e^{2\pi i(n+n'\tau)} = e^{2n\pi i} e^{2\pi i n'\tau} = h^{2n'}$$

となる. ϑ_2 に関して, 関数等式

$$\vartheta_2\left(v + \frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(v)$$

から, $\vartheta_2(v)$ の零点は,

$$v = n + n'\tau + \frac{1}{2}$$

であり,

$$z^2 = e^{2\pi i(n+n'\tau + \frac{1}{2})} = -h^{2n'}$$

同様に $\vartheta_3(v)$ に関して,

$$\vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_2(v)$$

から, 零点は

$$v = n + n'\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

であり,

$$z^2 = e^{2\pi i(n+n'\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})} = -h^{2n'+1}$$

を得る. $\vartheta_0(v)$ に関して,

$$\vartheta_0\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(v)$$

から,

$$v = n + n'\tau + \frac{\tau}{2}$$

で,

$$z^2 = e^{2\pi i(n+n'\tau + \frac{\tau}{2})} = h^{2n'+1}$$

となる. これらをまとめて, 表 14.2 を得る.

14.6 e_1, e_2, e_3 と Δ の ϑ 関数の零における値による表示

関係式

$$\sqrt{\wp(u) - e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_{k+1} \vartheta_1(v)}, \quad (1 \leq k \leq 3)$$

において,

$$u = \omega_1 \Rightarrow v = \frac{1}{2}, \quad u = \omega_1 + \omega_3 \Rightarrow v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

	v	$z^2 = e^{2\pi i v}$
ϑ_1	$n + n'\tau$	$h^{2n'}$
ϑ_2	$n + n'\tau + \frac{1}{2}$	$-h^{2n'}$
ϑ_3	$n + n'\tau + \frac{1}{2}$	$-h^{2n'+1}$
ϑ_0	$n + n'\tau + \frac{\tau}{2}$	$h^{2n'+1}$

表 14.2 ϑ 関数の零点に関する表

であるから,

$$\begin{cases} \sqrt{e_1 - e_k} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_{k+1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)} & k = 2, 3 \\ \sqrt{e_2 - e_k} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_{k+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_{k+1} \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)} & k = 3 \end{cases}$$

ここで, 関数等式の表の (3, 1) 成分における関係式 $\vartheta_3(v + 1/2) = \vartheta_0(v)$ から, ϑ 関数の $v = 0$ における値で $\vartheta_3(1/2)$ が表される.

$$\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_0, \quad \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2$$

同様に,

$$\vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_3, \quad \vartheta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_2, \quad \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = h^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_3$$

を得る. これらを用いて, ϑ 関数の $v = 0$ での値による, 次の表示を得る.

$$\begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_3 \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0}{\vartheta_3 \vartheta_2} \\ \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_0 \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_3}{\vartheta_0 \vartheta_2} \\ \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_0 \vartheta_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_2}{\vartheta_0 \vartheta_3} \end{cases}$$

これらは, 上半平面の複素数 τ に関する 1 価関数であることに注意しておく.

14.7 諸定数に関する計算と表示

$\vartheta_1(v)$ は奇関数であることと, $v = 0$ における Laurent 展開を考える.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\wp(u) - e_k} &= \sqrt{\wp(2\omega_1 v) - e_k} \\
 &= \frac{1}{2\omega_1} \frac{1 + \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} \frac{v^2}{2!} + \cdots}{v + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \frac{v^3}{3!} + \cdots} = \frac{1}{2\omega_1 v} \frac{1 + \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} \frac{v^2}{2!} + \cdots}{\left(1 + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \frac{v^2}{3!} + \cdots\right)} \\
 &= \frac{1}{2\omega_1 v} \left(1 + \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} \frac{v^2}{2} + \cdots\right) \left(1 + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \frac{v^2}{6} + \cdots\right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{2\omega_1 v} \left\{ \left(1 + \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} \frac{v^2}{2} + \cdots\right) \left(1 - \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \frac{v^2}{6} - \cdots\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\omega_1 v} \left\{ 1 + \left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \right) \frac{v^2}{2} + \cdots \right\}
 \end{aligned}$$

このとき, $\wp(2\omega_1 v) = \wp(u)$ の, $v = 0$ での Laurent 展開における定数項は存在しないことから (上の式の), 平方の定数項が $-e_k$ であることが分かる. すなわち,

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \right) \frac{v^2}{2} + \cdots \right\}^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \right) v^2 + \cdots \right\}$$

から, $\frac{1}{4\omega_1^2 v^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} \right) v^2 + \cdots \right\}$ の定数項の比較により,

$$\frac{1}{4\omega_1^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta''_{k+1}}{\vartheta_{k+1}} \right) = e_k$$

と計算できる. 一方, 微分方程式から導かれる関係式 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ から,

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{4\omega_1^2} \left\{ \left(\frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right) + \left(\frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} \right) + \left(\frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \right) \right\} = 0$$

従って,

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} \quad (14.7)$$

を得る. さらに, ϑ 関数の満たす偏微分方程式から,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_k(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_k(v)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^3 \vartheta_k(v)}{\partial v^3} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_k(v)}{\partial v \partial \tau}$$

であり, ここに $v = 0$ を代入し,

$$\vartheta_k'' = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_k}{\partial \tau}, \quad \vartheta_1''' = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau} \quad (14.8)$$

(14.8) を (14.7) に用いて, さらに両辺を $4\pi i$ で割って,

$$\frac{1}{\vartheta_1'} \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau} = \frac{1}{\vartheta_2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_3} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_0} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \tau}$$

この両辺を τ について積分すると, C を τ に無関係な定数として,

$$\vartheta_1' = C \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0$$

と表される. 次に, この C を求める. $v = 0$ におけるそれぞれの展開式から,

$$2\pi(h^{\frac{1}{4}-\cdots}) = C(2h^{\frac{1}{4}} + \cdots)(1 + \cdots)(1 + \cdots)$$

で, 係数を比較して, $C = \pi$ を得る. よって, ϑ_1' の $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_0$ による表示は

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0$$

となる. この表示式から,

$$\begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0}{\vartheta_3 \vartheta_2} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_0^2 \\ \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_3}{\vartheta_0 \vartheta_2} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_3^2 \\ \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_2}{\vartheta_0 \vartheta_3} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_2^2 \end{cases}$$

と表されることも分かる. また, これらを掛け合わせるによって, 判別式の表示

$$\sqrt[4]{\Delta} = 2 \left(\frac{\pi}{2\omega_1} \right)^3 \vartheta_0^2 \vartheta_3^2 \vartheta_2^2 = \frac{\pi}{4\omega_1^3} \vartheta_1'^2$$

を得る. 関係式

$$\frac{1}{4\omega_1^2} \left(\frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_{k+1}''}{\vartheta_{k+1}} \right) = e_k$$

および偏微分方程式から,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\pi i}{\omega_1^2} \left(\frac{1}{3} \frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_2}{d\tau} \right), e_2 = \frac{\pi i}{\omega_1^2} \left(\frac{1}{3} \frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_3}{d\tau} \right), \\ e_3 &= \frac{\pi i}{\omega_1^2} \left(\frac{1}{3} \frac{d \log \vartheta_1'}{d\tau} - \frac{d \log \vartheta_0}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

なる関係式も得られる.

14.8 ϑ 関数の無限積表示

ϑ 関数の無限積表示を考える.

まず, $\vartheta_3(v) = \sum h^{n^2} z^{2n}$ は, $z^2 = e^{2\pi i v}$ の関数として $z \neq 0$ となる $\forall z \in \mathbb{C}$ で正則である. このとき, 点列として $\vartheta_3(v)$ の零点における, z^2 の値の集積点を考える. 零点の表から, $v = n + n'\tau + 1/2 + \tau/2$ において,

$$e^{2\pi i(n+n'\tau+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})} = e^{(2n+1)\pi i} e^{(2n'+1)\tau\pi i} = -1 \cdot h^{2n'+1}$$

であるから, 以下の点列を得る. すなわち $n' < 0$ の時,

$$z^2 = -h^{-1}, -h^{-3}, -h^{-5}, \dots \quad (14.9)$$

$n' \geq 0$ の時,

$$z^2 = -h, -h^3, -h^5, \dots \quad (14.10)$$

いずれの点列に関しても, $|h| < 1$ であることを用いて, (14.9) の集積点は $z^2 = \infty$, (14.10) の集積点は $z^2 = 0$ であることが分かる. この点列に関して, 次のような関数 f_1, f_2 を考える.

$$f_1 = (1 + hz^2)(1 + h^3z^2)(1 + h^5z^2) \dots$$

これは, 点列 (14.9) の点を零点とする z^2 の整関数であり,

$$f_2 = (1 + hz^{-2})(1 + h^3z^{-2})(1 + h^5z^{-2}) \dots$$

は, $-h^{-1}, -h^{-3}, \dots$ を零点とする z^{-2} の整関数である. 特に, f_2 を z^2 の関数とみなすと, $0, \infty$ 以外の点で正則, かつ, 点列 (14.10) の点を零点として持つ. ここで, $\vartheta_3(v)$ と比較を行うための, 次の関数を考える.

$$f(v) := f_1 f_2 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + h^{2n-1}z^2)(1 + h^{2n-1}z^{-2}) = \prod_v (1 + h^v z^2)(1 + h^v z^{-2})$$

このとき, 関数の構成の仕方から, $f(v)$ は v の関数として整関数, かつ $\vartheta_3(v)$ と同じ零点を持つ. $f(v)$ についての性質を調べることにする.

Proposition. 81 $f(v)$ の擬周期性

以下が成立する.

$$f(v+1) = f(v), \quad f(v+\tau) = h^{-1}z^{-2}f(v).$$

よって, 関数等式の表から, $\vartheta_3(v)/f(v)$ は $1, \tau$ を周期とする整関数であるが, Liouville の第 2 定理から, これは定数であることが分かる. すなわち, C を v に無関係な定数として, $\vartheta_3(v)$ は,

$$\vartheta_3(v) = C \prod_v (1 + h^v z^2)(1 + h^v z^{-2})$$

と表される. この表記から, $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ についての, 以下の表現を得る.

Proposition. 82 $\vartheta_1(v), \vartheta_2(v), \vartheta_3(v), \vartheta_0(v)$ は, 次のように表される.

$$\begin{cases} \vartheta_1(v) = Ch^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{i} \prod (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2}) \\ \vartheta_2(v) = Ch^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_8 (1 + h^g z^2)(1 + h^g z^{-2}) \\ \vartheta_3(v) = C \prod_v (1 + h^v z^2)(1 + h^v z^{-2}) \\ \vartheta_0(v) = C \prod_v (1 - h^v z^2)(1 - h^v z^{-2}) \end{cases}$$

Proof. 関数等式の表を用いる.

1. ϑ_0 関数

$$\begin{aligned}\vartheta_0(v) &= \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) = C \prod_v \left(1 + h^v e^{2\pi i(v+\frac{1}{2})}\right) \left(1 + h^v e^{-2\pi i(v+\frac{1}{2})}\right) \\ &= C \prod_v \left(1 + h^v e^{2\pi i v} e^{\pi i}\right) \left(1 + h^v e^{-2\pi i v} e^{-\pi i}\right) = C \prod_v (1 - h^v z^2)(1 - h^v z^{-2})\end{aligned}$$

2. ϑ_2 関数

$$\begin{aligned}\vartheta_2(v) &= \frac{1}{m} \vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = h^{\frac{1}{4}} z C \prod_v \left(1 + h^v e^{2\pi i(v+\frac{\tau}{2})}\right) \left(1 + h^v e^{-2\pi i(v+\frac{\tau}{2})}\right) \\ &= h^{\frac{1}{4}} z C \prod_v (1 + h^{v+1} z^2)(1 + h^{v-1} z^{-2}) = h^{\frac{1}{4}} z C (1 + z^{-2}) \prod_g (1 + h^g z^2)(1 + h^g z^{-2}) \\ &= Ch^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_g (1 + h^g z^2)(1 + h^g z^{-2})\end{aligned}$$

3. ϑ_1 関数

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v) &= -\vartheta_2\left(v + \frac{1}{2}\right) = -Ch^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_g \left(1 + h^g e^{2\pi i(v+\frac{1}{2})}\right) \left(1 + h^g e^{-2\pi i(v+\frac{1}{2})}\right) \\ &= -Ch^{\frac{1}{4}} \left(e^{\pi i(v+\frac{1}{2})+e^{-\pi i(v+\frac{1}{2})}}\right) \prod_g (1 - h^g e^{2\pi i v} e^{\pi i})(1 - h^g e^{-2\pi i v} e^{-\pi i}) \\ &= -Ch^{\frac{1}{4}} (ie^{\pi i v} + (-i)e^{-\pi i v}) \prod_g (1 - h^g e^{2\pi i v})(1 - h^g e^{-2\pi i v}) \\ &= -iCh^{\frac{1}{4}} (z - z^{-1}) \prod_g (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2}) = Ch^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{i} \prod_g (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2}).\end{aligned}$$

さらに, 定数 C を求めることが出来る.

Proposition. 83

定数 C は,

$$C = \prod_g (1 - h^g)$$

と表される.

Proof. 先程の表記で, $v = 0$ を代入する (ただし, $\vartheta_1(v)$ については v による微分を考える).

$$\begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi Ch^{\frac{1}{4}} \prod_g (1 - h^g)^2 \\ \vartheta_2 = 2Ch^{\frac{1}{4}} \prod_g (1 + h^g)^2 \\ \vartheta_3 = C \prod_v (1 + h^v)^2 \\ \vartheta_0 = C \prod_v (1 - h^v)^2 \end{cases}$$

これらに対して, 関係式

$$\vartheta_1' = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0$$

を用いると,

$$2\pi Ch^{\frac{1}{4}} \prod_g (1 - h^g)^2 = \pi \left(2Ch^{\frac{1}{4}} \prod_g (1 + h^g)^2 \right) \left(C \prod_v (1 + h^v)^2 \right) \left(C \prod_v (1 - h^v)^2 \right)$$

すなわち,

$$\prod_g (1 - h^g)^2 = C^2 \prod_g (1 + h^g)^2 \prod_v (1 - h^{2v})^2 \quad (14.11)$$

一方, $\{g\} = \{2g\} \cup \{2v\}$ であるから,

$$\prod_g (1 - h^g)^2 = \prod_g (1 - h^{2g})^2 \prod_v (1 - h^{2v})^2 \quad (14.12)$$

よって (14.11), (14.12) から,

$$C^2 \prod_g (1 + h^g)^2 = \prod_g (1 - h^{2g})^2 = \prod_g (1 + h^g)^2 (1 - h^g)^2$$

さらに, $\vartheta_3|_{h=0} = 1 = C$. から,

$$C^2 = \prod_g (1 - h^g)^2$$

すなわち,

$$C = \prod_g (1 - h^g)$$

を得る.

Corollary. 15 ϑ 関数の無限積表示は, 以下のようになる.

$$\begin{cases} \vartheta_1(v) = 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_g (1 - h^g) \prod_g (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2}) \\ \vartheta_2(v) = 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \prod_g (1 - h^g) \prod_g (1 + h^g z^2)(1 + h^g z^{-2}) \\ \vartheta_3(v) = \prod_g (1 - h^g) \prod_v (1 + h^v z^2)(1 + h^v z^{-2}) \\ \vartheta_0(v) = \prod_g (1 - h^g) \prod_v (1 - h^v z^2)(1 - h^v z^{-2}) \end{cases}$$

さらに, 以下も得られる.

Corollary. 16

$$\vartheta_1' = 2\pi h^{\frac{1}{4}} \prod_g (1 - h^g)^3$$

Corollary. 17 判別式の表示

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} h^2 \prod_g (1 - h^g)^{24}$$

これにより, 1 次独立な周期を選ぶことで $\Delta \neq 0 (e_i \neq e_j, 1 \leq i, j \leq 3)$ を満たすことが確認できる.

14.9 $\zeta(u)$ の z^2 の関数としての展開と η_1, g_2, g_3 の表現

Proposition. 84 $\zeta(u)$ の部分分数展開

$\zeta(u) - \eta_1 u / \omega_1$ を, $z^2 = e^{\pi i u / \omega_1}$ の関数とみなした時の部分分数展開は,

$$\zeta(u) - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} = \frac{\pi i}{2\omega_1} \frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_g \left(\frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right)$$

と表される.

Proof. $\sigma(u)$ の対数微分を考える.

$$\sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \vartheta_1(v), \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$$

から,

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1} \frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v). \quad (14.13)$$

ここで, $\vartheta_1(v)$ の無限式表示

$$\vartheta_1(v) = Ch^{\frac{1}{4}} \frac{z - z^{-1}}{i} \prod_g (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2})$$

から,

$$\log \vartheta_1(v) = \log Ch^{\frac{1}{4}} + \log(z - z^{-1}) - \log i + \sum_g \log(1 - h^g z^2) + \sum_g \log(1 - h^g z^{-2})$$

よって,

$$\frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v) = \frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} \pi i + \pi i \left(2 \sum_g \frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - 2 \sum_g \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right)$$

これを (14.13) に用いて,

$$\begin{aligned}\zeta(u) &= \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi i}{2\omega_1} \left[\frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} + 2 \left\{ \sum_g \left(\frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi i}{2\omega_1} \frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_g \left(\frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right)\end{aligned}$$

を得る.

Corollary. 18 ここで,

$$i \frac{z + z^{-1}}{z - z^{-1}} = i \frac{e^{\pi i v} + e^{-\pi i v}}{e^{\pi i v} - e^{-\pi i v}} = \frac{1}{\tan \pi v}$$

を用いると, 次のように表される.

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{1}{\tan \pi v} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_g \left(\frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right)$$

次に, 上記の級数

$$S_1 := \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2}, \quad S_2 := \frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}}$$

の収束, 発散を考える.

Proposition. 85

$S_i (i = 1, 2)$ は, $1 - h^g z^2 = 0, 1 - h^g z^{-2} = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ を含まない有界閉領域で, 一様に絶対収束する.

Proof. S_1 について示す.

B : 有界閉領域 (ただし, $1 - h^g z^2 = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ を含まない)

$M := \max\{|z|^2 | z \in B\}$ とすると, $|h| < 1$ から, 十分大きな g に対して,

$$\exists M' (M, |h|) > 0. \quad \text{s.t.} \quad \left| \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right| \leq \frac{M|h|^g}{1 - M|h|^g} < M'|h|^g.$$

ここで, $\sum_g M'|h|^g$ は収束するので, S_1 は B で一様に絶対収束する (S_2 については, まったく同様に下から評価され, 成立が確認できる).

Proposition. 86

特に, $\zeta(u)$ は,

$$\tau := \tau_1 + i\tau_2, \quad v = v_1 + iv_2$$

に対して, $-\tau_2 < v_2 < \tau_2$ の時, 次のように展開される.

$$\zeta(u) = \zeta(2\omega_1 v) = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{1}{\tan \pi v} + \frac{2\pi i}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{h^{2r}}{1 - h^{2r}} \sin(2\pi r v) \right)$$

Proof. 仮定から,

$$-\tau_2 < v_2 < \tau_2 \Rightarrow -\tau_2 < -v_2 < \tau_2.$$

このとき, v 平面上で,

$$|e^{2\pi i\tau}| < |e^{2\pi iv}| < |e^{-2\pi i\tau}| \Leftrightarrow |h^2| < |z^2| < |h^{-2}|$$

が成立する. 正の整数 g に対して,

$$|h^g z^{-2}| < 1, \quad |h^g z^2| < 1$$

なので, r を正の整数として次のように展開される.

$$\begin{aligned} \zeta(u) &= \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1 \tan \pi v} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_g \left(\frac{h^g z^{-2}}{1 - h^g z^{-2}} - \frac{h^g z^2}{1 - h^g z^2} \right) \\ &= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1 \tan \pi v} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_g \sum_r (h^{rg} z^{-2r} - h^{rg} z^{2r}) \\ &= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1 \tan \pi v} + \frac{\pi i}{\omega_1} \sum_r \frac{h^{2r}}{1 - h^{2r}} (z^{-2r} - z^{2r}) \quad (\text{等比級数と見なす}) \end{aligned}$$

よって,

$$\zeta(u) = \zeta(2\omega_1 v) = 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1 \tan \pi v} + \frac{2\pi i}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{h^{2r}}{1 - h^{2r}} \sin(2\pi r v) \right)$$

を得る.

これらの関係式と, $v = 0$ における Laurent 展開から, 次の表示を得る.

Proposition. 87 η_1, g_2, g_3 の表現

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{\pi^2}{\omega_1} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r h^{2r}}{1 - h^{2r}} \right) \\ g_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^3 h^{2r}}{1 - h^{2r}} \right) \\ g_3 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^5 h^{2r}}{1 - h^{2r}} \right) \end{cases}$$

Proof. $\zeta(2\omega_1 v)$ の $v = 0$ 近傍における展開は,

$$\zeta(2\omega_1 v) = -\frac{g_2}{60} (2\omega_1 v)^3 - \frac{g_3}{140} (2\omega_1 v)^5 - \dots$$

によって得られる. また,

$$\frac{1}{\tan \pi v} = \frac{1}{\pi v} - \frac{\pi v}{3} - \frac{(\pi v)^3}{45} - \frac{2(\pi v)^5}{45 \cdot 21} - \dots$$

を先程の展開式に用いると,

$$\begin{aligned}\zeta(2\omega_1 v) &= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \left(\frac{1}{\pi v} - \frac{\pi v}{3} - \frac{(\pi v)^3}{45} - \frac{2(\pi v)^5}{45 \cdot 21} - \dots \right) + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^{2r}}{1-h^{2r}} \sin(2r\pi v) \\ &= 2\eta_1 v + \frac{\pi}{2\omega_1} \left(\frac{1}{\pi v} - \frac{\pi v}{3} - \frac{(\pi v)^3}{45} - \frac{2(\pi v)^5}{45 \cdot 21} - \dots \right) + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^{2r}}{1-h^{2r}} \left(2r\pi v - \frac{(2r\pi v)^3}{3!} + \frac{(2r\pi v)^5}{5!} \right)\end{aligned}$$

を得る. この各項について, 係数比較を行う.

1. v の項

$$2\eta_1 v - \frac{\pi^2 v}{6\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2rh^{2r}}{1-h^{2r}} \pi v = 0$$

から,

$$2\eta_1 v = \left(\frac{\pi^2}{6\omega_1} - 4 \frac{\pi^2}{\omega_1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{rh^{2r}}{1-h^{2r}} \right) v$$

両辺を $2v$ で割り,

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{\omega_1} \left(\frac{1}{12} - 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{rh^{2r}}{1-h^{2r}} \right)$$

を得る.

2. v^3 の項

$$-\frac{g_2}{60} (2\omega_1 v)^3 = -\frac{\pi}{2\omega_1} \frac{(\pi v)^3}{45} - \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{(2\pi)^3}{3!} \sum_r \frac{r^3 h^{2r}}{1-h^{2r}} v^3$$

から,

$$\frac{g_2}{60} = \frac{\pi}{(2\omega_1)^4} \frac{\pi^3}{45} + \frac{2\pi^4}{\omega_1^4} \frac{1}{3!} \sum_r \frac{r^3 h^{2r}}{1-h^{2r}}$$

両辺を 60 倍し,

$$g_2 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^4 \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_r \frac{r^3 h^{2r}}{1-h^{2r}} \right)$$

を得る.

3. v^5 の項

$$-\frac{g_3}{140} (2\omega_1 v)^5 = -\frac{\pi}{2\omega_1} \frac{2(\pi v)^5}{45 \cdot 21} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_r \frac{r^5 h^{2r}}{1-h^{2r}}$$

から, 両辺を g_3 について整理し,

$$g_3 = \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^6 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^5 h^{2r}}{1-h^{2r}} \right)$$

を得る.

第 15 章

Jacobi の楕円関数との関係

15.1 Jacobi の楕円関数と, 諸定数の表示

Jacobi の楕円関数を, ϑ 関数を用いて表現することによって, 関数等式や加法定理を導く.
まず, $e_i - e_j (1 \leq i, j \leq 3)$ の表示について触れておく.

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1} \right)^2 \vartheta_0^4, \quad e_1 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1} \right)^2 \vartheta_3^4, \quad e_2 - e_3 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1} \right)^2 \vartheta_2^4$$

において, 特に表示の都合上,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2 = \frac{\pi}{2} (1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots)^2$$

となるように ω_1 を選んでおく (無論, 一般の ω_1 でも成立している). このとき,

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \right)^4, \quad e_1 - e_3 = 1, \quad e_2 - e_3 = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \right)^4$$

を満たす. 以下, この条件の下で $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ を表示する (ただし, $g = \sqrt{e_1 - e_3} = 1$).

Theorem. 16 Jacobi の楕円関数の表示

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} u = \frac{g \sigma \left(\frac{u}{g} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{u}{g} \right)} = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'} \vartheta_1(v)}{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}} = 2\omega_1 \frac{\vartheta_0 \vartheta_1(v)}{\vartheta_1' \vartheta_0(v)} \\ \operatorname{cn} u = \frac{g \sigma_1 \left(\frac{u}{g} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{u}{g} \right)} = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2}}{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}} = \frac{\vartheta_0 \vartheta_2(v)}{\vartheta_2 \vartheta_0(v)} \\ \operatorname{dn} u = \frac{g \sigma_2 \left(\frac{u}{g} \right)}{\sigma_3 \left(\frac{u}{g} \right)} = \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3}}{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0}} = \frac{\vartheta_0 \vartheta_3(v)}{\vartheta_3 \vartheta_0(v)} \end{array} \right.$$

さらに, 母数, 補母数を用いた $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ の表示を求める.

Theorem. 17 母数, 補母数の表示

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\vartheta_1' \vartheta_2}{\vartheta_0 \vartheta_3} = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} \\ k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{2\omega_1}{1} \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{\vartheta_1' \vartheta_0} = \frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2} \end{cases}$$

さらに, $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2$ から, 次の関係が成り立つ.

$$2\omega_1 = \pi \vartheta_3^2, 2\omega_3 = 2\omega_1 \tau = \pi \vartheta_3^2 \tau$$

また, 平方根に関して

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}$$

と定めておくと,

$$2\omega_1 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'} = \pi \vartheta_3^2 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'} = \frac{\pi \vartheta_3^2 \vartheta_0}{\pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_0} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

から, 母数, 補母数を用いた Jacobi の楕円関数の表記は, 以下のようになる.

Corollary. 19 $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ の表示

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}, \quad \operatorname{dn}(u) = \sqrt{k} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}$$

15.2 Jacobi の楕円関数の満たす関数等式

Theorem. 18 Jacobi の楕円関数の満たす関数等式

ϑ 関数の関数等式の表から, $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ に関する関数等式の表 15.1 を得る.

Remark. 15

この表から, $\operatorname{sn} u$ は $4\omega_1, 2\omega_3$ を, $\operatorname{cn} u$ は $4\omega_1, 2\omega_1 + 2\omega_3$ を, $\operatorname{dn} u$ は $2\omega_1, 4\omega_3$ を周期として
いることが確認できる.

	$u + \omega_1$	$u + \omega_3$	$u + \omega_1 + \omega_3$	$u + 2\omega_1$	$u + 2\omega_3$	$u + 2\omega_1 + 2\omega_3$
sn	$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{1}{\operatorname{sn} u}$	$\frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{sn} u$	$\operatorname{sn} u$	$-\operatorname{sn} u$
cn	$-k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$-\frac{i}{k} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$	$-i \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} u}$	$-\operatorname{cn} u$	$-\operatorname{cn} u$	$\operatorname{cn} u$
dn	$k' \frac{1}{\operatorname{dn} u}$	$-i \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$	$ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$	$\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$	$-\operatorname{dn} u$

表 15.1 Jacobi の楕円関数の関数等式の表

15.3 $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ に関する加法定理

Theorem. 19 $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ に関する加法定理

以下が成立する.

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \end{cases}$$

Proof. $\wp$ 関数の加法定理の時と同様に, $\forall v \in \mathbb{C}$ を,

$$\begin{cases} v \not\equiv \pm\omega_1 & (2\omega_1, 2\omega_3) \\ v \not\equiv \pm(\omega_1 + \omega_3) & (2\omega_1, 2\omega_3) \\ v \not\equiv \pm\omega_3 & (2\omega_1, 2\omega_3) \end{cases}$$

ととり, 固定する. このとき, 以下の関数

$$\begin{cases} \varphi_1(u) := \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) \\ \varphi_2(u) := \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) \\ \varphi_3(u) := \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) \end{cases}$$

は, 周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ を持ち, 周期から定まる平行四辺形内に極

$$u \equiv \omega_1, \quad u \equiv -v + \omega_3 \quad (2\omega_1, 2\omega_3)$$

を持つ. したがって, $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \varphi_3(u)$ は, 周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ を持つ 2 位楕円関数で, 等しい極を持つ. このとき, Laurent 展開を考えると, $\varphi_2(u) + A\varphi_1(u), \varphi_3(u) + B\varphi_1(u)$ が極を持たないような定数 A, B が存在する. よって, Liouville の第 2 定理から, 2 重周期性と合わせて, $\varphi_2(u) + A\varphi_1(u), \varphi_3(u) + B\varphi_1(u)$ は定数であることが分かる. ここで A_1, B_1 を, u に無関係な定数として,

$$\begin{cases} A_1 := \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) + A \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) \\ B := \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) + B \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) \end{cases} \quad (15.1)$$

とおく.(15.1) で $u = 0$ とすると,

$$\begin{cases} A_1 = \operatorname{cn} v \\ B_1 = \operatorname{dn} v \end{cases} \quad (15.2)$$

また,(15.1) の u による微分を考えて,

$$\begin{cases} -\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn} u - \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{cn} u \\ +A(\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v)) = 0 \\ -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn}(u+v) - k^2 \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn} u \\ +B(\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{sn} u) = 0. \end{cases}$$

ここに $u = 0$ を代入し,

$$\begin{cases} -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v + A \operatorname{sn} v = 0 \\ -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v + B \operatorname{sn} v = 0 \end{cases}$$

A, B について解くと,

$$A = \operatorname{dn} v, \quad B = k^2 \operatorname{cn} v$$

を得る. これを (15.1) に用いて,

$$\begin{cases} \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{cn} v \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn}(u+v) + k^2 \operatorname{cn} v \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+v) = \operatorname{dn} v \end{cases} \quad (15.3)$$

さらに $u \rightarrow -u, v \rightarrow u+v$ を代入し, $\operatorname{sn} u$ は奇関数, $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ は偶関数であることと合わせて, 連立方程式

$$\begin{cases} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \operatorname{cn}(u+v) \\ \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \operatorname{dn}(u+v) \end{cases}$$

を得る. これを $\operatorname{cn}(u+v), \operatorname{dn}(u+v)$ について解くと,

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \quad \operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

を得る. sn 関数に関しても, 同様の連立方程式を解くことにより,

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

を得る.

15.4 $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ の極限としての三角関数

$\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ は, ϑ 関数を用いた表記により, u, τ の関数として

$$\begin{cases} \operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3 \vartheta_1(v)}{\vartheta_2 \vartheta_0(v)} = \frac{1+2h+\cdots}{2(h^{\frac{1}{4}}+h^{\frac{9}{4}}+\cdots)} \frac{2(h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - \cdots)}{1-2h \cos 2\pi v + \cdots} \\ \operatorname{cn} u = \frac{\vartheta_0 \vartheta_2(v)}{\vartheta_2 \vartheta_0(v)} = \frac{1-2h+\cdots}{2(h^{\frac{1}{4}}+\cdots)} \frac{2(h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + \cdots)}{1-2h \cos 2\pi v + \cdots} \\ \operatorname{dn} u = \frac{\vartheta_0 \vartheta_3(v)}{\vartheta_2 \vartheta_0(v)} = \frac{1-2h+\cdots}{1+2h+\cdots} \frac{1+2h \cos 2\pi v + \cdots}{1-2h \cos 2\pi v + \cdots} \end{cases}$$

と表される. このとき, 以下が成立する.

Proposition. 88 $\tau := r + is$ とおくと,

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{sn} u = \sin u \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{cn} u = \cos u \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{dn} u = 1 \end{cases}$$

Proof. 定め方から, r を固定し $s \rightarrow \infty$ とすると,

$$s \rightarrow \infty \Rightarrow h = e^{\pi i \tau} \rightarrow 0$$

このとき,

$$\vartheta_3 = 1 + 2h + 2h^4 + \cdots \rightarrow 1$$

また, $2\omega_1 = \pi \vartheta_3^2$ から, $2\omega_1 \rightarrow \pi$. よって,

$$\pi v = \pi \frac{u}{2\omega_1} = \pi \frac{u}{\pi \vartheta_3^2} \rightarrow u.$$

これらを $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ の ϑ 関数による表現に対して用いて,

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{sn} u = \sin u \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{cn} u = \cos u \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{dn} u = 1 \end{cases}$$

を得る.

Corollary. 20 さらに,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} k = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{2(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + \cdots)}{1 + 2h + \cdots} \right)^2 \rightarrow 0.$$

から, これらを加法公式に対して用いることで, 三角関数の加法公式

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

等を得る.

第 16 章

Graphics gallery as "coda"

ここでは, 登場した関数を Mathematica で図示する. 複素関数なのでそのままの形を表現することは出来ないが, 「実部, 虚部を取り出す」または「絶対値, 偏角を取り出す」という操作によって視覚化することで, その性質を垣間見ることが出来る.

16.1 Weierstrass の $\wp$ 関数

まず, Weierstrass の $\wp$ 関数と, それに関係する関数についての図示を行う. これらの関数に対して, 「絶対値, 偏角を取り出す」操作を行うと, 絶対値の図では極の付近における断面は円になり, 偏角の図は (周期性に依存する何らかの性質が見て取れるものの), 複雑な構造を持っていることが分かる. 一方で, 「実部, 虚部を取り出す」操作を行うと, ほぼ同じ形の図が得られる. このとき, 各図の極付近において「極の位数」に「突起の個数」が対応していることに注意しておく.

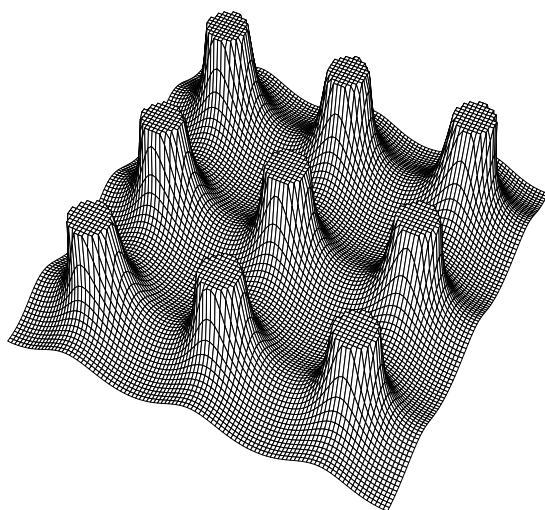


図 16.1 $\wp$ 関数の絶対値

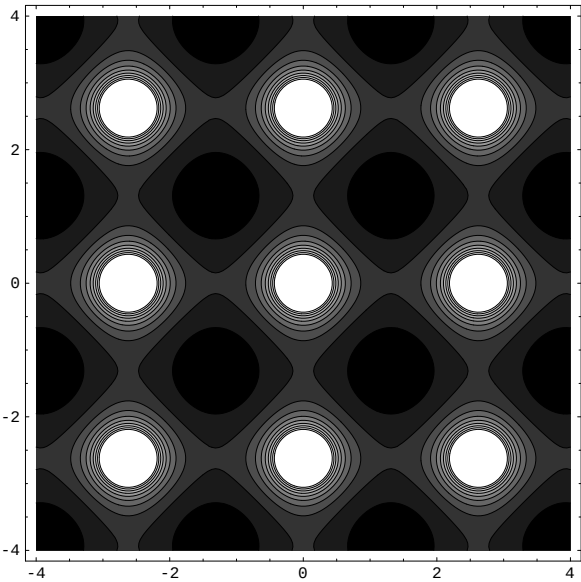


図 16.2 φ 関数の絶対値の等高線

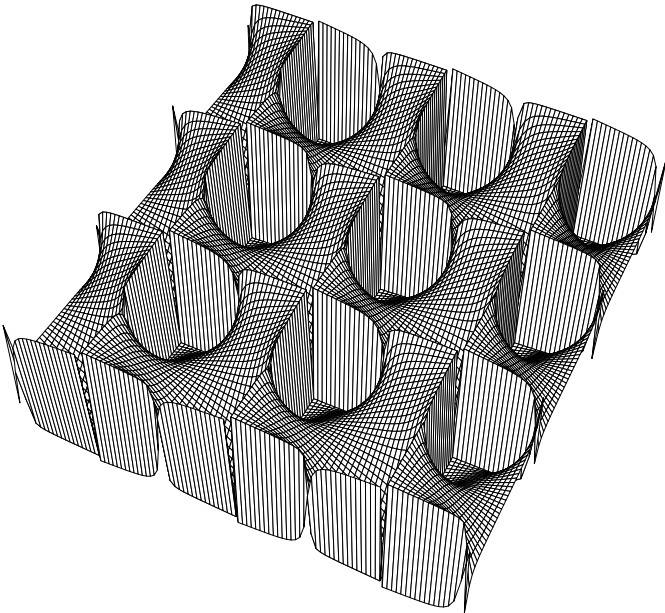


図 16.3 φ 関数の偏角

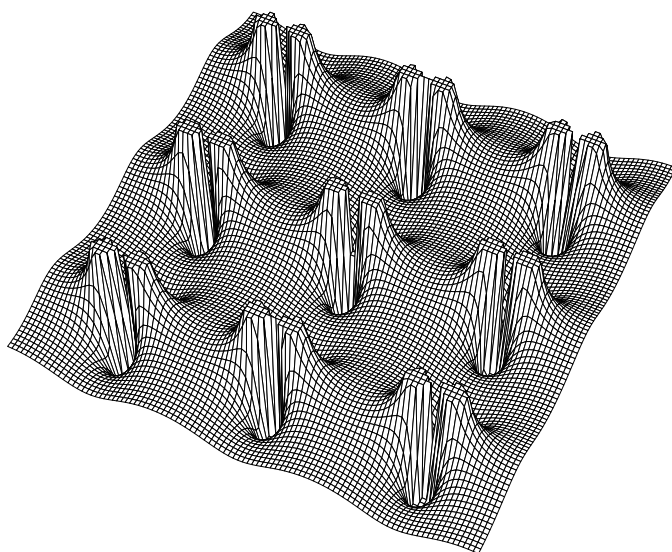


図 16.4 $\wp$ 関数の実部

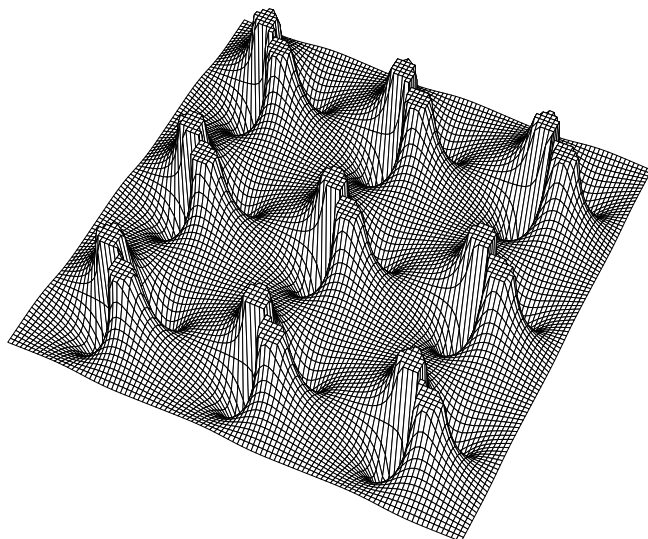


図 16.5 $\wp$ 関数の虚部

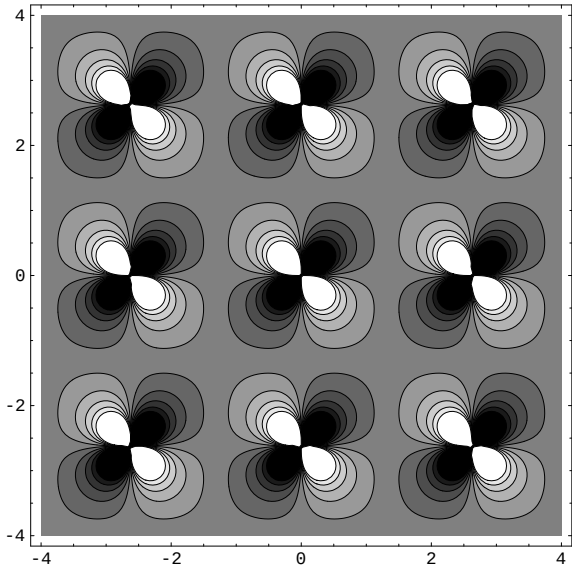


図 16.6 ϕ 関数の実部の等高線

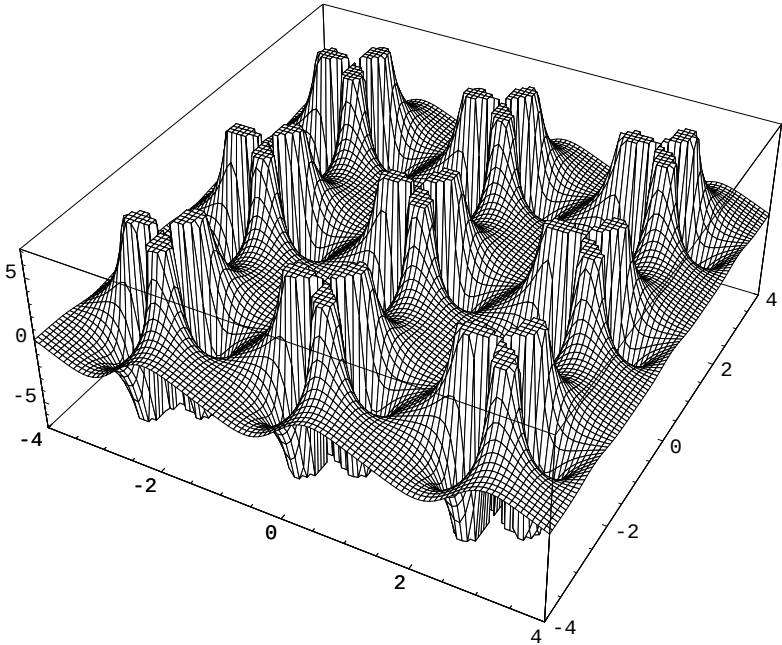


図 16.7 ϕ' 関数の実部

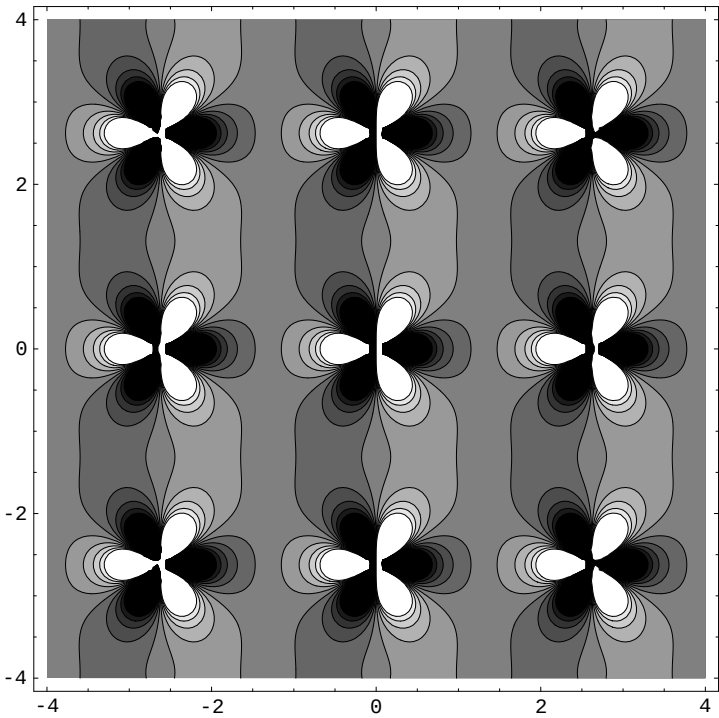


図 16.8 $\wp'$ 関数の実部の等高線

16.2 ζ 関数

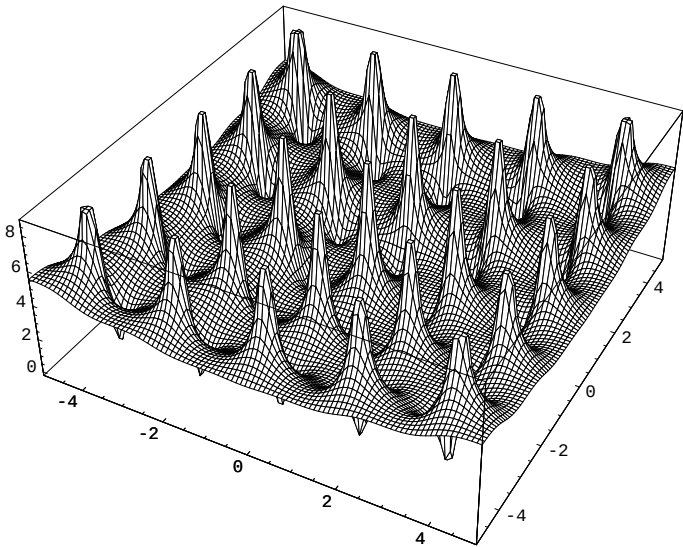


図 16.9 ζ 関数の絶対値

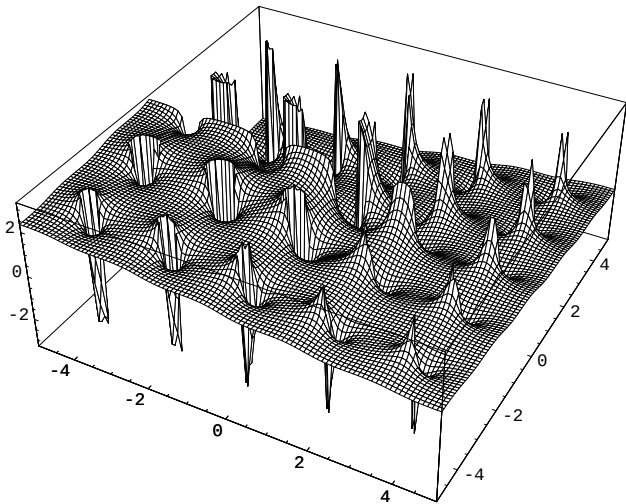


図 16.10 ζ 関数の偏角

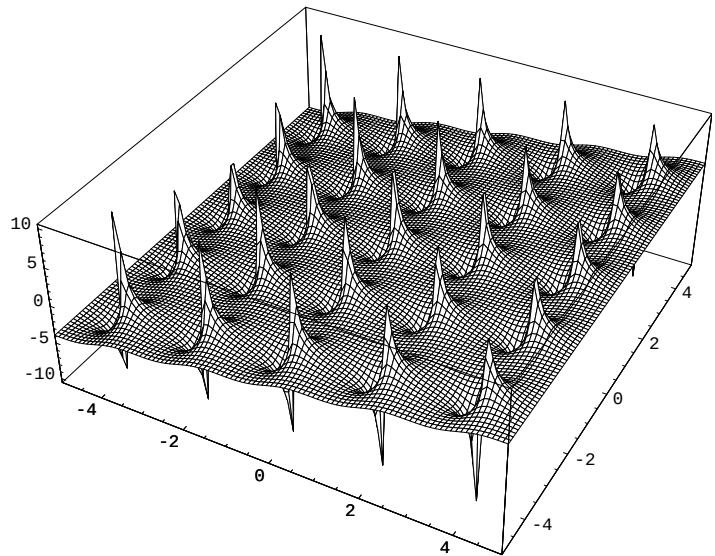


図 16.11 ζ 関数の実部

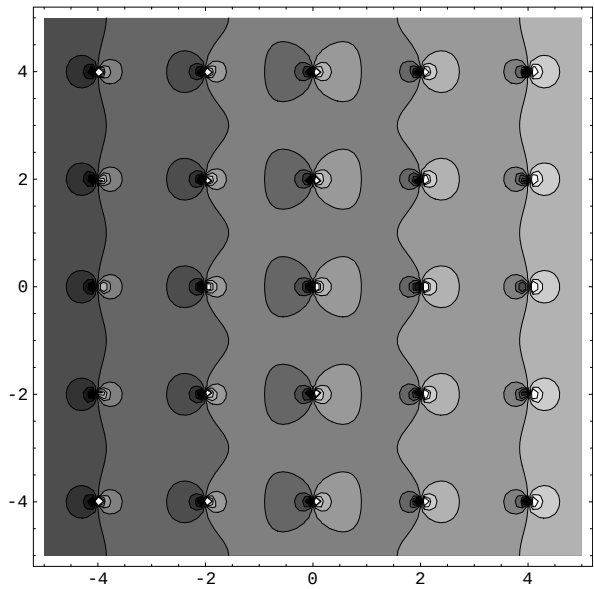


図 16.12 ζ 関数の実部の等高線

16.3 σ 関数

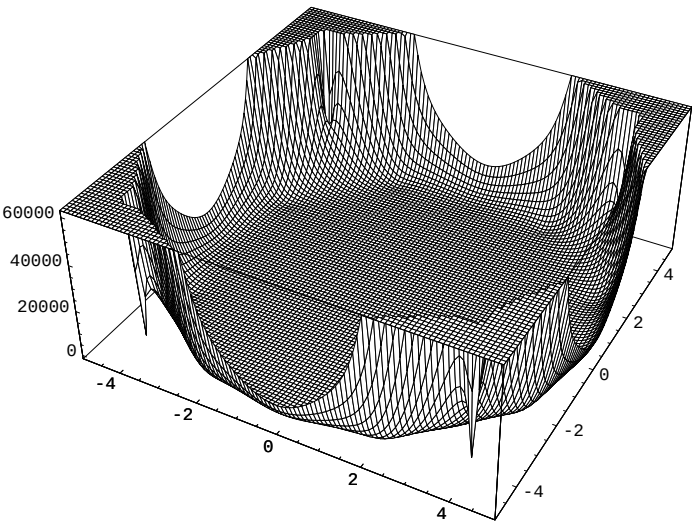


図 16.13 σ 関数の絶対値

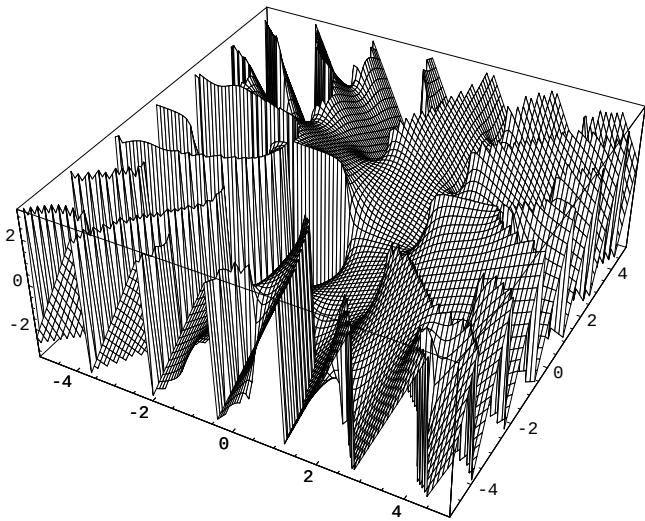


図 16.14 σ 関数の偏角

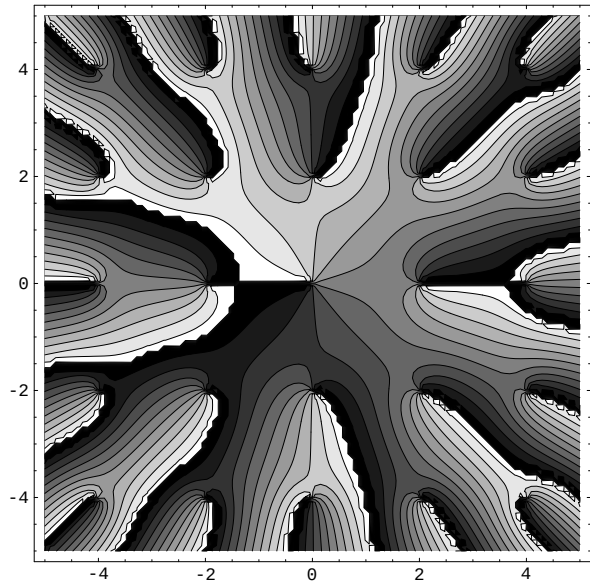


図 16.15 σ 関数の偏角の等高線

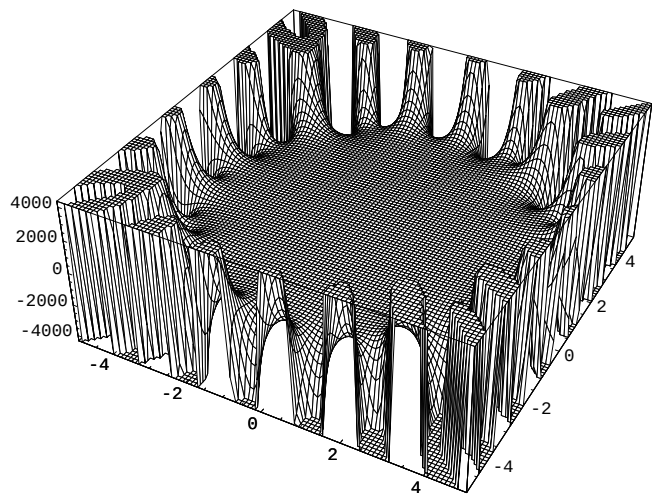


図 16.16 σ 関数の実部

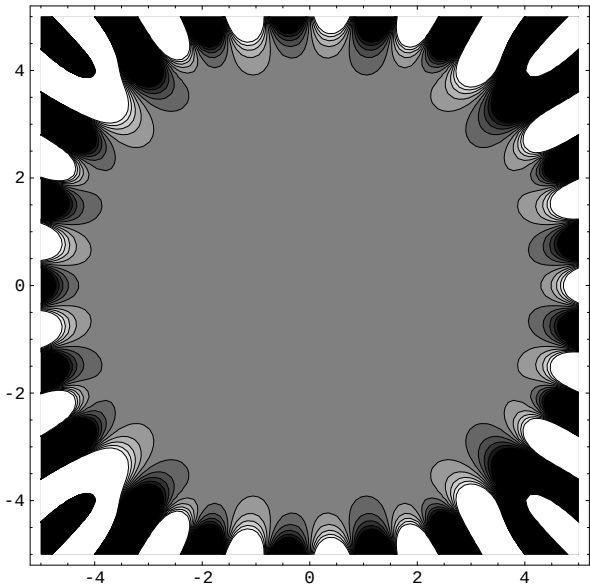


図 16.17 σ 関数の実部の等高線

16.4 Jacobi の楕円関数

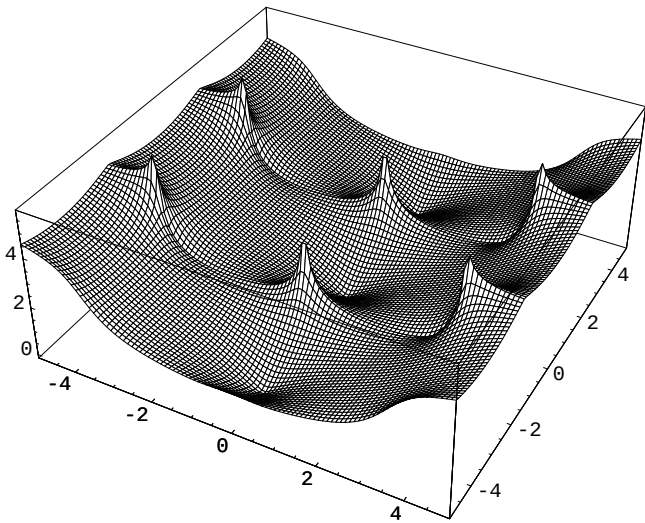


図 16.18 am 関数の絶対値

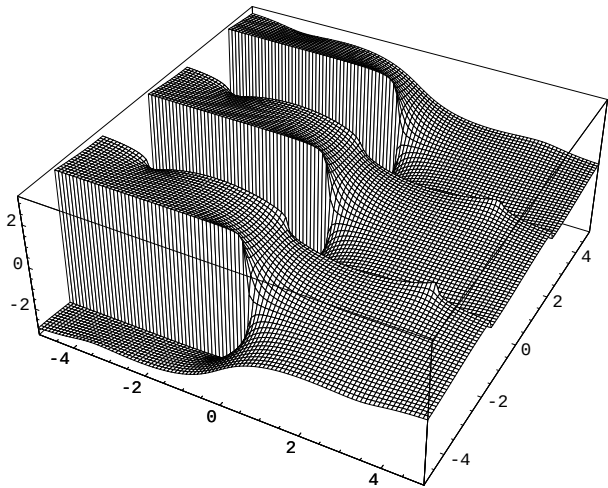


図 16.19 am 関数の偏角

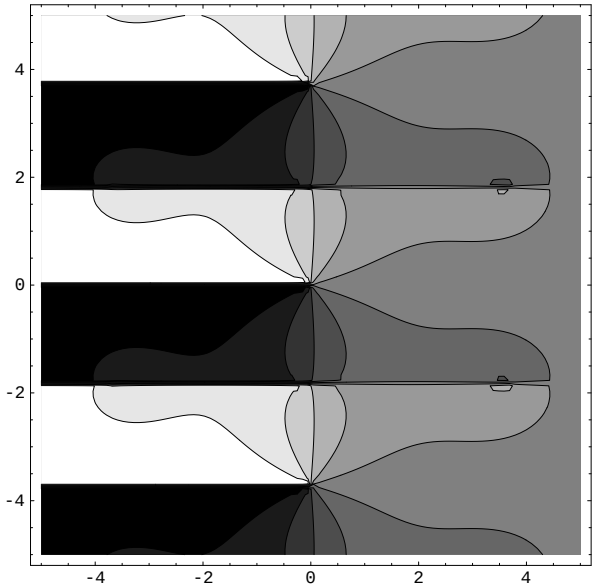


図 16.20 am 関数の偏角の等高線

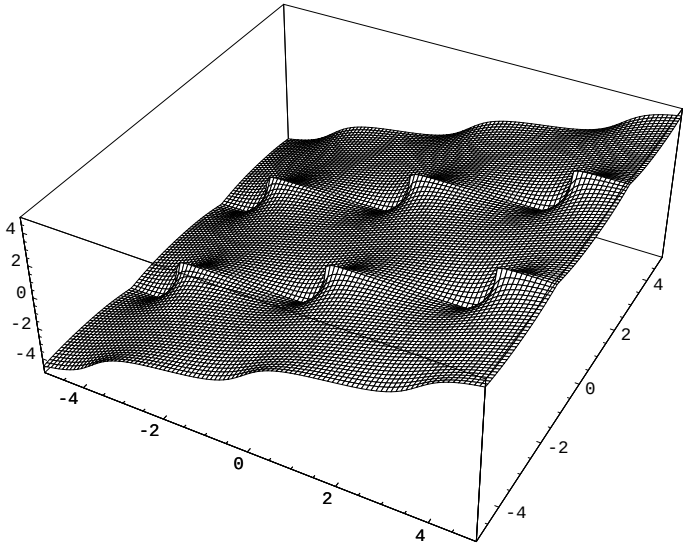


図 16.21 am 関数の実部

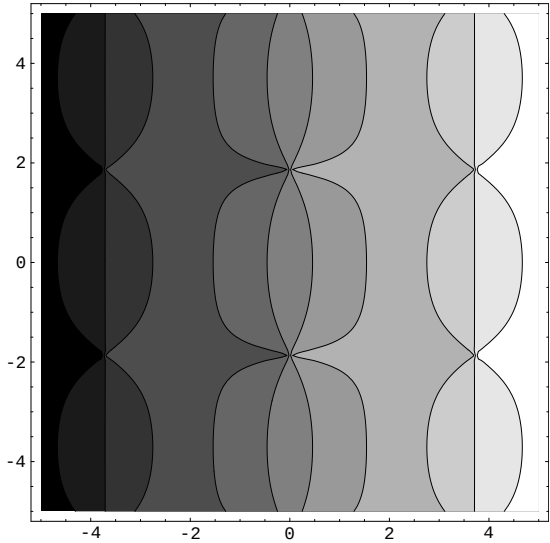


図 16.22 am 関数の実部の等高線

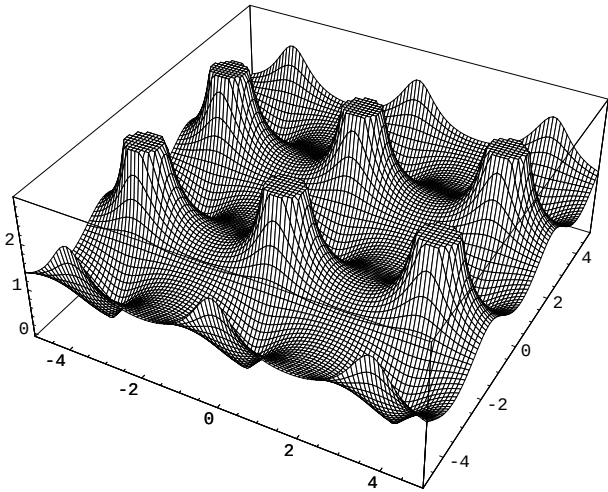


図 16.23 sn 関数の絶対値

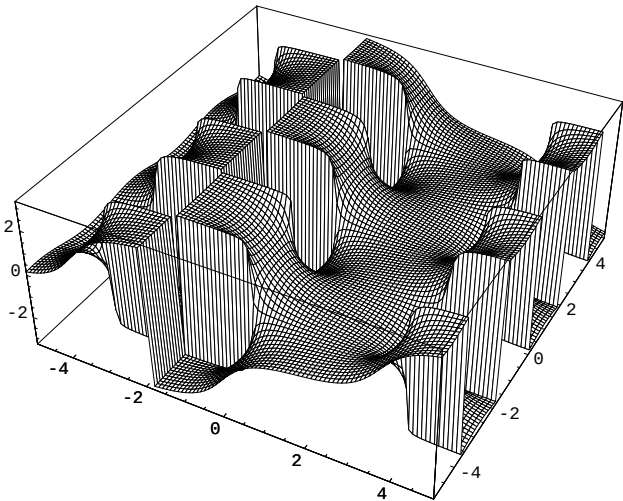


図 16.24 sn 関数の偏角

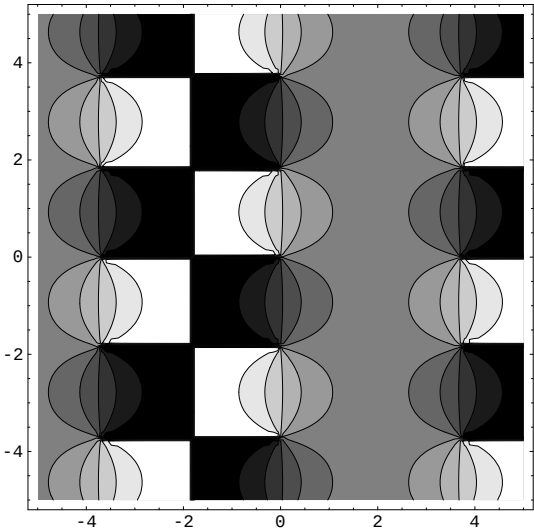


図 16.25 sn 関数の偏角の等高線

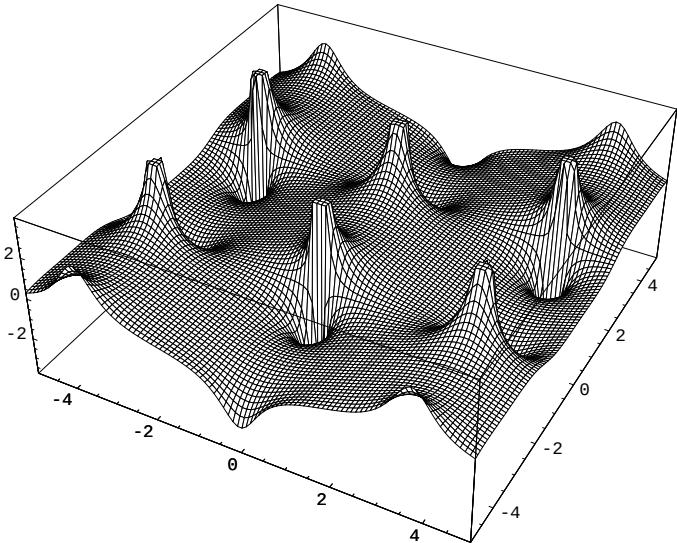


図 16.26 cn 関数の実部

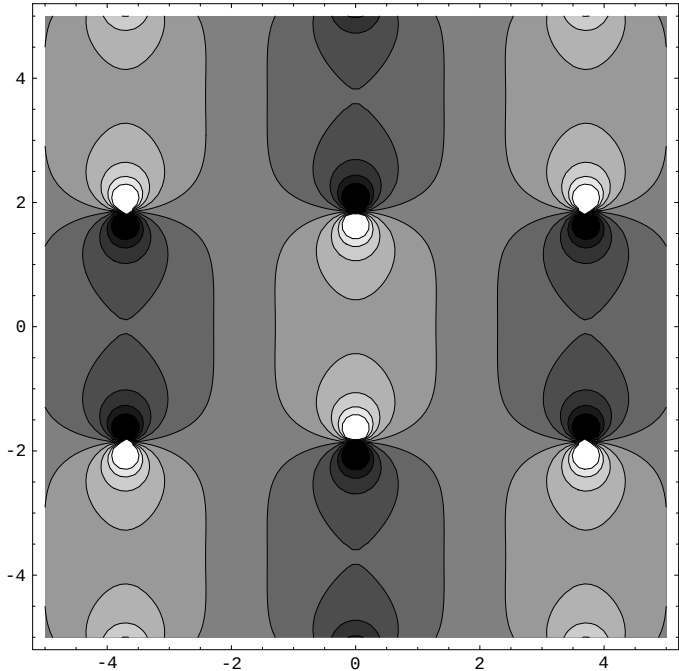


図 16.27 cn 関数の実部の等高線

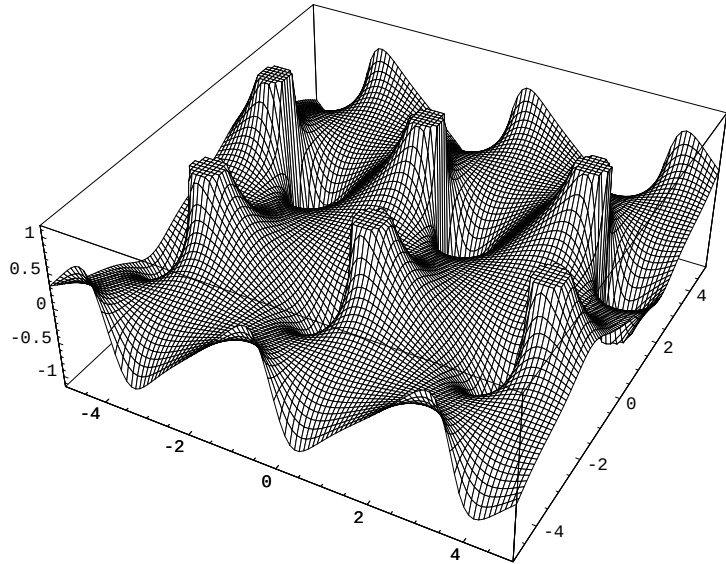


図 16.28 dn 関数の虚部

付録 A

公式一覧表

A.1 $\wp(z), \zeta(z), \sigma(z)$ の定義

$$\omega_3/\omega_1 \notin \mathbb{R}, \quad \Omega = \{2k\omega_1 + 2k'\omega_3 | \forall k, k' \in \mathbb{Z}\}, \quad \omega \in \Omega$$

$$\begin{cases} \sigma(z) = z \prod' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\omega} \right)^2} \right\} \\ \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum' \left\{ \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\} \\ \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} = -\frac{d}{dz} \left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} \right) \end{cases}$$

A.2 Laurent 展開

$$\begin{cases} \sigma(z) = z + k_2 z^5 + k_4 z^7 + \cdots k_n z^{2k+1} + \cdots \\ \zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{c_2}{3} z^3 - \frac{c_4}{5} z^5 - \cdots - \frac{c_{2n}}{2n-1} z^{2n-1} - \cdots \\ \wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots c_{2n} z^{2n-2} + \cdots \end{cases}$$

ここにおいて, c_{2n} は正の有理数を係数にもつ $\wp$ 関数の不変量 g_2, g_3 の多項式で, k_{2n} は有理数を係数にもつ g_2, g_3 の多項式を表す. 具体的には以下のように書き下せる.

$$c_2 = \frac{1}{20} g_2, \quad c_4 = \frac{1}{28} g_3, \quad \dots, \quad k_2 = -\frac{1}{240} g_2, \quad k_4 = -\frac{1}{840} g_3, \quad \dots$$

A.3 種々の定数

$$\begin{cases} g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}, & g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6} \\ \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \\ e_1 = \wp(\omega_1), & e_2 = \wp(\omega_1 + \omega_3), & e_3 = \wp(\omega_3) \\ \eta_1 = \zeta(\omega_1), & \eta_2 = \zeta(\omega_2), & \eta_3 = \zeta(\omega_3) \\ \begin{vmatrix} \omega_3 & \omega_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} = \frac{\pi i}{2} \end{cases}$$

A.4 $\wp$ 関数の満たす微分方程式

$$\begin{cases} \{\wp'(z)\}^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ \wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{1}{2}g_2 \end{cases}$$

A.5 周期との関係

$$\begin{cases} \wp(z + 2\omega_k) = \wp(z) \\ \zeta(z + 2\omega_k) = \zeta(z) + 2\eta_k \\ \sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(z + \omega_k)}\sigma(z) \end{cases}$$

A.6 加法公式関連

$$\begin{cases} \wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)} & (u, v \notin \Omega) \\ \zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\} \\ \wp(u+v) = \wp(u) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\} \\ \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right\}^2 \end{cases}$$

A.7 周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ を持った有理型関数 $f(z)$ の, $\wp(z), \sigma(z)$ による表示

R_1, R_2 : 有理関数, C : 定数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: 極の完全代表系, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$: 零点の完全代表系

$$\begin{cases} f(z) = C \frac{\sigma(z - \beta_1)\sigma(z - \beta_2) \cdots \sigma(z - \beta_n)}{\sigma(z - \alpha_1)\sigma(z - \alpha_2) \cdots \sigma(z - \alpha_n)} & (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n) \\ f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z)) \end{cases}$$

付録 B

ϑ 関数と種々の関数の関係

4 つの ϑ 関数の定義と, $\sigma(u)$, $\wp(u)$ との関係について整理する. ϑ 関数を v について微分するときは, $\wp'_0(v)$ 等のように表す. また, 特に $v = 0$ での関数の値を $\wp'_0 := \wp'_0(0)$ のように, v を省略して表す. このとき, $v = 0$ における関数はテータ定数と呼ばれるが, 実際は h (すなわち τ) の関数として表現されていることに注意しておく. いくつかの等式を 1 つの等式で表現するために, $\wp_0(v)$ を $\wp_4(v)$ と書くこともある. 以上の約束のもとで, 次の関係式を得ている.

B.1 ϑ 関数の定義

$$\left\{ \begin{array}{l} \wp_1(v) = i \sum_n (-1)^n h^{(\frac{2n-1}{2})^2} z^{2n-1} = 2h^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2h^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots \\ \wp_2(v) = \sum_n h^{(\frac{2n-1}{2})^2} z^{2n-1} = 2h^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2h^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots \\ \wp_3(v) = \sum_n h^{n^2} z^{2n} = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \dots \\ \wp_0(v) = \sum_n (-1)^n h^{n^2} z^{2n} = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \dots \end{array} \right.$$

B.2 $\sigma(u)$, $\sigma_k(u)$ の表示

$$\sigma(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\wp'_1} \wp_1(v), \quad \sigma_k(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{1}{\wp_{k+1}} \wp_{k+1}(v), \quad 1 \leq k \leq 3$$

B.3 $\wp_k(u)$ の表示

$$\wp_k(u) = \sqrt{\wp(u) - e_k} = \frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\wp'_1 \wp_{k+1}(v)}{\wp_{k+1} \wp_1(v)}, \quad u = \frac{v}{2\omega_1}$$

B.4 $v = 0$ における展開

$$\begin{cases} \vartheta_1' = 2\pi(h^{\frac{1}{4}} - 3h^{\frac{9}{4}} + 5h^{\frac{25}{4}} - 7h^{\frac{49}{4}} + \cdots) \\ \vartheta_2 = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + 2h^{\frac{49}{4}} + \cdots \\ \vartheta_3 = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots \\ \vartheta_0 = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots \end{cases}$$

参考文献

- [1] A. フルヴィッツ/R. クーラント [著] 足立 恒雄/小松 啓一 [訳] 楕円関数論 (Springer)
- [2] 戸田 盛和 楕円関数入門 (日本評論社)
- [3] 渡部 隆一/宮崎 浩/遠藤 静男 工科の数学 複素関数 (培風館)
- [4] 一松 信/森口 繁一 数学公式 特殊関数 (岩波書店)